Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 3

EXGSE030 – EXGSE039

http://www.matheux.c.la

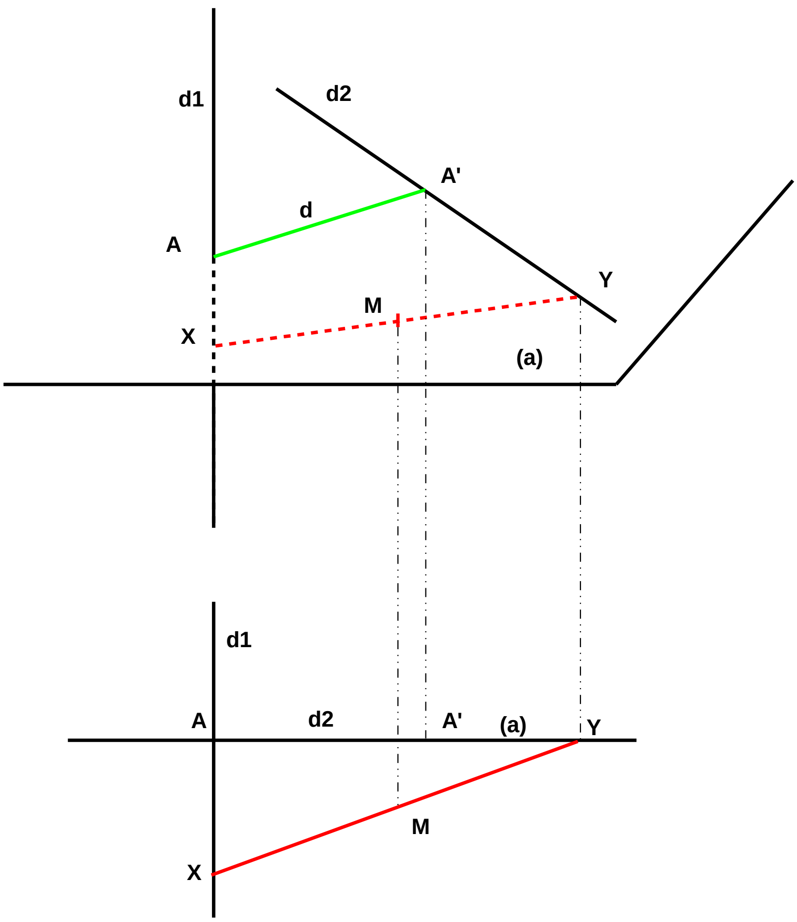
Jacques Collot

1 avril 03

EXGSE030 – Mons, questions-types 2000-2001.

Dans l'espace, on considère un plan (a) et une droite (d1) perpendiculaire à ce plan et passant par un point A de ce plan. Une seconde droite (d2) appartient au plan (a), mais ne passe pas par A. Soit d la distance de ce point a (d2).
Un segment de longueur constante s'appuie par ses extrémités sur (d1) et (d2) ; les extrémités de ce segment se déplacent en glissant le long de (d1) et (d2). Le segment d se déplace donc dans l'espace.
On appelle M le point milieu de ce segment.
On demande :

a) de déterminer dans quel plan se déplace le point M.
b) de déterminer, pour chaque position de la droite, à quelle hauteur se situe le point M par rapport au plan (a).



Il faut bien sûr supposer que $L > d$.
Sur la figure, on a représenté la situation en perspective et en projection.
Soit x, l'extrémité de L qui s'appuie sur $(d1)$ et y, l'extrémité qui s'appuie sur $(d2)$.

