Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 14

EXGSE140 – EXGSE149

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

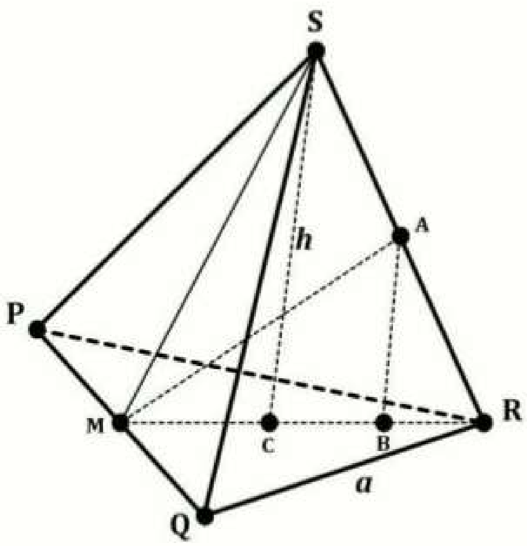
Septembre 2017

EXGSE140 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

On considère un tétraèdre régulier PQRS de l'espace euclidien, et un plan π passant par les points P et Q.

Déterminez l'angle α entre le plan π et la base PQR du tétraèdre, sachant que ce plan divise le tétraèdre en deux parties de même volume.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Le volume d'un tétraèdre, régulier ou pas, est

$$V = \frac{1}{3}(\text{aire base})(\text{hauteur})$$

Le tétraèdre PQRS est régulier de côté a. Soit M le milieu de l'arête [PQ]. La hauteur abaissée du sommet S sur la base PQR perce celle-ci en C, situé sur la hauteur [RM] de la base. Le volume du tétraèdre PQRS est

$$V_{PQRS} = \frac{1}{3}(\text{aire PQR}).\,h$$

Le plan π passant par les points P et Q coupe l'arête [SR] en un point A, d'où on abaisse la hauteur sur la base PQR qui perce celle-ci en B, situé également sur la hauteur [RM] de la base. Le volume du tétraèdre PQRA est

$$V_{PQRA} = \frac{1}{3}(\text{aire PQR}).\,\overline{AB}$$

Pour que $V_{PQRA} = \frac{1}{2}V_{PQRS}$, il faut que $\overline{AB} = \frac{h}{2}$ et par conséquent A est le milieu de l'arête [SR].

Dans un tétraèdre régulier, la droite reliant les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à chacune de ces arêtes. Par conséquent le triangle AMR est rectangle en A, et

$$\sin\alpha = \sin \widehat{AMR} = \frac{\overline{AR}}{\overline{MR}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 35{,}439°$$

7 septembre 2017

EXGSE141 - EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Soit un cube de longueur d'arête a. Les sommets d'une de ces faces sont nommés A, B, C et D (avec AB, BC, CD et DA définissant les 4 arêtes délimitant cette face). Les sommets de la face opposée sont désignés par A', B', C' et D', avec AA', BB', CC' et DD' décrivant 4 autres arêtes du cube.

(1) Calculer l'aire S du triangle $A'BD$ en fonction de a.

$\boxed{S(a) =}$

(2) Calculez, en fonction de a, la hauteur h du tétraèdre $A'BDA$ calculée à partir de sa base $A'BD$.

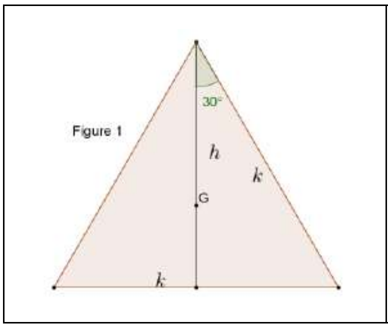
$\boxed{h(a) =}$

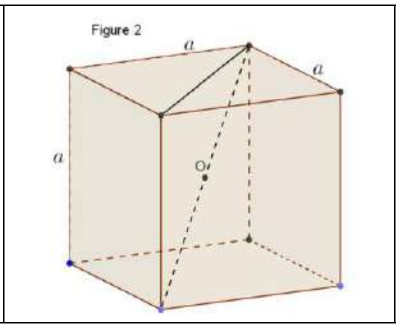
(3) Etant donné le point d'intersection A des diagonales $A'C, B'D, C'A$ et $D'B$, calculez le rapport entre le volume V_1 du tétraèdre $A'BDA$ et le volume V_2 du tétraèdre $A'BDO$.

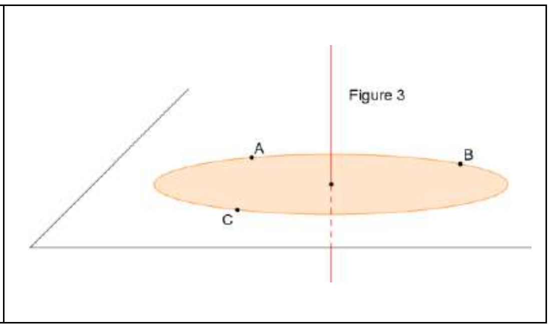
$\boxed{\frac{V_1}{V_2} =}$

N.B. Veillez à illustrer vos réponses sur un dessin clair et précis et justifiez vos développements. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration. Veuillez inscrire vos réponse finales dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires (indiquez y votre nom/prénom).

Solution proposée par Louis François







Rappel de quelques propriétés

(A) Figure 1. Dans un triangle équilatéral de côté k, la hauteur vaut $h=\dfrac{k\sqrt{3}}{2}$ et l'aire $A=\dfrac{k^2\sqrt{3}}{4}$

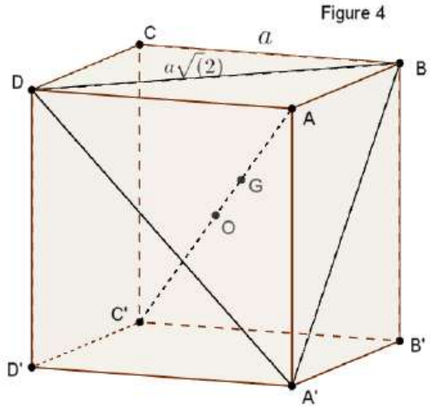
Toute hauteur est également madiane, médiatrice et bissectrice.

