Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 14

EXGSE150 – EXGSE159

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

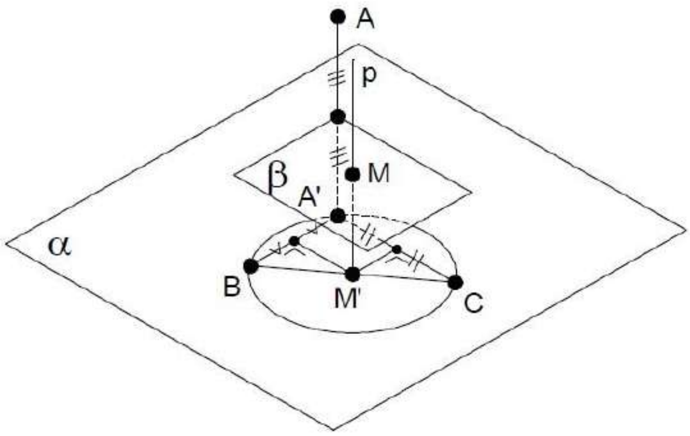
Mars 2020

EXGSE150 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Soit un plan α et 2 points B et C de ce plan ainsi qu'un point A, extérieur à ce plan.
On considère aussi le point A', la projection orthogonale de A sur le plan α.
Réaliser une figure et, par les méthodes de la géométrie synthétique, déterminer le centre M de la sphère passant par A, A', B et C.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Le centre M de la sphère est à l'intersection de la droite p, perpendiculaire au plan α et menée à partir du point M′, centre du cercle circonscrit au triangle A′BC (p est le lieu des points équidistants de A′, B et C) et du plan β, plan médiateur de AA′ (lieu des points équidistants de A et de A′).



Le 1 mars 2020

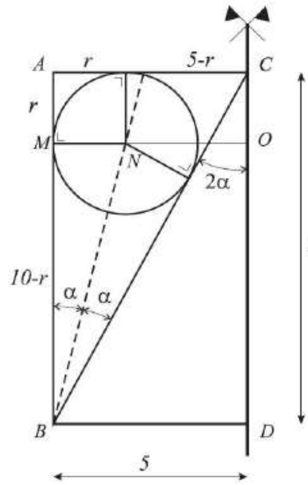
EXGSE151 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

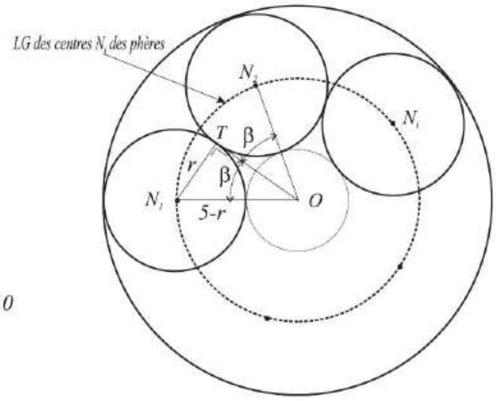
Soit un récipient cylindrique ($h = 10$ et $r = 5$) à l'intérieur duquel on vient déposer un cône de même hauteur et de même base que le cylindre. Le cône est déposé sur sa base. On demande:

1. Que vaut le diamètre d maximum de la sphère qu'il est possible d'insérer intégralement entre le cylindre et le cône? Faire un dessin.
2. Combien de ces sphères de diamètre d peut-on placer au maximum dans le cylindre contenant le cône?
3. Que vaut le volume intérieur résiduel du cylindre contenant le cône et le nombre maximum de sphères de rayon $d / 2$?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Dessin (2D)





$\therefore$ Toute sphère déposée dans le cylindre sera à la fois tangente au cône et au cylindre.

$\therefore$ Parmi celles-ci, la plus grande sphère est celle qui est en plus tangente à la base supérieure du cylindre.

2. Que vaut le diamètre d maximum de la sphère qu'il est possible d'insérer intégralement entre le cylindre et le cône ? Faire un dessin.

   BC est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ (à justifier).

   Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux (à justifier).
   Dans le triangle rectangle BDC :

   $tg(2\alpha) = 1/2 \Rightarrow \alpha = 13,3^\circ$

   Dans le triangle rectangle BMN :

$$\begin{aligned} tg(13,3) &= \frac{r}{10-r} \\ 0,236\,(10-r) &= r \\ r &= 1,909 \end{aligned}$$

   Combien de ces sphères de rayon $d/2$ peut-on placer au maximum dans le cylindre contenant le cône ? ... Voir ci-dessus la vue dans un plan orthogonal à l'axe du cylindre et passant par le centre C des sphères de diamètre max.

