Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 2

EXGSE020 – EXGSE029

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGSE020 – Mons, questions-types 2000-2001.

Construire une sphère passant par quatre points non colinéaires.

On choisit trois couples de points.
Chaque couple définit une droite.
Chaque droite définit un plan médiateur.
Les trois plans médiateurs se coupent un point qui est le centre de la sphère.

EXGSE021 – Mons, questions-types 2000-2001.

Par une droite d donnée, construire un plan tangent à une sphère donnée.

a) La droite est sécante à la sphère. Dans ce cas le plan tangent est imaginaire.

b) La droite est tangente à la sphère au point A.
Soit la droite p qui joint le centre de la sphère au point de tangence A.
Le plan perpendiculaire à la droite p au point A est le plan cherché.

c) La droite est extérieure à la sphère.
Par le centre de la sphère, on construit le plan a perpendiculaire à la droite.
Le point de percée de la droite dans le plan a définit le point A.
L'intersection du plan a et de la sphère est un cercle.
Dans le plan a, on trace les tangences x et y au cercle, issues de A. (Il suffit de tracer le cercle dont le diamètre AO avec O centre de la sphère.)
Les deux plans tangents sont définis par dx et dy.

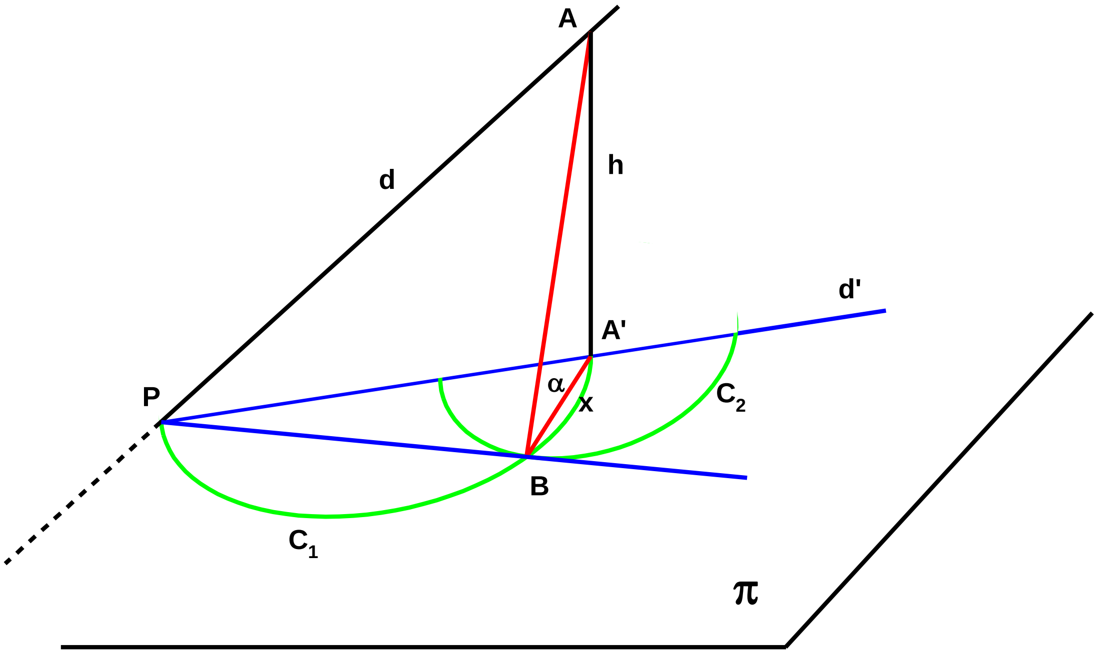
EXGSE022 - Mons, questions-types 2000-2001.

Démontrer que le plan défini par une arête et le milieu de l'arête opposée d'un tétraèdre quelconque divise ce volume en deux tétraèdres équivalents.

Le plan détermine avec la base du tétraèdre une médiane.
Un triangle est divisé par une médiane en deux triangles de surface égale. (Les bases sont égales et la hauteur est la même).
Le deux tétraèdres ont donc même volume puisque l'aire des bases est égale et que la hauteur (dans le sens vertical) est la même.

EXGSE023 – Mons, questions-types 2000-2001.

Construire un dièdre connaissant l'angle de son rectiligne, une de ses faces et une droite quelconque appartenant à l'autre face.



Soit π, la face du diédre. La droite donnée d perce π en P

Soit A' la projection orthogonale de A, point quelconque de la droite d.