Ces droites se coupent en G, centre de gravité du triangle.

(B) Figure 2. Dans un cube de côté a, la diagonale d'une face vaut $a\sqrt{2}$, et une diagonale du cube vaut $a\sqrt{3}$. Les quatre diagonales se coupent en leur milieu commun O, centre du cube.

(C) Figure 3. Le lieu des points équidistants de trois points non alignés est la droite orthogonale au plan défini par ces trois points, et passant par le centre du cercle circonscrit à ces points.

Figure 4



(1) $\Delta(A'BD)$ est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ et d'aire $A=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Voir (A)

(2) Comme A est à la même distance de D, B et A', la projection orthogonale de A sur (DBA') est G le centre du $\Delta(DBA')$ (voir (C)) $\Rightarrow h(a)=\overline{AG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot h(a)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3}{6}$$

(3) Le centre O du cube est à la même distance de D, B et A'. Donc O, A et G sont alignés (voir (B) et (C)). La hauteur h_2 du tétraèdre $A'BDO$ vaut :

$$h_2=\overline{OG}=\overline{OA}-\overline{AG}=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{h(a)}{2}$$

Et donc $V_2=\dfrac{1}{3}\cdot h_2\cdot A=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{12}$

Les deux tétraèdres ont la même base, le rapport des volumes est donc celui des hauteurs.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{h(a)}{h_2}=2$$

Remarques de Nicole Berckmans

(1) Si on ne trouve pas les deux hauteurs par la géométrie synthétique, on peut "parfois" travailler en géométrie analytique. Donnons des coordonnées en supposant C' l'origine du repère, $\overrightarrow{C'D'}$ l'axe des x, $\overrightarrow{C'B'}$ l'axe des y et $\overrightarrow{C'C}$ l'axe des z.

Le plan $D(a,0,a)B(0,a,a)A'(a,a,0)$ a pour équation $x+y+z=2a$. La distance de $A(a,a,a)$ à ce plan est $\dfrac{|a+a+a-2a|}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=h(a)$.

La distance de $O\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ vaut $\dfrac{\left|\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}-2a\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{h(a)}{2}$

(2) Si on veut connaître les coordonnées de G centre de gravité du triangle $A'(0,a,0)B(0,a,0)D(a,0,a)$, on sait que $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$$\Rightarrow G=\frac{A'+B+D}{3}=\frac{1}{3}(2a,2a,2a)$$

$$\Rightarrow h(a)=\overrightarrow{AG}=\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2+\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2+\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(3) Le volume du tétraèdre $A'BDA=\dfrac{1}{3}$ le volume du prisme $DBB'D'$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\text{ volume du cube }=\frac{1}{6}a^3$$

5 octobre 2017

EXGSE142 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018

On se donne une sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1 et de centre O. On prend ensuite trois points X, Y et Z à la surface de $\mathcal{S}$ de sorte que $OXYZ$ soit un tétraèdre régulier de longueur de côté 1 : autrement dit $\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ} = \overline{XZ} = \overline{YZ} = \overline{XZ} = 1$.

Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par O, X et Y et dont l'intersection avec la surface de $\mathcal{S}$ est le cercle $\mathcal{C}$.

On prend sur $\mathcal{C}$ un point P de sorte que $\overline{PX} = 1$, avec X localisé sur $\mathcal{P}$ et Y sur $\mathcal{C}$.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.

(2) Que vaut le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $OXYZ$.

$\boxed{\mathcal{V} = \qquad\qquad\qquad}$

(3) Que vaut le rapport entre $\mathcal{V}$ et le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre régulier $PXYZ$.

(Remarque : pour répondre, il peut être utile de visualiser $\mathcal{C}$ et les triangles OXY et PXY dans le plan $\mathcal{P}$.)

$\boxed{\mathcal{V}/\mathcal{V}' = \qquad\qquad\qquad}$

(4) Que vaut le rapport (3) si P est maintenant déplacé sur $\mathcal{C}$ de sorte que $\overline{PX} = \sqrt{3}$, avec X toujours localisé entre P et Y sur $\mathcal{C}$.

Remarque : Lorsqu'ils présents, veuillez noter vos réponses finales dans les encadrés, mais écrivez aussi vos raisonnements/calculs sur cette page, au verso ou sur feuilles supplémentaires. Un dessin ne constitue pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans

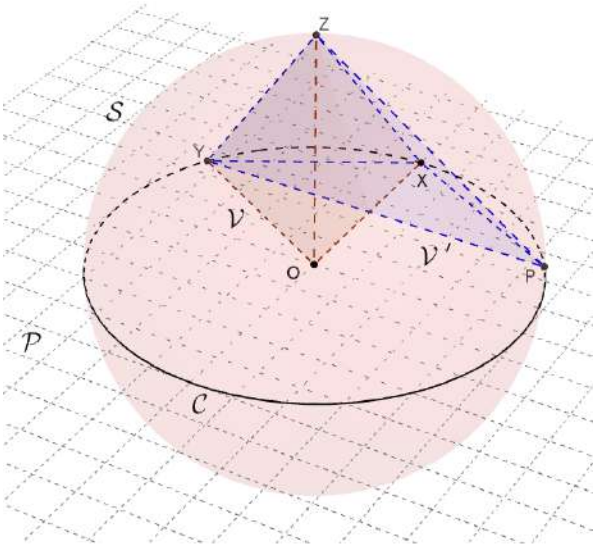


Figure 1

(2) Aire de la base $OXY =$ aire d'un triangle équilatéral de côté 1 : $A = \frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

La hauteur $H = \overline{ZG}$ où G est la projection orthogonale de Z sur le plan OXY.