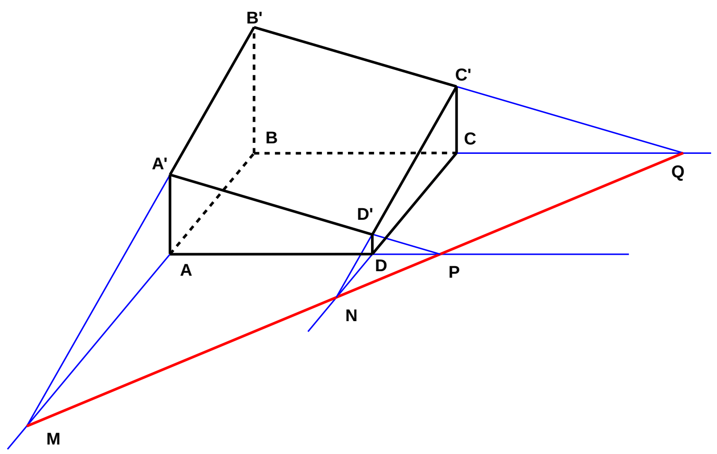
En examinant la projection, il est immédiat que le point M se déplace dans le plan médiateur de d.

Si on considère que x définit également la distance Ax,
on voit que la hauteur du point M par rapport au plan (a) est $\frac{x}{2}$.

On notera que les valeurs extrèmes de x sont :
$-\sqrt{L^2 - d^2} \leq x \leq \sqrt{L^2 - d^2}$

EXGSE031 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit un parallélogramme ABCD appartenant à un plan P1.
Les côtés de ce parallélogramme sont tels que | AB | = 2 et | AD | = 1 et l'angle BAD = 60°
Par chacun des sommets du parallélogramme, on mène une droite perpendiculaire à P1.
Un second plan P2 distinct de P1 coupe ces quatre droites en les points A', B', C' et D'.
Démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.
Déterminer la relation liant AA', BB', CC' et DD'.



$a)$ AA', BB', CC' et DD' sont $\perp$ à $P1$

$\rightarrow$ Les plans $AA'DD'$ et $BB'CC'$ sont parallèles.

$\rightarrow$ Le plan $P2$ est donc coupé par des plans parallèles

$\rightarrow$ $A'D' \ // \ B'C'$

De même, $A'B' \ // \ C'D'$

$\rightarrow$ $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

b) $AA' \ // \ DD' \rightarrow \dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{A'D'}{AD}$

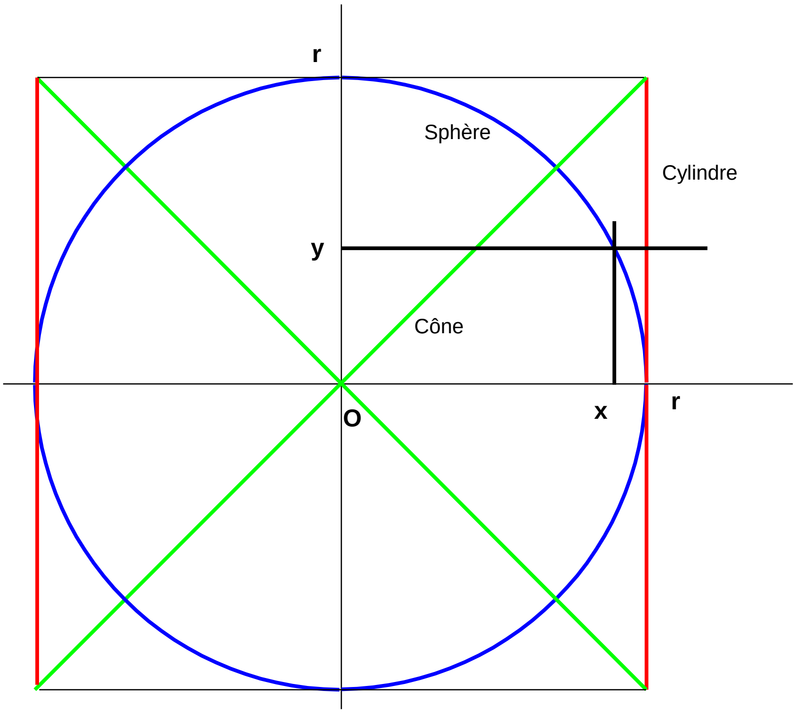
$BB' \ // \ CC' \rightarrow \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{B'C'}{BC}$

or $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (car $AD = BC$ et $A'D' = B'C'$)

$\rightarrow \dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{BB'}{CC'}$

EXGSE032 – Mons, questions-types 2000-2001.