Soit $|AA'| = h$

Construisons C_1 *dans le plan π, le cercle de diamètre PA'.*

Construisons le cercle C_2 *de rayon* $x = \dfrac{h}{\tan\alpha}$ *où α est le rectiligne.*

Soit $B \equiv C_1 \cap C_2$

On vérifie que A' B est perpendiculaire à PB,

que AA' est orthogonal à PB

$\rightarrow$ *le plan AA' B est perpendiculaire à PB*

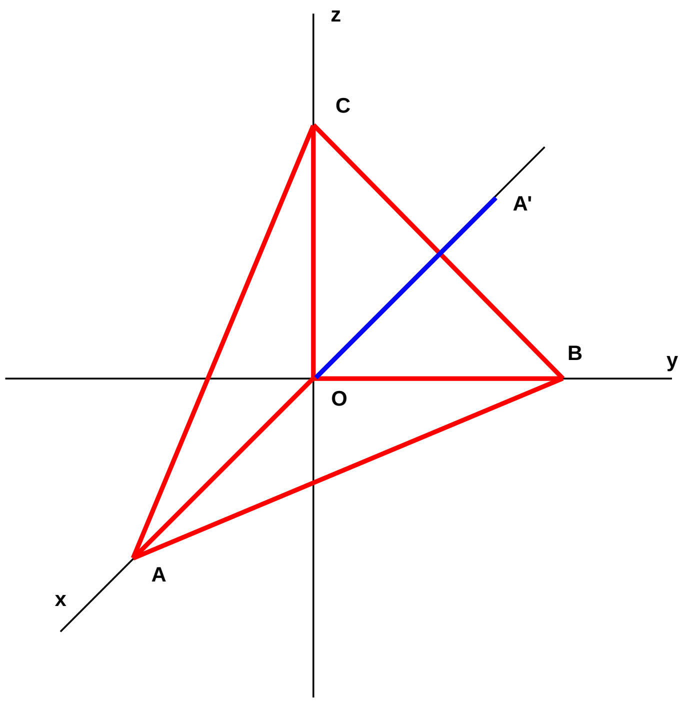
le plan AA' B est perpendiculaire au plan π et au plan ABP

Les plans π et ABP forment le dièdre cherché.

Son rectiligne est égale à : $\alpha = \operatorname{arc}\tan\dfrac{h}{x}$

EXGSE024 – Mons, questions-types 2000-2001.

Montrer que le produit des symétries autour des arêtes d'un trièdre trirectangle est la transformation identique.



Soit le tétraèdre $OABC$. Inscrivons le dans un système d'axe xyz ortogonal.

Soit A' l'image de A obtenue par la symétrie ayant y pour axe S_y.

On note : $A' = S_y A.$

On a : $A' = S_x A$ et $A = S_z A'$

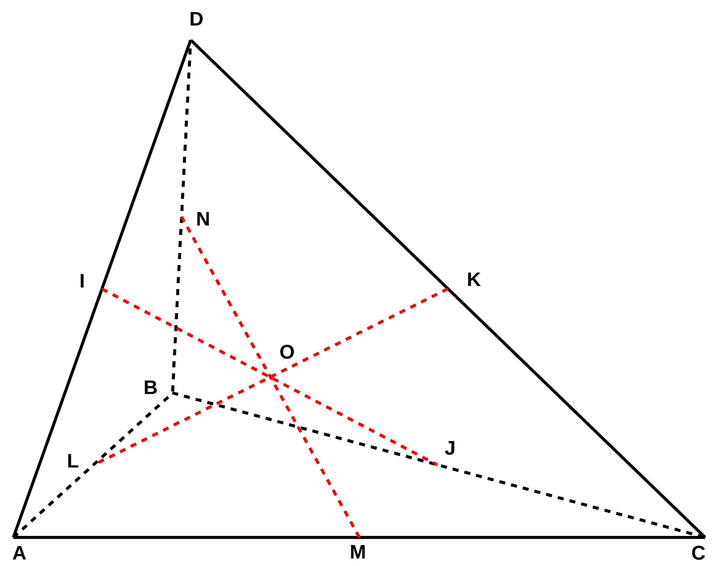
Donc $A = S_x\ S_y\ S_z\ A$

On peut appliquer le même raisonnement aux autres sommets.