G est le centre du triangle OXY : $\overline{OG} = \frac{2}{3}\overline{OM} = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow H = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Le volume du tétraèdre est alors : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

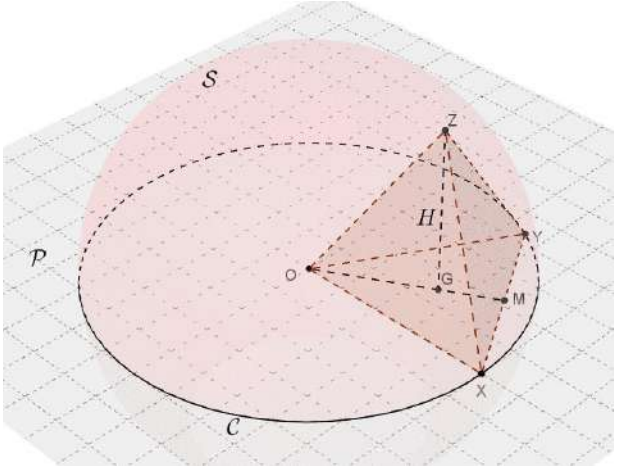


Figure 2

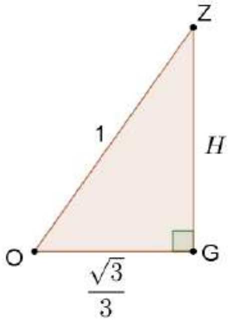


Figure 3

(3) $\mathcal{V}' = \frac{1}{3}$ aire de la base PXY multiplié par la hauteur H issue de Z sur le plan PXY qui est aussi le plan OXY.

L'aire du triangle $PXY = \frac{1}{2}$ aire de $OPXY = \frac{1}{2}.2$ l'aire de $OXY = \frac{\sqrt{3}}{4}$

D'où : $\boxed{\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = 1}$

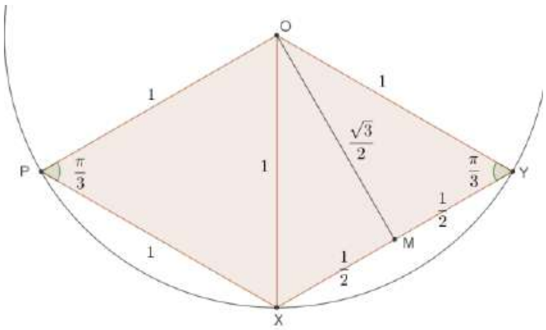


Figure 4

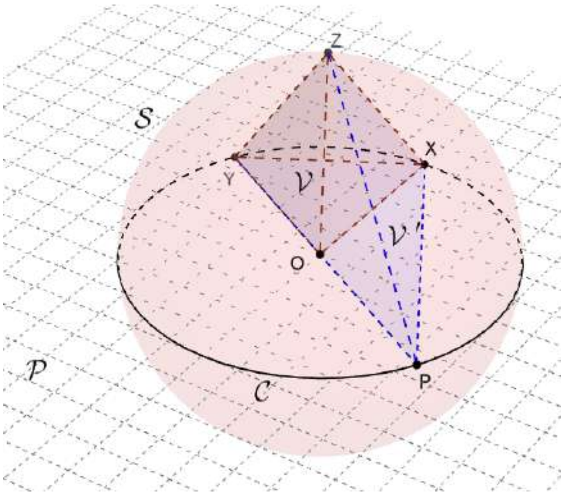


Figure 5

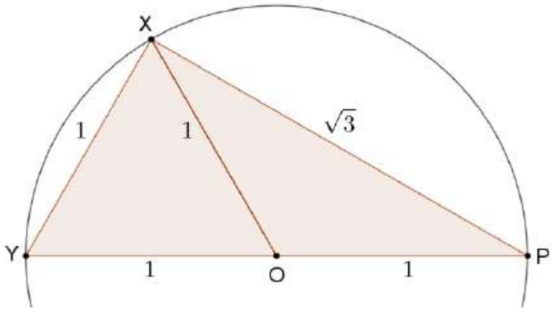


Figure 6

(4) Le triangle PXY est rectangle en X car $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 2^2$

L'aire du rectangle $= \frac{1}{2}.1.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La hauteur du tétraèdre vaut toujours $H = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Donc le volume : $\mathcal{V}' = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Il en résulte que $\mathcal{V}' = 2\mathcal{V} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \frac{1}{2}}$

EXGSE143 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Soit $\mathcal{P}$ un prisme droit à base triangulaire. On dénote A, B et C les sommets d'un première base (supposée horizontale), et par A', B' et C' les sommets de l'autre base de sorte que AA', BB' et CC' constituent les trois autres arêtes de $\mathcal{P}$, perpendiculaires aux deux bases.

(1) Quel est le rapport entre le volume du tétraèdre $ABCA'$ et le volume de $\mathcal{P}$.

$\boxed{R = \qquad}$

(2) Trouver une construction qui découpe $\mathcal{P}$ en exactement trois tétraèdres $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3)$ de *même volume*. Les 4 sommets de chaque tétraèdre sont à sélectionner parmi les sommets de $\mathcal{P}$ et il faut que l'union des quatre tétraèdres reforme le prisme.

$\boxed{\mathcal{T}_1 = \qquad}$ $\boxed{\mathcal{T}_2 = \qquad}$ $\boxed{\mathcal{T}_3 = \qquad}$

(3) Illustrer la situation par un dessin clair et précis.

(4) Si toutes les arêtes du prisme sont de longueur 1, calculez la différence δ entre, d'une part, la somme des trois surfaces des pyramides trouvées, et d'autre part, la surface du prisme initial.