On considère un cylindre de révolution circonscrit à une sphère et le double cône dont le sommet est le centre de la sphère, les deux bases étant celles du cylindre.
On coupe les trois corps (cylindre, sphère et double-cône) par un plan perpendiculaire à leur axe commun.
Montrez que l'aire de la section totale dans le cylindre est égale à la somme des deux autres.
Si on note R le rayon de sphère, calculez le volume du cylindre et celui du double-cône.



Coupons les solides par un plan passant par l' axe du cylindre.

$a)$ *Vu dans ce plan,*

le cône a pour équation : $y = x$

la sphère a pour équation : $x^2 + y^2 = R^2$

le cylindre a pour équation : $x = R$

Si maintenant, on coupe par un plan perpendiculaire à l' axe les aires sont :

$$S_{cylindre} = \pi R^2$$

$$S_{cône} = \pi y^2$$

$$S_{sphère} = \pi \left(R^2 - y^2\right)$$

On vérifie immédiatement que :

$$S_{cylindre} = S_{cône} + S_{sphère}$$

$b)$ *De même :*

$$V_{cylindre} = 2R \,.\, \pi R^2 = 2\pi\, R^3$$

$$V_{cône} = 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = 2\pi R^3$$

$$V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$

On vérifie immédiatement que :

$$V_{cylindre} = V_{cône} + V_{sphère}$$

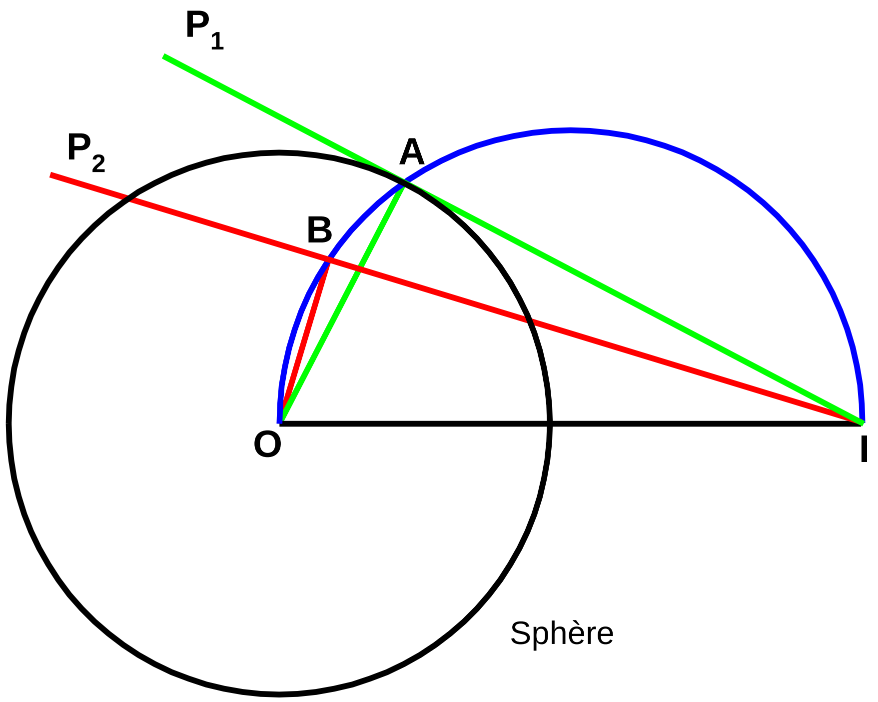
<u>*NOTE*</u>

Archimède avait montrer que les volumes du double cône, de la sphère et du cylindre sont dans les rapports 1 : 2 : 3. Ce que nous vérifions bien ici.