$\rightarrow$ OABC=S_x S_y S_z OABC

EXGSE025 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit un tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales.
Démontrer que les droites qui joignent les milieux de ces arêtes forment des couples d'arêtes égales se coupant en un seul point commun, et que ces droites forment dans l'espace un trièdre trirectangle.



$$a)\quad \left.\begin{array}{l} IN \;//\; AB \text{ et } IN = \dfrac{AB}{2} \\ MJ \;//\; AB \text{ et } MJ = \dfrac{AB}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \; IN = MJ \;\; et \;\; IN \;//\; MJ$$

Même raisonnement pour démontrer que

$NK = LM$ et $NK \;//\; LM$

$IL = KJ$ et $IL \;//\; KJ$

On en déduit que $INMJ$, $ILJK$ et $IKJL$ sont trois parallélogrammes dont les diagonales se coupent en un point commun O.

b) $NK = BJ = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2} = ID = KM = NL = LM$........etc.

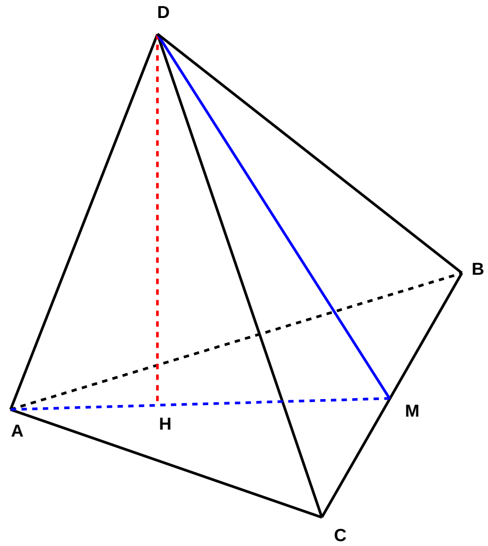
Par conséquent, les parallélogrammes sont des carrés.

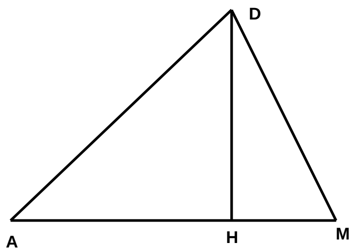
Or les diagonales d'un carré se coupent à angle droit

$\rightarrow$ IJ, LK et MN forment un trièdre trirectangle.

EXGSE026 – Mons, questions-types 2000-2001.

Calculer l'aire totale et le volume d'un tétraèdre régulier connaissant le rayon R de la sphère qui lui est circonscrite.





Tétraèdre régulier $\Rightarrow$ Tous les côtés sont égaux à c.

ABC est un triangle équilatéral

Base : $B = c$

Hauteur : $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

Aire : $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$

Calculons la hauteur DH du tétraèdre, en travaillant dans le plan ADM.

Compte tenu que $AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ et que $AD = c$

$$\begin{cases} DH^2 = \frac{3}{4}c^2 - HM^2 \\ DH^2 = c^2 - AH^2 \\ HM = \frac{\sqrt{3}}{2}c - AH \end{cases} \rightarrow \left(-\frac{3}{4}+1\right)c^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c - AH\right)^2 - AH^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad AH = \frac{\sqrt{3}}{3}c \quad \text{et} \quad DH = \sqrt{\frac{2}{3}}\,c$$

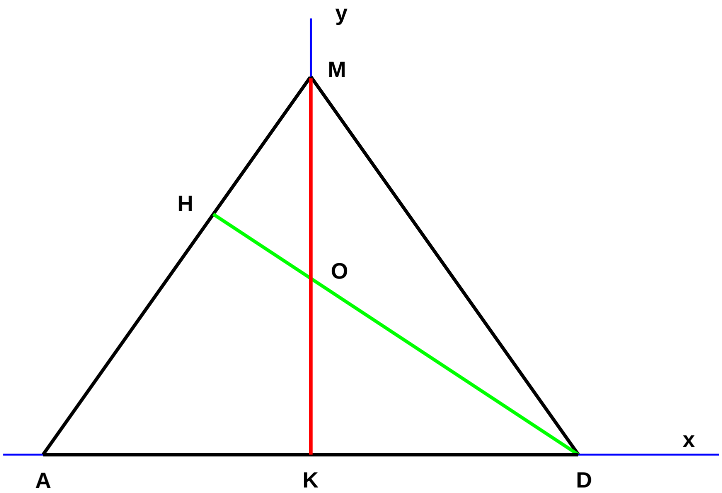
Le volume du tétraèdre est donc :

$$V = \frac{1}{3}\,\text{Base}\,.\,\text{Hauteur} = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,c$$

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{12}c^3}$$

Aire latérale

$$A_L = 4\,.\,\text{Base} \quad \rightarrow \boxed{A_L = \sqrt{3}\,c^2}$$



Il nous suffit maintenant d'établir une relation entre le rayon R de la sphère circonscrite et c.
Sachant que R est égale à la distance de l'orthocentre du tétraèdre à un des sommets, reprenons le triangle ADM, et plaçons le dans un système de coordonnées cartésiennes.