   Dans le triangle rectangle ON_1T (à justifier) :

$$\begin{aligned} sin(\beta) &= \frac{r}{5-r} \\ 2\beta &= 76,35^o \\ \Rightarrow \frac{360}{76,35} &= 4,71 \end{aligned}$$

   Il est donc possible de mettre au maximum 4 sphères de rayon $d/2$.

3. Que vaut le volume intérieur résiduel du cylindre contenant le cône et le nombre maximum de sphère de rayon $d/2$?

   On :

$$\begin{aligned} V_{residuel} &= V_{cyl} - V_{cone} - 5.V_{sphere} \\ &= \left(\pi.5^2.10\right) - \left(1/3.\pi.5^2.10\right) - 4.\left(4/3\pi 5^3\right) \end{aligned} \tag{3}$$

EXGSE152 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Considérons 4 billes identiques de rayon r.

Ces billes sont disposées dans l'espace de sorte à ce que chacune d'entre-elles soit en contact avec les 3 autres.

1. Représentez les billes.
2. Quelle forme géométrique obtient-on si on relie deux-à-deux les centres de ces billes ?
3. Exprimez le volume de cette forme en fonction de r

On choisit un repère orthonormé $Oxyz$ tel que :

- l'origine O est confondue avec le centre de gravité d'une des faces de la forme
- l'axe x est parallèle a l'un des cotés de cette face
- l'axe z est perpendiculaire à cette face

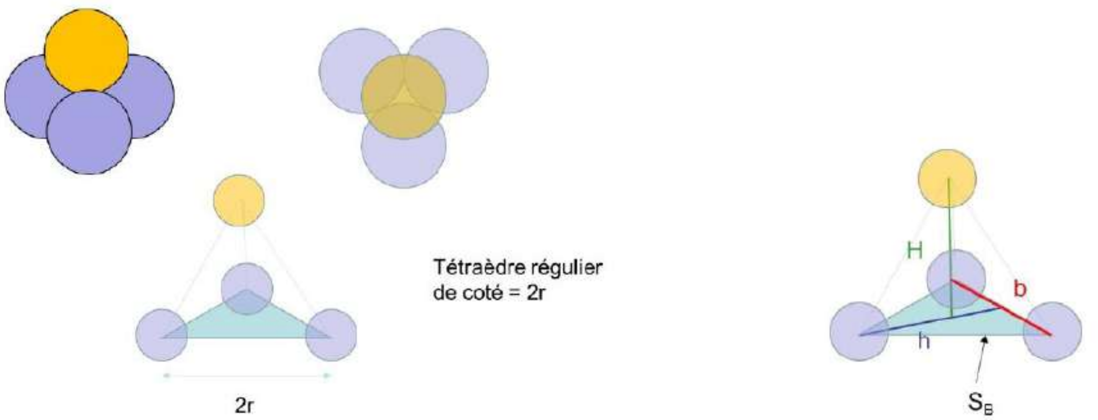
4. En prenant $r = 1$, déterminez les équations cartésiennes des sphères tangentes extérieure et intérieure aux 4 billes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Considérerons 4 billes identiques de rayon r.

Ces billes sont disposées dans l'espace de sorte à ce que chacune d'entre elles soit en contact avec les 3 autres.

1. Représentez les billes.
2. Quelle forme géométrique obtient-on si on relie deux-à-deux les centres de ces billes ?



3. Exprimez le volume de cette forme en fonction de r

$V = 1/3\ S_B.H$ avec $S_B = 1/2\ b.h$

$V = 1/6\ b.h.H$

$b = 2r$

$h^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$

$h = r\sqrt{3}$

$H^2 = (2r)^2 - (2/3h)^2 = 4r^2 - (4/9)3r^2$

$H^2 = 8/3r^2$

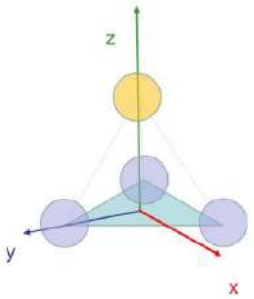
$H = r\ \sqrt{(8/3)}$

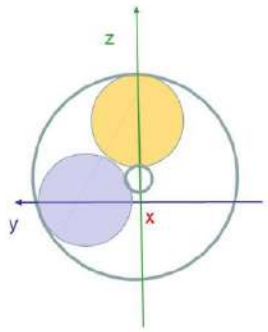
$V = 1/3\ r^3\ \sqrt{8}$

On choisit un repère orthonormé Oxyz tel que :

- l'origine O est confondue avec le centre de gravité d'une des faces de la forme
- L'axe x est parallèle à l'un des coté de cette face
- L'axe z est perpendiculaire à cette face