$\boxed{\delta = \qquad}$

Solution proposée par Louis François

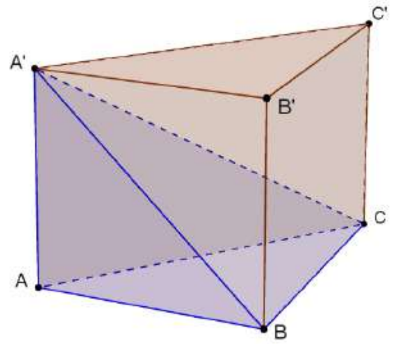


Figure 1

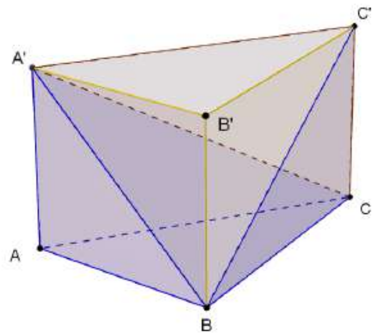


Figure 2

(1) $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = h$

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques, donc de même aire $: b$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Volume du prisme : } V_{\mathcal{P}} = bh \\ \text{Volume du tétraèdre } \left(\underbrace{(A,B,C)}_{\text{base}}, \underset{\text{sommet}}{A'}\right) = \dfrac{bh}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{1}{3}}$$

(2) Le prisme $\mathcal{P}$ se décompose en trois tétraèdres $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$.

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1\left((A,B,C)'A'\right) : \ V_{\mathcal{T}_1} = \dfrac{bh}{3} \\ \mathcal{T}_2\left((A',B',C'),B\right) : V_{\mathcal{T}_2} = \dfrac{bh}{3} \\ \mathcal{T}_3\left((C,C',A'),B\right) : V_{\mathcal{T}_3} = bh - 2\dfrac{bh}{3} = \dfrac{bh}{3} \end{cases}$$

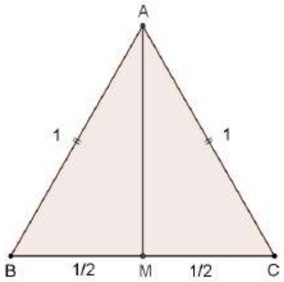


Figure 3

(4) Figure 3 - Les bases du prisme sont des triangles équilatéraux de côtés 1, de hauteur $\overline{AM}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'aire $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Chacune des 3 faces latérales du prisme est un carré de côté 1, donc d'aire $y=1$

L'aire totale du prisme est donc $A_{\mathcal{P}}=2x+3y=\frac{\sqrt{3}}{2}+3$

Aire de T_1 (Figure 4)

Aire du triangle ABC : $A_{\Delta(ABC)}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Le triangle CAA' est rectangle en A et $\overline{AC}=\overline{AA'}=1 \Rightarrow A_{\Delta(CAA')}=\frac{1}{2}$

$A_{\Delta(BAA')}=A_{\Delta(CAA')}=\frac{1}{2}$

Le triangle CBA' est un triangle isocèle

de côtés $\overline{CB}=1, \overline{A'C}=\overline{A'B}=\sqrt{2}$ (Pythagore)

de hauteur $\overline{A'M}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

d'aire $A_{\Delta CBA'}=\frac{1}{2}\overline{BC}.\overline{A'M}=\frac{\sqrt{7}}{4}=z$

Aire totale de T_1 : $A_{T_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{4+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}$

Aire de T_2 = aire de T_1 : $A_{T_2}=\frac{4+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}$

Aire de T_3 (Figure 5)

Le triangle $CC'B$ est rectangle : $A_{\Delta CC'B}=\frac{1}{2}$

$A_{\Delta CC'A}=A_{\Delta CC'B}=\frac{1}{2}$

Le triangle BCA' est isocèle $\overline{A'B}=\overline{A'C}=\sqrt{2}$ avec $\overline{BC}=1$ et

de hauteur $\overline{A'M}=\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow A_{\Delta BCA'}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Le triangle $A'BC'$ est isométrique au précédent (côtés de même longueur)

$\Rightarrow A_{\Delta A'BC'}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Aire totale de T_3 : $A_{T_3}=1+\frac{\sqrt{7}}{2}$

Aire totale des 3 tétraèdres: $A_{\mathcal{T}}=A_{T_1}+A_{T_2}+A_{T_3}=3+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{7}$

Finalement : $\delta=A_{\mathcal{T}}-A_{\mathcal{P}}=3+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{7}-\frac{\sqrt{3}}{2}-3=\boxed{\sqrt{7}}$

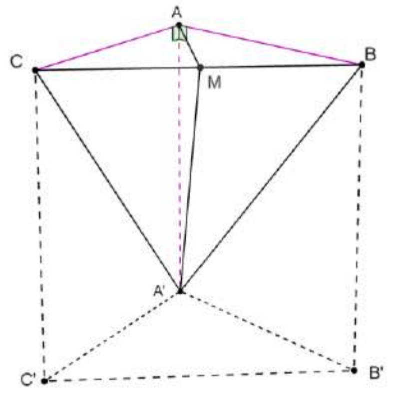


Figure 4

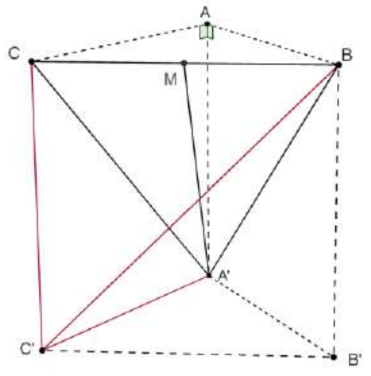


Figure 5

Note : Le titre de l'exercice est « le prisme d'Euclide ». En effet, on trouve dans les « éléments de géométrie » d'Euclide, livre XII, proposition VII, le théorème suivant : Tout prisme triangulaire peut se diviser en 3 pyramides triangulaires égales entre elles.