Les coordonnées sont :

$$M:\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad A:\left(-\frac{c}{2}, 0\right) \quad K:(0,0) \quad D:\left(\frac{c}{2}, 0\right)$$

L'orthocentre O est déterminé par l'intersection des deux hauteurs KM et HD.
Donc O est l'ordonnée à l'origine de la droite HD qui est perpendiculaire à AM.

Coefficient angulaire de AM : $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}c}{\frac{c}{2}} = \sqrt{2}$

Coefficient angulaire de HD : $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ordonnée à l'origine de HD : $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + p \quad \rightarrow \quad p = \dfrac{\sqrt{2}}{4}c$

D'où le rayon cherché $R = OB$

$$OB^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{16}c^2 \quad \rightarrow \quad R = c\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ ou bien } c = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

On en déduit que

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^3 \quad \rightarrow \quad \boxed{V = \sqrt{3}\left(\frac{2R}{3}\right)^3}$$

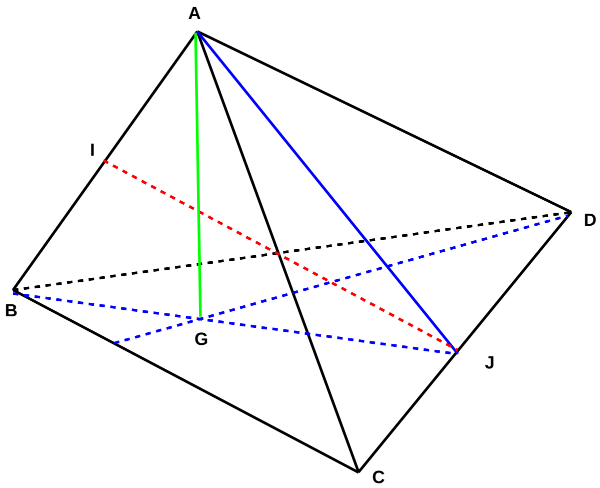
et l'aire latérale :

$$\boxed{A_L = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2}$$

EXGSE027W.

Soit ABCD un tétraèdre régulier (Les 6 arêtes sont égales et valent c).
On demande

a) De démontrer que AB est orthogonal à CD
b) De démontrer que la droite IJ, qui joint les milieux des côtés AB et CD est perpendiculaire à AB et CD.
c) Calculer la hauteur du tétraèdre en fonction de c.



$a)$ <u>Première méthode</u> : Toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Traçons les hauteurs AJ et BJ.

Plan $BJA \perp CD \quad \rightarrow AB \perp CD \quad (\text{car } AB \in \text{plan } BJA)$

<u>Deuxième méthode</u> : On calcule le produit scalaire.

$$\mathbf{AB} \, . \, \mathbf{CD} = \mathbf{AB}\,(\mathbf{AD}\text{-}\mathbf{AC}) = |c|\,|c| \cos 60 - |c|\,|c| \cos 60 = 0$$

$b)$ <u>Première méthode</u> : Comme IJ appartient au plan DIC, $IJ \perp AB$

<u>Deuxième méthode</u> :

$$\mathbf{IJ} = \frac{1}{2}\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \frac{1}{2}\mathbf{CD}$$

$$\mathbf{IJ}\ \mathbf{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}\ \mathbf{AB} + \mathbf{BC}\ \mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{CD}\ \mathbf{AB} = \frac{1}{2}c^2 - c^2 \cos 60 + 0 = 0$$

c) La hauteur h d'un triangle équilatéral vaut $\frac{1}{2} c \sqrt{3}$ $\left(\text{car } h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4}\right)$.