4. En prenant r = 1, Déterminez les équations cartésiennes des sphères tangentes extérieure et intérieure aux 4 billes.





Rayon de la sphère extérieure :

$R = ¾\ H + r$

$R = ¾\ r\ \sqrt{(8/3)} + r$

$R = r\ (\sqrt{(3/2)} + 1)$

Coordonnées du centre de la sphère :

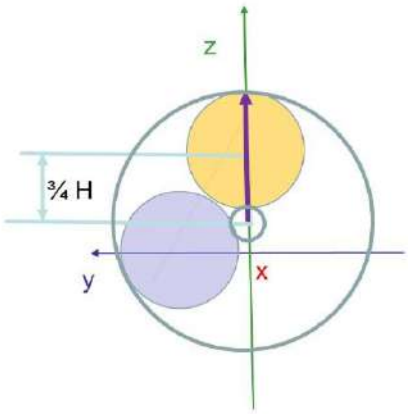
Centre de gravité du tétraèdre

$x_S = 0$

$y_S = 0$

$z_S = ¼\ H = ¼\ r\ \sqrt{(8/3)} = r\ \sqrt{(1/6)}$

$x^2 + y^2 + (z - r\ \sqrt{(1/6)}\ )^2 = r^2\ (\sqrt{(3/2)} + 1)^2$



Rayon de la sphère intérieure :

$R = \frac{3}{4} H - r$

$R = \frac{3}{4} r \sqrt{(8/3)} - r$

$R = r (\sqrt{(3/2)} - 1)$

Coordonnées du centre de la sphère :

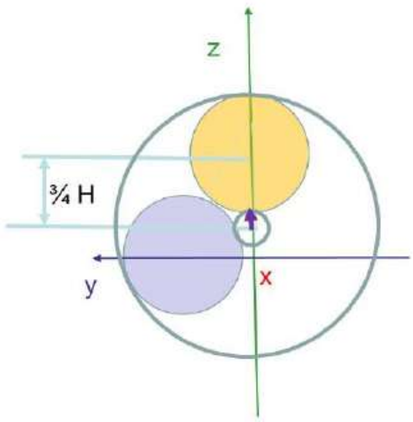
Centre de gravité du tétraèdre

$x_S = 0$

$y_S = 0$

$z_S = \frac{1}{4} H = \frac{1}{4} r \sqrt{(8/3)} = r \sqrt{(1/6)}$

$x^2 + y^2 + (z - r \sqrt{(1/6)})^2 = r^2 (\sqrt{(3/2)} - 1)^2$



Le 1 mars 2020

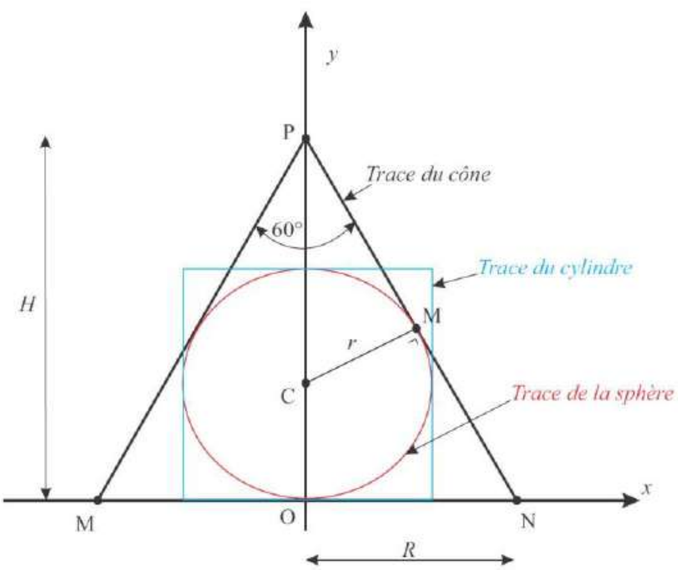
EXGSE153 – Polytech, UMons, Mons, 2017.

Soit V_1 le volume d'un cône de hauteur H et de rayon R dont l'angle au sommet vaut 60°. Soit V_2 le volume de la sphère de rayon r inscrite au cône. Elle est à la fois tangente à la surface latérale du cône et à sa base. Soit V_3 le volume du plus petit cylindre circonscrit à la sphère. On demande:

- Faire un dessin.
- Démontrez que le produit du volume du cône et de la sphère est égal au carré du volume du cylindre.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. ***Faire un dessin.***
   L'angle au sommet du cône valant 60°, on remarque que le triangle PMN, trace du cône dans le plan xy, est équilatéral.