EXGSE033 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une sphère de centre O et un point I situé à l'extérieur de celle-ci à une distance 1 de O.
On demande :

a) Quel est le lieu des centres des cercles sections de cette sphère avec l'ensemble des plans passant par I.
b) De calculer le volume engendré par la rotation autour de OI, du triangle équilatéral dont OI est un des côtés (Le volume sera calculé en fonction de 1).



a) Coupons la sphère par un plan π passant par OI.

Considérons les plans P_1 et P_2 perpendiculaires au plan π et passant par I.

Le plan P_1 est tangent à la sphère en A (avec $A \in \pi$).

Dans le plan π, OA est perpendiculaire au plan P_1

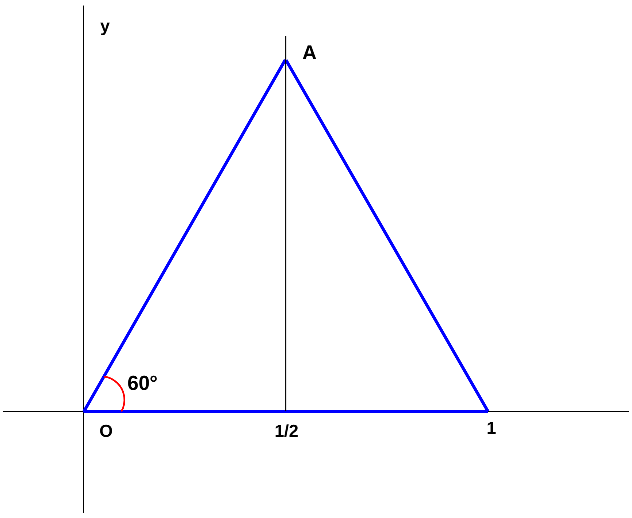
Le plan P_2 est sécant à la sphère.

Le plan P_2 coupe la sphère selon un cercle dont le centre est B (avec $B \in \pi$)

OB est perpendiculaire au plan P_2

On voit que A et B sont situés sur le cercle de diamètre OI.

Par extrapolation, on en déduit que le lieu recherché est la portion de la sphère de diamètre OI, située à l'intérieur de la sphère donnée.



b) En se référant à la deuxième figure, on voit que la droite OA a pour équation $y = \sqrt{3}\,x$

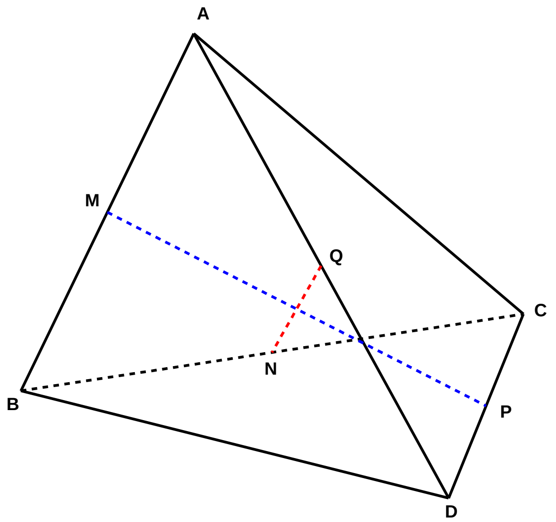
Le volume recherché est donné par :

$$V = 2.\pi.\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{3}\,x\right)^2 dx = 2.\pi.3.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

EXGSE034 – Liège, 1997.

Soient ABCD quatre points de l'espace et soient MNPQ les milieux respectifs des segments AB, BC et DA.
Démontrer que :

$$2\left(\left|\overline{MP}\right|^2+\left|\overline{NQ}\right|^2\right)=\left|\overline{AC}\right|^2+\left|\overline{BD}\right|^2$$



Comme Q est le milieu de AD et P le milieu de CD,

QP est parallèle à AC et vaut $\dfrac{AC}{2}$.