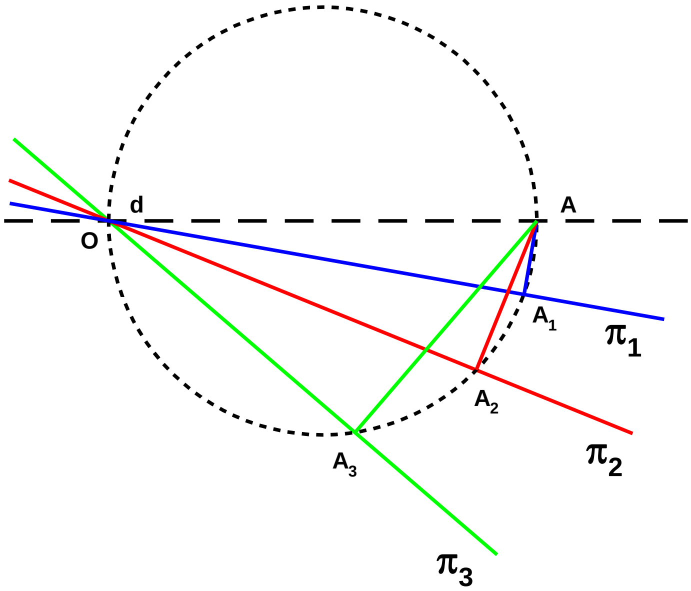
Par ailleurs, la hauteur du tétraèdre est liée à l'arête c et à la hauteur h par la relation

$$h_{tet}^2 = c^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{6c^2}{9} \quad \rightarrow \quad h_{tet} = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightleftharpoons c$$

Voir aussi : EXGSE026.

EXGSE028 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une droite d et un point A extérieur à d.
Quel est le lieu des projections orthogonales de A sur les plans contenant d.



Dans la figure la droite d est perpendiculaire au plan de la feuille.
Les plans passant par d sont vus de profil.

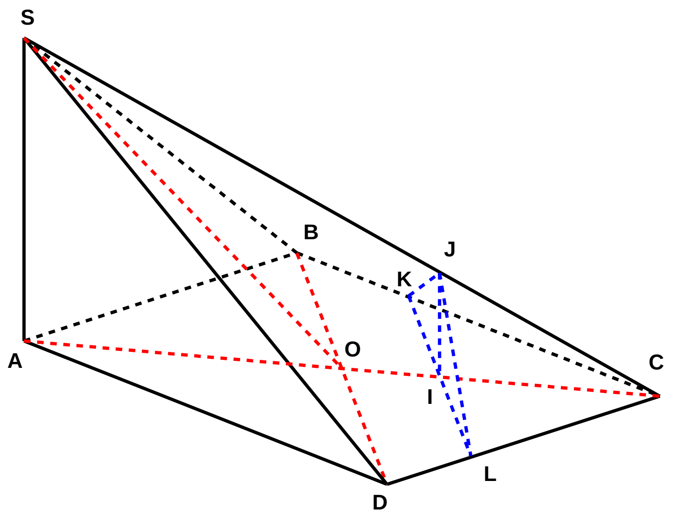
Soit le plan perpendiculaire à d passant par A.
Soit O le point de percée de la droite d dans ce plan.

Soient A_1, A_2, A_3 ...les projections de A sur les plans π_1, π_2, π_3,....
Les droites AA_1, AA_2, AA_3.... sont toutes contenues dans ce plan

Par conséquent, il est immédiat que le lieu recherché est
le cercle de diamètre OA et contenu dans le plan perpendiculaire à la droite d et passant par A.

EXGSE029 – Mons, questions-types 2000-2001.

On considère une pyramide SABCD.
La base ABCD est carrée et la longueur de côté L. Le sommet S est situé sur la perpendiculaire menée de A au plan ABCD.
La distance entre S et A est égale à √2. L.
On appelle O le centre de gravité du carré ABCD.
Démontrer que DS est orthogonal à CD.
Par un point quelconque I de OC, on mène un plan perpendiculaire à la diagonale AC.
Démontrer que les droites d'intersection de ce plan perpendiculaire à AC avec les faces SDC et SCB de la pyramide ne sont pas parallèles respectivement à SD et SB.



$a)$ $SA \perp$ plan $ABCD$ $\rightarrow$ plan $SAD \perp$ plan $ABCD$
$\rightarrow$ plan $SAD \perp DC$ $\rightarrow$ SD orthogonal à DC

b) plan KJL // SA

Le rectiligne du dièdre formé par les plans ABD et SBD est l'angle $\widehat{SOA}$
qui est inférieur à 90° puisque $\widehat{SAO} = 90°$.
Le plan SBD n'est donc pas parallèle au plan KJL.
$\rightarrow$ SB et SD sont gauches avec KJ et JL.