2. ***Démontrer que "le produit du volume du cône et de la sphère est égal au carré du volume du cylindre", soit :***

$$V_1\ V_2 = V_3^2 \tag{6}$$

Ce qui peut se réécrire comme suit :

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_3}{V_2} \tag{7}$$

Compte tenu des contraintes géométriques énoncées, ces 3 volumes sont liés... on peut par exemple les exprimer tous en fonction d'une seule grandeur r.

(a) Volume V_2 de la sphère : $\frac{4}{3}\pi r^3$

(b) Volume V_3 du cylindre de hauteur $2.r$: $\pi.r^2.2.r$=$2.\pi.r^3$

(c) Volume V_1 du cône : $\frac{1}{3}.\pi.R^2.H$

Expression de H en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle CMP et l'angle $\widehat{CPM}$= 30 °

$\Longrightarrow \frac{CM}{PC} = sin\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow PC = 2.r \Longrightarrow H = PC + r = 3.r$

Expression de R en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle NCO et l'angle $\widehat{CNO}$= 30 °

$\Longrightarrow tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{R} \Longrightarrow R = \frac{3.r}{\sqrt{3}}$

On a peut réécrire la thèse comme suit :

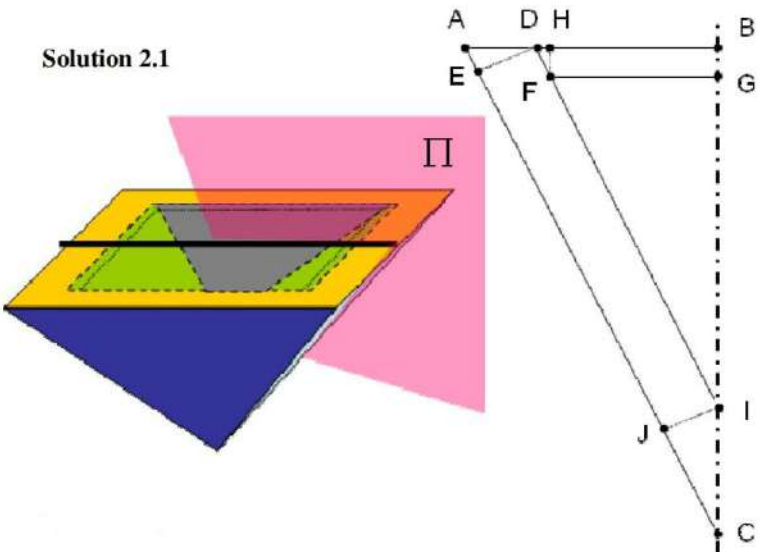
$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.3.r^2.3.r}{2.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad ? =? \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{2.\pi.r^3}{\frac{4}{3}.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow OK$$

EXGSE154 – Polytech, UMons, Mons, 2017.

Dans le processus de fabrication des figurines en chocolat, on utilise un récipient pyramidal (pointe en bas) à base carrée et parois épaisses pour maintenir le chocolat fondu à bonne température avant de le couler dans les moules. La pointe de la pyramide se trouve sur la normale passant par le centre de gravité de la base, et se trouve sous celle-ci.
La surface extérieure du conteneur est une pyramide dont l'arête de la base vaut 50 cm et dont la hauteur vaut 43,3 cm.

1. Sachant que les parois ont une épaisseur de 5 cm et que le récipient est rempli jusqu'à 2 centimètres du bord supérieur, calculer le volume de chocolat dans le récipient. Tracez pour cela la coupe du récipient par un plan vertical.
2. Quelle hauteur de chocolat fondu le pâtissier doit-il y prévoir pour remplir 63 moules hémisphériques de rayon valant 3 cm?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf



Solution 2.2

AB vaut 25 cm par définition de la médiane d'un carré
BC vaut 43,3 cm par énoncé
Angle BAC = atan (43,3 / 25) = 60° dans triangle ABC rectangle
AD = 5 / sin(60°) = 5,77 cm dans triangle ADE rectangle où DE vaut 5 cm par énoncé
BD vaut donc 25 – 5,77 = 19,23 cm.
HD = 2 * tan (30°) = 1,16 cm dans triangle DFH rectangle
FG vaut donc 19,23 – 1,16 = 18,07 cm soit une **arête de base interne valant 36,14 cm**

IC = 5/sin(30°) = 10 cm dans triangle ICJ rectangle où IJ = 5 cm par énoncé
IG vaut donc 43,3 – 10 – 2 = 31,3 cm soit une **hauteur interne de 31,3 cm**

Solution 2.3

Volume d'une demi-sphère = 0,5 4/3 π 3^3 = 56,5 cm^3
Volume de 63 demi-sphères = 3559,5 cm^3

Volume de la pyramide intérieure = $36{,}14^2$ x 31,3 / 3 = 13627 cm^3 donc la hauteur de chocolat nécessaire sera plus petite que la hauteur maximale de chocolat.