Le 19 octobre 2018

EXGSE144 - EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

« Une curiosité tétraédrique »

On se donne un tétraèdre $\mathcal{T}$ de sommets $O,\ A,\ B,$ et C tel que les arêtes $OA,\ OB$ et OC sont orthogonales deux à deux. On dénote les longueurs de celles-ci par $\overline{OA} = a,\ \overline{OB} = b$ et $\overline{OC} = c$.

(1) Illustrez l'énoncé par un dessin clair et précis.

(2) Si $a = b = c = 1$, que vaut la différence entre, d'une part, la somme des carrés des surfaces des trois faces de $\mathcal{T}$ adjacentes à O, et d'autre part, le carré de la surface de la face ABC.

$\boxed{\delta = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

(3) Calculez, en fonction de a et b quelconques, la hauteur h de la face OAB issue de O.

$\boxed{h = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

(4) Que vaut la différence calculée en (2) pour des valeurs de $a,\ b,\ c$ quelconques ? Justifiez votre réponse.

$\boxed{\delta = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Solution proposée par Louis François

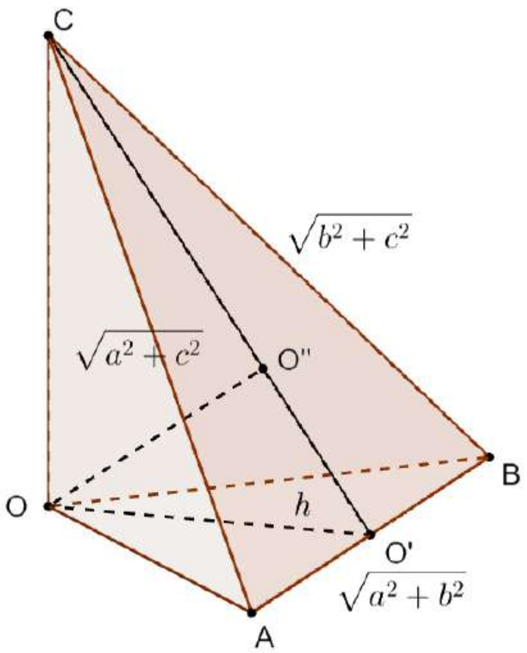


Figure 1

(2) Si $a=b=c=1,$ alors les côtés du triangle isocèle ABC valent $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ l'aire de la base du tétraèdre $\mathcal{T}$: $A_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chaque face est un triangle rectangle de côtés 1.

L'aire d'une face est alors : $\quad A_{OAC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$

La différence cherchée est donc : $\delta=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\boxed{0}$

(3) a et b sont quelconques. Dans le triangle OAB la hauteur issue de O rencontre AB en O'.

$$A_{OAB}=\frac{\overline{OA}.\overline{BO}}{2}=\frac{\overline{AB}.\overline{OO'}}{2}\text{ ou } a.b=\sqrt{a^2+b^2}.h\Rightarrow\boxed{h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

(4) La somme des carrés des aires des faces est :

$$S_F=\left(A_{OAB}\right)^2+\left(A_{OAC}\right)^2+\left(A_{OBC}\right)^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{ac}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}$$

Pour déterminer la surface de la base $ABC,$ nous allons d'abord déterminer la hauteur de $\mathcal{T}$. Dans le triangle $COO',$ la hauteur issue de O rencontre CO' en O''.

$$\overline{CO'}^2=\overline{CO}^2+\overline{OO'}^2=c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$A_{COO'}=\frac{\overline{OO''}.\overline{CO'}}{2}=\frac{\overline{CO}.\overline{OO'}}{2}\Rightarrow\overline{OO''}.\sqrt{\frac{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}}=c.\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\Rightarrow\overline{OO''}=\dfrac{abc}{\sqrt{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}}$. Or OO'' est la hauteur du tétraèdre. (Note 1)

En effet, $OC\perp$ plan OAB donc $OC\perp AB$ or $OO'\perp AB,$ donc $AB\perp$ plan $OO'C,$ donc $AB\perp OO'',$ or $OO''\perp CO'$ et finalement $OO''\perp$ plan $ABC.$

Calculons le volume de $\mathcal{T}$ de deux façons différentes :

$$V_{\mathcal{T}}=\frac{1}{3}\underbrace{\frac{ab}{2}.c}_{\text{Base } OAB}=\frac{1}{3}A_{ABC}.\overline{OO''}\Rightarrow\frac{abc}{2}=A_{ABC}.\frac{abc}{\sqrt{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}}$$

$$\Rightarrow A_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}$$

On peut maintenant conclure : $\boxed{\delta=S_F{}^2-A_{ABC}{}^2=0}$

Note 1 : La géométrie analytique donne directement la hauteur OO''.

$$\text{Plan } ABC\equiv\pi_{ABC}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\text{ ou } bcx+acy+abz=abc$$

$$\Rightarrow OO''=d\left(O,\pi_{ABC}\right)=\frac{abc}{\sqrt{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}}$$

Méthodes alternatives pour le calcul de A_{ABC}

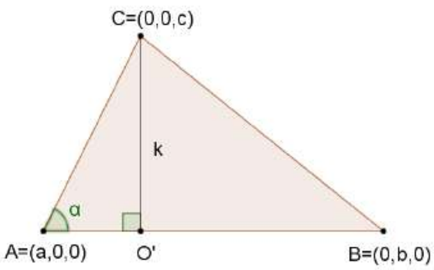
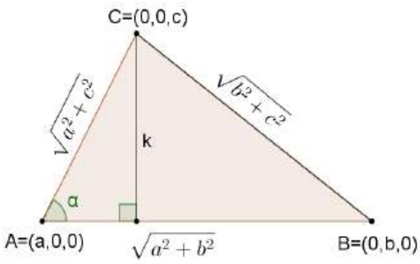
Utilisation du produit scalaire (Figure 2)

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{-a,b,0}\right).\left(\overrightarrow{-a,0,c}\right) = a^2\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}.\cos\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}}$$

D'autre part : $A_{ABC} = \frac{1}{2}k.\overline{AB}$ et comme le triangle ACO' est rectangle $\sin\theta = \frac{k}{\overline{AC}}$