De même :

$MQ=\dfrac{BD}{2}\quad MN=\dfrac{AC}{2}\quad NP=\dfrac{BD}{2}$

On a:

$\overline{MP}=\overline{MQ}+\overline{QP}\quad$ et $\quad\overline{NQ}=\overline{NP}+\overline{PQ}$

$\left|\overline{MP}\right|^2=\left|\overline{MQ}\right|^2+2\,\overline{MQ}.\overline{QP}+\left|\overline{QP}\right|^2$

$\left|\overline{NQ}\right|^2=\left|\overline{NP}\right|^2+2\,\overline{NP}.\overline{PQ}+\left|\overline{PQ}\right|^2$

$\left|\overline{MP}\right|^2+\left|\overline{NQ}\right|^2=2\left(\dfrac{\left|\overline{BD}\right|}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{\left|\overline{AC}\right|}{2}\right)^2+2.\overline{PQ}\left(\overline{NP}+\overline{QM}\right)$

Le dernier terme est nul car $\overline{NP}$ et $\overline{QM}$ sont parallèles et de sens contraires.

Finalement :

$2\left(\left|\overline{MP}\right|^2+\left|\overline{NQ}\right|^2\right)=\left|\overline{AC}\right|^2+\left|\overline{BD}\right|^2$

EXGSE035 – Liège, juillet 2001.

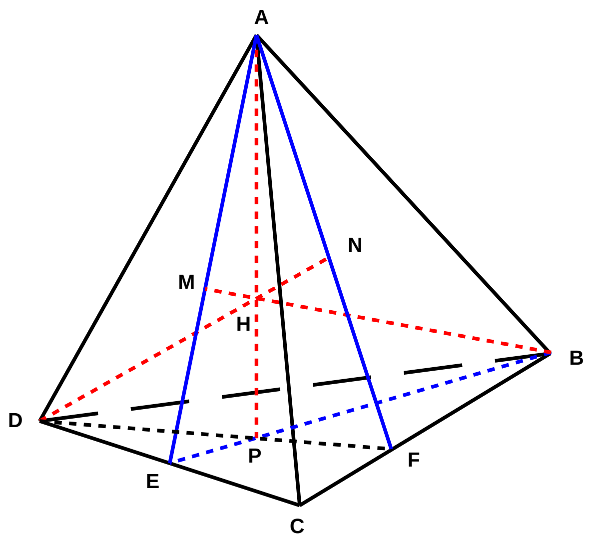
On considère un tétraèdre régulier (c'est-à-dire dont tous les côtés sont égaux)
Soit E le milieu du côté [C, D].

a) Montrer que la droite CD est perpendiculaire au plan ABE.

b) Montrer que la hauteur du triangle ABE issue de A est perpendiculaire à la face BCD et que la hauteur du triangle ABE issue de B est perpendiculaire à la face ACD.
(Rappelons qu'une hauteur du tétraèdre est une droite passant par un des sommets et perpendiculaire à la face opposée. Le pied d'une hauteur est son intersection avec la face à laquelle elle est perpendiculaire.)

c) Montrer que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.

d) En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.



a) ΔADC est équilatéral $\rightarrow$ AE est hauteur, donc $AE \perp CD$
De même, BE est hauteur du ΔBCD $\rightarrow$ $BE \perp CD$
$\rightarrow$ $CD \perp$ au plan ABE

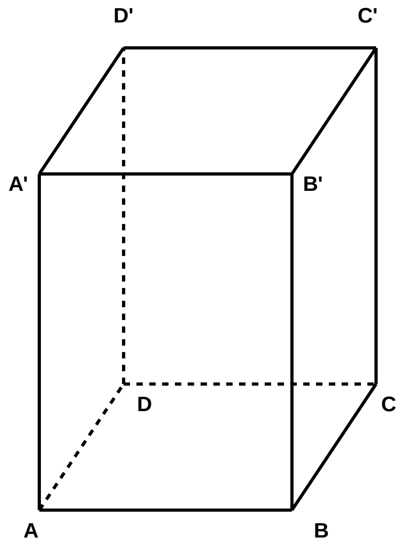
b) AP hauteur du ΔABE $\rightarrow$ $AP \perp EB$.
Et comme $AP \in$ au plan ABE, AP $\perp$ *à* la face BCD
AM hauteur du ΔABE $\rightarrow$ $AM \perp AE$.
Et comme $AP \in$ au plan ABE, AM $\perp$ à la face ACD