Volume de la pyramide intérieure à hauteur variable x
Hauteur = x
Arête = 2 x tan(30°)
Volume = 1/3 x (2 x tan(30°))²

Pour que volume = 3559,5 cm^3, il faut **hauteur = 20 cm**

Le 1 mars 2020

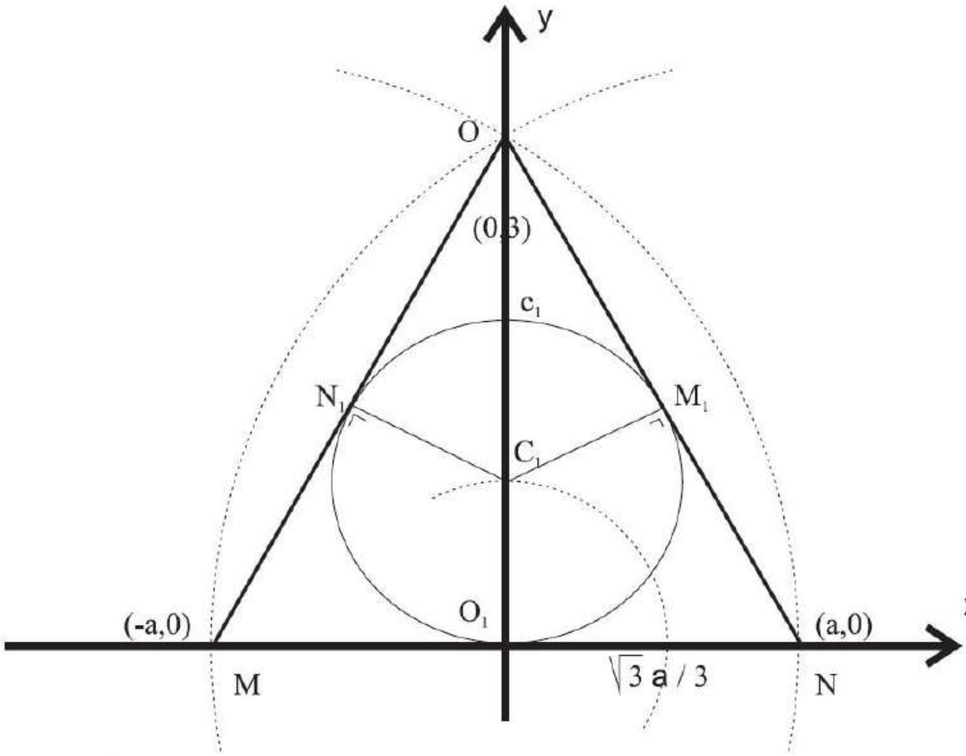
EXGSE155 - Polytech, UMons, Mons, 2014.

Soit dans un repère orthonormè les points $M(-a,\ 0)$ et $N(a,0)$ et un point O d'ordonnée positive équidistant de $2.a$ de M et N. Soit la circonférence c_1 tangente aux droites OM et ON et centrée en $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}.a\right)$. On demande, par la géométrie synthétique:

1. Faire un dessin.
2. Quelle propriété remarquable à la circonférence $c1$ par rapport au triangle ONM ? Démontrer la.
3. Soit V_1 le volume du cône engendré par la rotation du triangle ONM autour de l'axe y et soit R et H respectivement le rayon de sa base et sa hauteur. Soit V_2 le volume de la sphère engendrée par la rotation de c_1 autour de l'axe y et soit r son rayon
   (a) Démontrez la relation suivante:
   $$\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}=\frac{2}{r.H} \qquad (1)$$
   (b) Réécrivez la relation (1) ci-dessus en fonction du seul paramètre a.
4. Si V_3 est le volume engendré par la rotation autour de y d'un carré circonscrit à c_1 et admettant l'axe y pour médiane:
   (a) Quel type de volume est le volume V_3 ?
   (b) Démontrer la relation suivante:
   $$\frac{V_1}{V_3}=\frac{V_3}{V_2} \qquad (2)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Dessin



Dessin : il est à noter que :

$\therefore$ Le triangle MNO est équilatéral (de coté $2a$).
$\therefore$ Le cercle c_1 semble être inscrit au triangle MNO (à justifier)
$\therefore$ $\sqrt{3}/3 \simeq 0,6$