Donc : $k = \sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}.\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}$$

 Figure 2	 Figure 3

Utilisation des relations dans un triangle (Figure 3)

$A_{ABC} = \frac{1}{2}k\sqrt{a^2+b^2}$ où $k = \sin\alpha\sqrt{a^2+c^2}$

D'autre part : $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AB}.\cos\alpha$

$\Rightarrow b^2+c^2 = (a^2+c^2)+(a^2+b^2)-2\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{a^2+b^2}.\cos\alpha$

$\Rightarrow 2a^2 = 2\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1-\sin^2\theta} \Rightarrow 1-\sin^2\alpha = \frac{a^4}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)-a^4}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}} = \sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}$

Finalement : $A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.\sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{a^2+b^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

Utilisation des droites orthogonales (Figure1)

Dans le triangle ABC, la droite CO' est perpendiculaire à la droite AB, car $AB \perp OC$ et $AB \perp OO'$, donc AB est orthogonale au plan COO'.

Dans le triangle rectangle COO', on a :

$$\overline{CO'} = \sqrt{h^2 + c^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + c^2} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{CO'} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.\frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

Utilisation du produit vectoriel

$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$.

Nous savons que la norme du produit vectoriel représente la surface du parallèlogramme définit par $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab) \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

2

16 octobre 2016

EXGSE145 - EPL, UCL, LLN, juillet 2019, série 1.

On se donne un tétraèdre quelconque $\mathcal{T}$ de sommets A, B, C et D, et la sphère $\mathcal{S}$ parfaitement inscrite à $\mathcal{T}$ (autrement dit, celle-ci est tangente aux quatre faces de $\mathcal{T}$).

1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.

2) Si le rayon de la spère est r et son centre O, exprimé r en fonction du volume V de $\mathcal{T}$ et de sa surface totale S, c'est-à-dire de la somme des aires des quatre faces (astuce : n'hésitez pas à découper $\mathcal{T}$ en plusieurs tétraèdres pour y voir clair).

$$\boxed{r = \qquad}$$

3) Que vaut le rapport du volume V' et de la surface S' de la sphère exprimé uniquement en fonction de V de S ?

$$\boxed{\frac{V'}{S'} = \qquad}$$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berkcmans

2)

$$\left.\begin{aligned} V_{TA} &= \frac{S_{BCD}.r}{3} \\ V_{TB} &= \frac{S_{ACD}.r}{3} \\ V_{TC} &= \frac{S_{ABD}.r}{3} \\ V_{TD} &= \frac{S_{ABC}.r}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \frac{r}{3}\left(S_{BCD} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{ABC}\right) = \frac{r}{3}S \Rightarrow \boxed{r = \frac{3V}{S}}$$

3) $$\frac{V'}{S'} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3} = \frac{3V}{3S} \Rightarrow \boxed{\frac{V'}{S'} = \frac{V}{S}}$$

Le 24 septembre 2019

EXGSE146 - EPL, UCL, LLN, juillet 2019, série 2.

Une souris lorgne un bloc de gruyère $\mathscr{P}$. Celui-ci est un prisme droit à base triangulaire et on dénote par A, B et C les sommets d'une première base (supposée horizontale), et par A', B' et C' les sommets de l'autre base de sorte que AA', BB' et CC' constituent les trois autres arêtes de P, perpendiculaire aux deux bases.

On fixe $\overline{AA'} = 1$ et $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2$.

1) Quel est e volume V du bloc de fromage $\mathscr{P}$?

$\boxed{V =\quad}$

La souris - une géomètre dans ses temps libres - succombe à l'odeur et décide d'engloutir trois bouchées du bloc; ses dents parfaitement aiguisées suppriment dès lors les trois coins obtenus en intersectant $\mathscr{P}$ avec trois sphères de rayon 1 : dont les centres sont respectivement identifiés avec les sommets A', B' et C'.

2) Illustrer la situation par un dessin clair et précis.

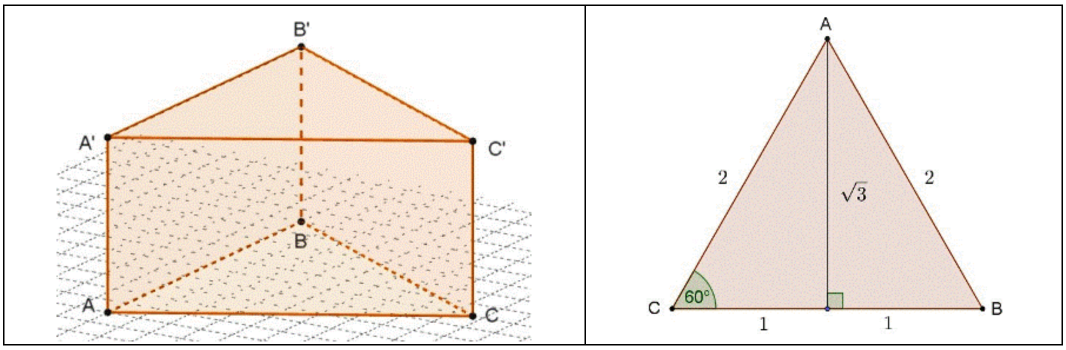
3) Quel est le volume V' du fromage restant? Justifier votre réponse.

$\boxed{V' =\quad}$

4) Quelle est la surface S de cette même forme?