2. Quelle propriété remarquable a la circonférence c_1 par rapport au triangle ONM ? Démontrez la.

   c_1 est inscrit au triangle MNO ? Si tel est le cas, alors : $|C_1N_1| = |C_1O_1| = |C_1M_1|$

   or $|C_1O_1| = \sqrt{3}/3\ a$

   Que vaut $|C_1M_1|$? Les triangles OC_1M1 et OO_1N sont semblables :

$$\frac{C_1M_1}{O_1N} = \frac{C_1O}{ON}$$

$$\frac{C_1M_1}{a} = \frac{OO_1 - \sqrt{3.a}/3}{2a}$$

   or triangle OO_1N rectangle $\Rightarrow 4a^2 = OO_1^2 + a^2 \Rightarrow OO_1 = \sqrt{3}.a$ Nous avons donc :

$$
\begin{aligned}
C_1M_1 &= \frac{a}{2a}.\left(\sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}a}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}.\left(\frac{3\sqrt{3}a - \sqrt{3}a}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2.3}\sqrt{3}.a.(3-1) \\
&= \frac{\sqrt{3}.a.2}{2.3} \\
&= \frac{\sqrt{3}.a}{3} \\
&= C_1O_1 = C_1N_1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$\Rightarrow c_1$ est le cercle inscrit au triangle MNO.

Variante : Vu que le triangle OMN est équilatéral (angles aux sommets tous égaux à 60°) et que $\sqrt{3}/3$ correspond à $tg30^\circ$, on voit alors que C_1M et C_1N sont des bissectrices.

3. Soit V_1 le volume du cône engendré par la rotation du triangle ONM autour de l'axe y et soit R et H respectivement le rayon de sa base et sa hauteur. Soit V_2 le volume de la sphère engendrée par la rotation de c_1 autour de l'axe y et soit r son rayon.

   (a) Démontrer la relation suivantes :

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{2}{r.H}$$

On raisonne dans le plan du dessin :

Tjs grâce aux triangles semblables OC_1M_1 et OO_1N on a :

$$\frac{r}{R} = \frac{C_1O}{ON} = \frac{OM_1}{H}$$

$$\Rightarrow R = \frac{r.H}{OM_1}$$

On peut dès lors réécrire la thèse comme suit :

$$\frac{1}{r^2} - \frac{OM_1^2}{r^2H^2} = \frac{2}{r.H} \tag{13}$$

$$\frac{H^2 - OM_1^2}{r^2H^2} = \frac{2}{r.H} \tag{14}$$

5

Il faut maintenant exprimer OM_1 en fct de r et de H

Soit le triangle rectangle OC_1M_1 :

$$\begin{aligned} OM_1^2 &= OC_1^2 - C_1M_1^2 \\ &= (H-r)^2 - r^2 \\ &= H^2 - 2Hr + r^2 - r^2 \end{aligned}$$

En remplaçant dans 14 :

$$\begin{aligned} \frac{H^2 - H^2 + 2.H.r}{r^2.H^2} &= \frac{2}{r.H} \\ \frac{2.r.H}{r^2.H^2} &= \frac{2}{r.H} \\ \frac{2}{r.H} &= \frac{2}{r.H} \qquad CQFD \end{aligned}$$

(b) Réécrivez la relation (1) en fonction du seul paramètre a...avec notamment le triangle rectangle OO_1N :

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}.a}{3}\right)^2} - \frac{1}{(a)^2} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}.a}{3}.\left(\sqrt{3}.a\right)} \tag{15}$$

4. Si V_3 est le volume engendré par la rotation autour de y d'un carré circonscrit à c_1 et admettant l'axe y pour médiane :

   (a) Quel type de volume est le volume V_3 ? ***C'est un cylindre.***

   (b) Démontrer la relation suivantes :

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_3}{V_2} \tag{16}$$

Ces 3 volumes sont liés... on peut par exemple les exprimer tous en fonction d'une seule grandeur r.

i. Volume V_2 de la sphère : $\frac{4}{3}\pi r^3$
ii. Volume V_3 du cylindre de hauteur $2.r$: $\pi.r^2.2.r$=$2.\pi.r^3$
iii. Volume V_1 du cône : $\frac{1}{3}.\pi.R^2.H$

Expression de H en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle C_1M_1O et l'angle $\widehat{C_1OM_1}= 30\,^{\circ}$

$\Longrightarrow \frac{C_1M_1}{OC_1} = sin\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow OC_1 = 2.r \Longrightarrow H = OC_1 + r = 3.r$

Expression de R en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle NC_1O_1 et l'angle $\widehat{C_1NO_1}= 30\,^{\circ}$

$\Longrightarrow tg30 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{R} \Longrightarrow R = \frac{3.r}{\sqrt{3}}$

On a peut réécrire la thèse comme suit :

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.3.r^2.3.r}{2.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad ?=? \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{2.\pi.r^3}{\frac{4}{3}.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow OK$$

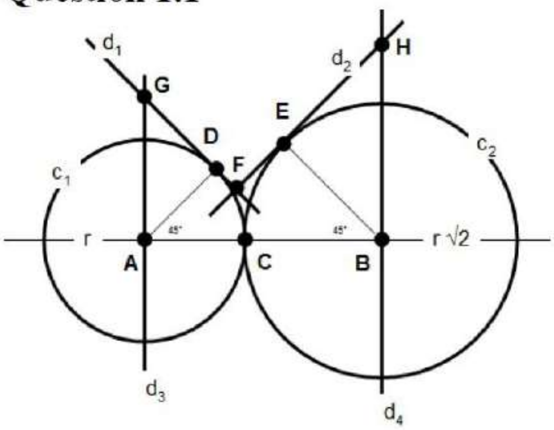
EXGSE156 - Polytech, UMons, Mons, 2014.

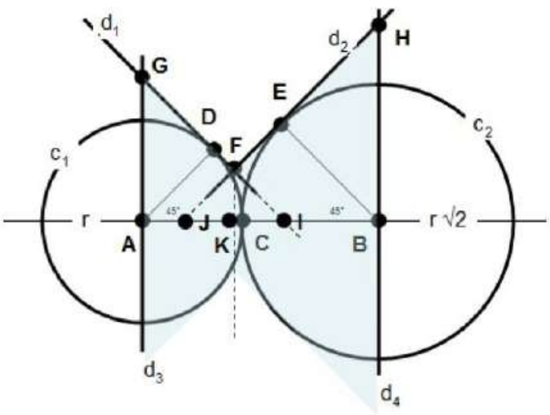
Soient 2 circonférences: c_1 de centre A et rayon r et c_2 de centre B et rayon $\sqrt{2}r$ tangentes en C. Soit D le point de c_1 tel que l'angle DAB vaut 45°. Soit E le point de c_2 tel que l'angle ABE vaut 45°. Soient d_1 la droite tangente à c_1 en D et d_2 la droite tangente à c_2 en E. Soit F l'intersection entre d_1 et d_2. Soient d_3 la droite perpendiculaire à AB passant par A et d_4 la droite perpendiculaire à AB passant par B. Soit G l'intersection entre d_1 et d_3. Soit H l'intersection entre d_2 et d_4

1. On demande de tracer un schéma illustrant la configuration
2. On demande de déterminer l'expression du volume du « diabolo » obtenu par révolution de la ligne brisée $AGFHB$ autour de la droite AB.
3. Pour le cas particulier où r vaut 5m, que vaut ce volume?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Question 1.1





Question 1.2 Il s'agit de deux troncs de cône.

Angle FAG vaut 45° car **complémentaire** de angle BAD connu. Triangle DGA est rectangle en D par définition de la **tangente à un cercle**. AG est l'**hypoténuse** de ce triangle et sa longueur vaut AD/sin45 soit r/sin45 soit $r\sqrt{2}$ … c'est la base du premier cône

Angle AGD vaut 45° car dans triangle FGA la **somme des angles vaut 180**°. Triangle IGA est rectangle en A par énoncé et angle AIG vaut donc 45° et triangle IGA est donc **isocèle.** AI est un des deux côtés du triangle isocèle donc AI vaut AG soit $r\sqrt{2}$ … c'est la hauteur du premier cône

Similairement, BH vaut r.2 … c'est la base du second cône et BJ vaut r.2 … c'est la base du second cône

Il reste à trouver le point où nos cônes se trouvent limités par interpénétration.

Le triangle JIF possède deux angles à 45°. Il est donc **isocèle** et JF vaut IF. AB vaut $(r+ r\sqrt{2})$ par définition de la **tangence entre cercles**.
AJ vaut AB-BJ soit $(r+ r\sqrt{2}) - (2.r)$ soit $r.(\sqrt{2}-1)$
BI vaut AB-AI soit $(r+ r\sqrt{2}) - (r\sqrt{2})$ soit r
IJ vaut AB-AJ-BI soit $(r+ r\sqrt{2}) - r.(\sqrt{2}-1) - r$ soit r
JK vaut KI par définition de la hauteur dans un triangle isocèle soit JK=KI=r/2