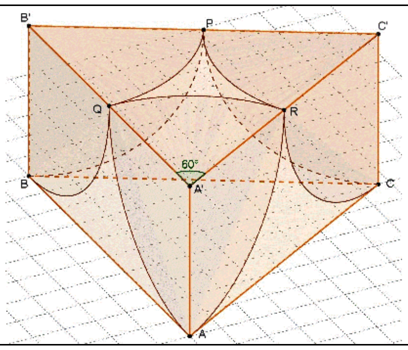
$\boxed{S' =\quad}$

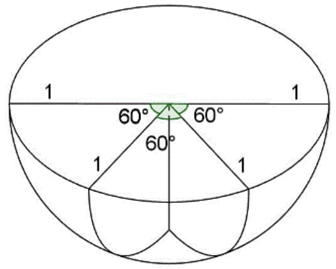
Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



$$2) \text{ Surface de la base } = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{Volume du bloc : } V = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$



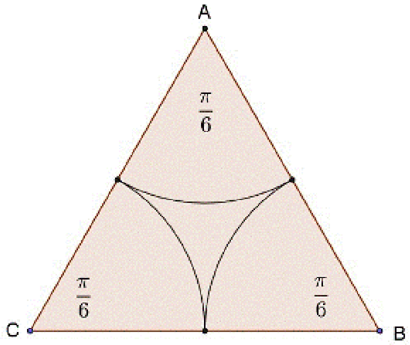


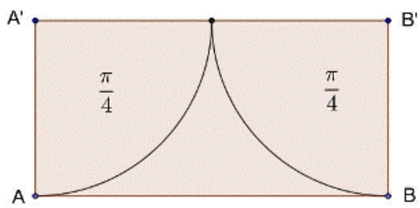
$$\text{Volume de la sphère } = \frac{4}{3}\pi\,1^3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Chaque bouchée représente : } \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ de sphère}$$

$$\text{Volume d'une bouchée} = \frac{1}{12}\times\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

$$\text{Volume restant : } \boxed{V = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}$$





3) Surface de la base : $S_{ABC} = \sqrt{3}$

Surface de la face supérieure qui n'a pas été mangée :

$$S_1 = \sqrt{3} - 3\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

3 surfaces de côtés : $S_2 = 3\left(2\times1 - -2\times\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$

3 surfaces sphériques, soit $3\times\frac{1}{12}$ de sphère :

$$S_3 = \frac{1}{4}\times 4\pi = \pi$$

Surface totale :

$$S_T = \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} + 3\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) - \pi = \boxed{6 + 2\sqrt{3} - \pi}$$

EXGSE147 - EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Tétraèdre dual.

On considère un tétraèdre $\mathscr{T}$ de longueur de côté 1 dont les sommets sont nommés A, B, C et D. Le traèdre dual $\mathscr{T}'$ est formé en connectant les centres des quatre faces triangulaires de $\mathscr{T}$, le centre d'une face étant défini par l'intersection de ses médianes.

1) Illustrer par un dessin clair et précis.

2) Quelle est la hauteur h et $\mathscr{T}$?

$\boxed{h =\quad}$

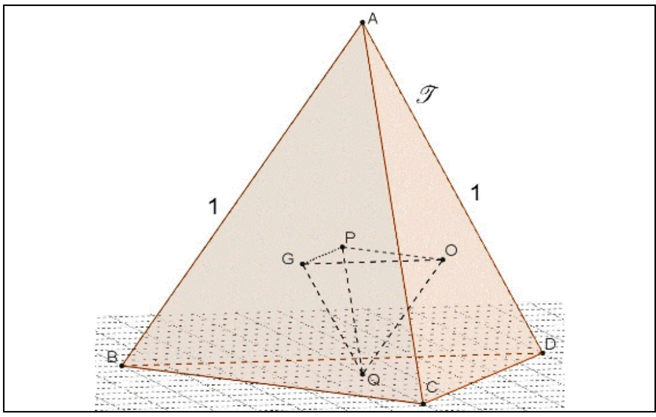
3) le tétraèdre $\mathscr{T}'$ est lui-même régulier. Quelle est sa longueur de côté l ?

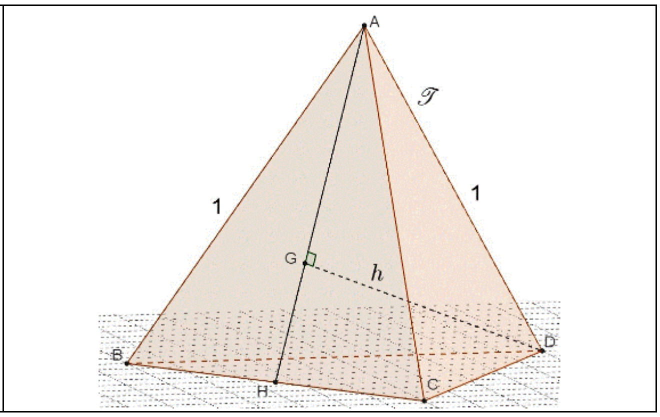
$\boxed{l =\quad}$

4) Que vaut le rapport entre le volume V de $\mathscr{T}$ et le volume V' de $\mathscr{T}'$?

$\boxed{\frac{V}{V'} =\quad}$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



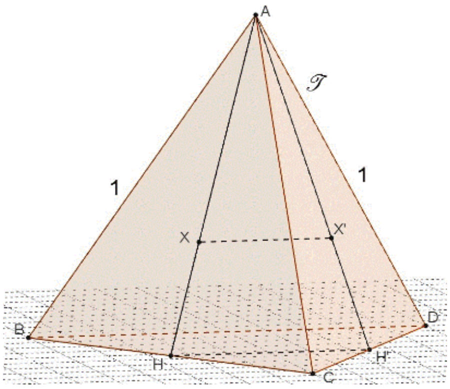


Détermination de la hauteur :

On applique Pythagore

dans le triangle AHC : $\overline{AH} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

dans le triangle AGD : $h = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$



Soit G, le centre de gravité du triangle ABC : $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Notons $G=X$ un sommet du tétraèdre $\mathscr{T}$

Dans le triangle AHH' : $\overline{HH'}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}$ par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

$l=\overline{XX'}=\frac{2}{3}\overline{HH'}\Rightarrow\boxed{l=\frac{1}{3}}$ par l'homthétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.