Le volume du diabolo vaut la somme des 2 grands cônes dont on soustrait deux fois le même petit cône.
$\pi/3.\ (r\sqrt{2})^2 .\ r\sqrt{2}\ + \pi/3.\ (r.2)^2 .\ r.2 - 2.\ \pi/3.\ (r/2)^2 .\ r/2$
DONC $\pi/3.\ [(r^2.2) .\ r\sqrt{2}\ + (r^2.4) .\ r.2 - 2.\ (r^2/4) .\ r/2]$
OU $\pi/3.\ [r^3.2\sqrt{2}\ + r^3.8 - r^3/4\ ]$ OU $\underline{\boldsymbol{\pi/3.r^3.[2\sqrt{2}\ + 8 - 1/4\ ]}}$ OU $\pi/3.r^3.10{,}578$

Question 1.3 $\pi/3.5^3.[2\sqrt{2}\ + 8 - 1/4\ ] = 1384{,}71\ m^3$

Le 10 mars 2020

EXGSE157 - Polytech, UMons, Mons, 2014.

Soit une sphère de rayon R et de centre O. On considère 6 points sur cette sphère (notés $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ et A_6), positionnés de telle sorte qu'ils forment les sommets d'un octaèdre régulier.

– Exprimez en fonction de R la longueur a des côtés de cet octaèdre.

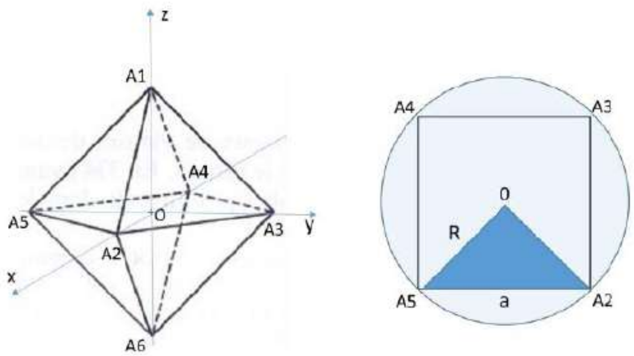
– Exprimez la distance d séparant le centre de la sphère de chaque face de l'octaèdre.

Dans un repère orthonormé $Oxyz$ tel que les axes Ox, Oy et Oz passent par les sommets de l'octaèdre, exprimez :

– L'équation cartésienne d'une face de l'octaèdre.

– Les équations paramétriques d'un côté de l'octaèdre.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

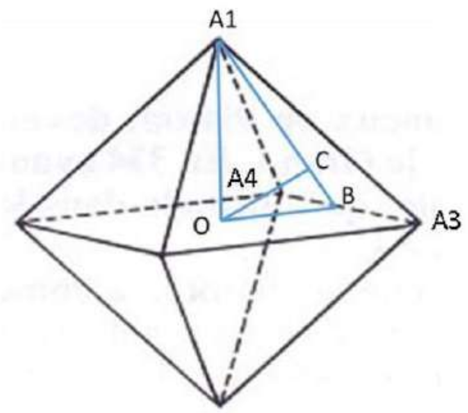


Dans le triangle rectangle A_5OA_2 : **$a = R\sqrt{2}$**

Exprimez la distance **d** séparant le centre de la sphère de chaque face de l'octaèdre.

Soit la face **$A_1A_3A_4$**, la distance **d** correspond à la hauteur issue de **O** du tétraèdre **$OA_1A_3A_4$**

La base **$A_1A_3A_4$** de ce tétraèdre est un triangle isocèle. Le point **C**, pied de la hauteur issue de **O**, est sur la médiatrice **BA_1** du coté **A_3A_4**.



Le triangle A_1OB rectangle en **O**.

Les côtés du triangle A_1OB sont : $A_1O = R$; $OB = a/2 = R/\sqrt{2}$; $BA_1 = (R^2+R^2/2)^{0.5} = R\sqrt{3}/\sqrt{2}$

La surface du triangle : $2S = A_1O \times OB = R^2/\sqrt{2}$

En faisant intervenir $d = OC$: $2S = A_1B \times OC = dR\sqrt{3}/\sqrt{2}$

Donc : $d = R/\sqrt{3}$

L'équation cartésienne d'une face de l'octaèdre.

La face $A_1A_2A_3$ coupe les axes en $x_I = R$, $y_I = R$ et $z_I = R$

L'équation cartésienne du plan est : $x + y + z = R$

Les équations paramétriques d'un côté de l'octaèdre.

Le coté A_5A_2 a pour vecteur directeur **(1 ; 1 ; 0)** et passe par le point A_2 de coordonnées **(R ; 0 ; 0)**.

$x = R + \lambda$

$y = 0 + \lambda$

$z = 0$

Le 10 mars 2020

EXGSE158 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2014.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Le 1 mars 2020

EXGSE159 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2014.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

---

Le 1 mars 2020

8

8