$\mathscr{T}'$ est l'image de $\mathscr{T}$ par l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ car $l=\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{\frac{V}{V'}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}}$

Le 24 septembre 2019

EXGSE148 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2014.

Dans le système d'axes orthonormé $OXYZ$, soit le tétraèdre régulier $ABCD$ dont la longueur des arêtes vaut 20. Sa base ABC appartient au plan OXY. Son arête AB est parallèle à OY. L'ordonnée de B est plus grande que celle de A. Les coordonnées de son sommet A sont : $(20,\ 10,\ 0)$. L'abscisse de C est plus grande que les abscisses de A et de B.

On demande :

1. de déterminer les coordonnées des sommets B, C et D de ce tétraèdre
2. de calculer le volume de ce tétraèdre.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Comme le tétraèdre est régulier, toutes ses arêtes sont égales. Le sommet D est donc équidistant de A et B : il appartient donc au plan médiateur de AB. La médiatrice du côté AB du triangle ABC de base est donc contenue dans ce plan médiateur. Par ailleurs, ce plan est vertical puisque le segment AB est horizontal. La projection horizontale de D appartient donc à la médiatrice de AB dans ABC.

Le sommet D est aussi équidistant de B et de C : il appartient donc au plan médiateur de BC. La médiatrice du côté BC du triangle ABC de base est donc contenue dans ce plan médiateur. Par ailleurs, ce plan est vertical puisque le segment AB est horizontal. La projection horizontale de D appartient donc à la médiatrice de BC dans ABC.

Comme la projection horizontale du point D appartient simultanément aux 2 médiatrices précitées, cette projection horizontale du point D est le point d'intersection des médiatrices qui correspond lui-même au centre du cercle circonscrit au triangle de base ABC.

Comme toutes les arêtes de $ABCD$ sont égales, les côtés AB, BC et CA du triangle de base sont donc égales et, par suite, le triangle ABC est équilatéral. Or, dans un triangle équilatéral, les médiatrices sont aussi les hauteurs, les bissectrices et les médianes. Le centre du cercle circonscrit est donc aussi simultanément l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre de gravité G du triangle ABC.

Donc, en synthèse, la projection horizontale du sommet D est le centre de gravité G du triangle de base ABC. Autrement dit, le sommet D se trouve sur la verticale passant par G. Le centre de gravité G se trouve aux $2/3$ (comptés à partir d'un sommet) de chacune des médianes.

Comme l'arête AB est parallèle à OY, que l'ordonnée de B est supérieur à celle de A et que les coordonnées de A sont $(20, 10, 0)$, les coordonnées de B sont : $(20, 30, 0)$ et les coordonnées de son milieu M sont : $(20, 20, 0)$.
La médiane CM est identique à la médiatrice issue de M : il s'agit donc, dans le plan OXY, d'une droite perpendiculaire à AB et donc, (comme AB est parallèle à OY), d'une parallèle à OX.
Donc, MC est une parallèle à OX.

Dans le triangle rectangle ACM, on a :

$$|MC| = \sqrt{|AC|^2 - |AM|^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17.3205 \qquad (16)$$

La coordonnée du point C est donc $(37.3205, 20, 0)$.

Le centre de gravité G se trouve aux $2/3$ de CM, comptés à partir de C ou, de façon équivalente, au $1/3$ de CM, compté à partir de M. Donc, l'abscisse de G vaut :

$$X_G = X_M + \frac{|CM|}{3} = 20 + \frac{17.3205}{3} = 25.7735 \qquad (17)$$

Par ailleurs, l'ordonnée de G est celle de M, soit 20. Le point G est la projection horizontale de D : donc, le triangle MGD est rectangle en G. Les deux triangles ABD et ABC sont équilatéraux et de mêmes longueurs des côtés = 20 : ils sont donc isométriques et, par suite, $|MD| = |MC| = 17.3205$.

Dans le triangle rectangle MGD :

$$|GD| = \sqrt{|MD|^2 - |MG|^2} = \sqrt{17.3205^2 - (\frac{17.3205}{3})^2} = 16.3299 \qquad (18)$$

Donc, les coordonnées de D sont :$(25.7735, 20, 16.3299)$.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ se calcule à partir de la surface de la base ABC et de la hauteur GD.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |MC| = \frac{1}{2}20 \cdot 17.3205 = 173.205 \qquad (19)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot |GD| = \frac{1}{3}173.205 \cdot 16.3299 = 942.807 \qquad (20)$$

Le 1 mars 2020

EXGSE149 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2014.

Considérons un cône équilatéral, c'est-à-dire dont une coupe par un plan médiateur est un triangle équilatéral de côté *c*. On demande de déterminer l'aire *A* de la surface de ce cône et son volume *V* en fonction de *c*.

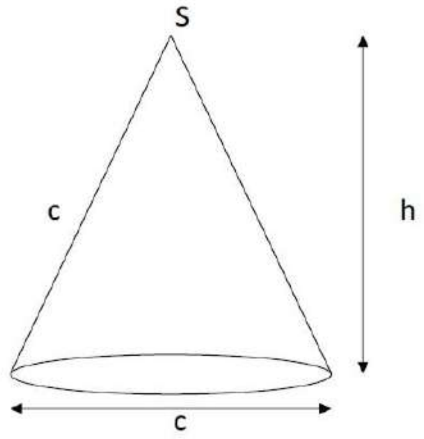
Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

La surface latérale du cône est développable selon un demi-disque de rayon c (distance c constante entre le sommet S du cône et périmètre de la base égale à πc). L'aire associée vaut donc $\pi c^2/2$. L'aire de la base vaut $\pi.c^2/4$ de sorte que l'aire totale $A = 3\pi c^2/4$.

Le volume V du cône est égal à $1/3\ \pi.c^2/4$ h, où la hauteur h du cône se déduit par Pythagore :

$$h = \sqrt{c^2 - c^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}c\,.$$

Finalement : $V = 1/24\ \pi c^3$.



Le 1 mars 2020