c) Soit par exemple la face BCD.
Plan $APD \perp BC$ $\rightarrow$ AP est une hauteur du ΔBCD
$\rightarrow$ P est l'orthocentre du ΔBCD
Idem pour les autres faces : M orthocentre de ACD, N orthocentre de ABC.

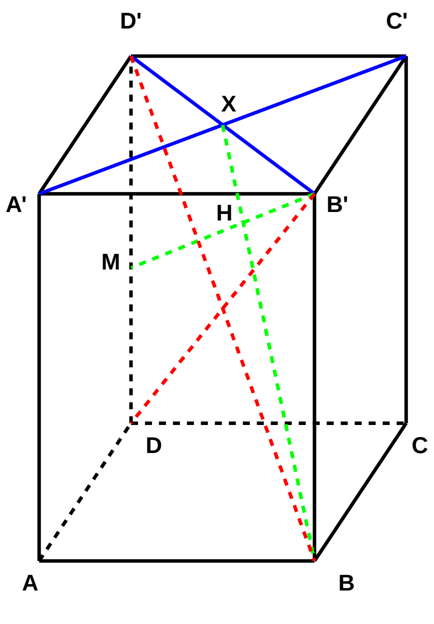
d) BM $\perp AE$ $\rightarrow$ BM est une hauteur du ΔABE.
$\rightarrow$ $H \equiv AP \cap AE$ est l'orthocentre du ΔABE.
$DN \perp AF$ $\rightarrow$ DF est une hauteur du ΔADF.
Mais comme les ΔABE et ADF sont égaux (tétraèdre régulier), et que ces deux triangles ont une hauteur commune (AP), H est aussi l'orthocentre du ΔADF
Même raisonnement pour la quatrième hauteur relative à la face ADB.
Conclusion : Les quatres hauteurs sont concourantes.

EXGSE036 – Liège, septembre 2001.

On considère un prisme droit ABCDA'B'C'D', à base carrée ABCD.



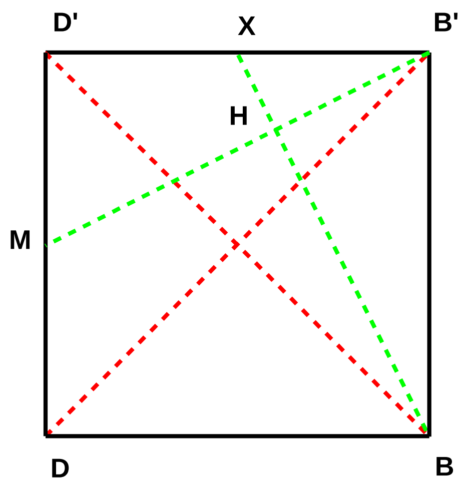
a) Si X est le centre (intersection des diagonales) de la face A'B'C'D', la hauteur du triangle BXB' issue de B' est perpendiculaire au plan A'C'B.
b) Prouver que si les diagonales BD' et B'D sont perpendiculaires, alors la perpendiculaire abaissée de B' sur le plan A'C'B passe par le milieu de l'arête DD'



a) $A'C' \perp D'B' \;\to\; A'C' \perp$ plan $XB'B$

$\to\; HB'$ est orthogonal au plan $XB'B$

et comme $HB' \perp XB \;\to\; HB' \perp$ plan A'C'B.



b) Reprenons le plan $D'DBB'$ dans la figure 3.

Si $BD' \perp B'D \;\to\; D'DBB'$ est un carré.

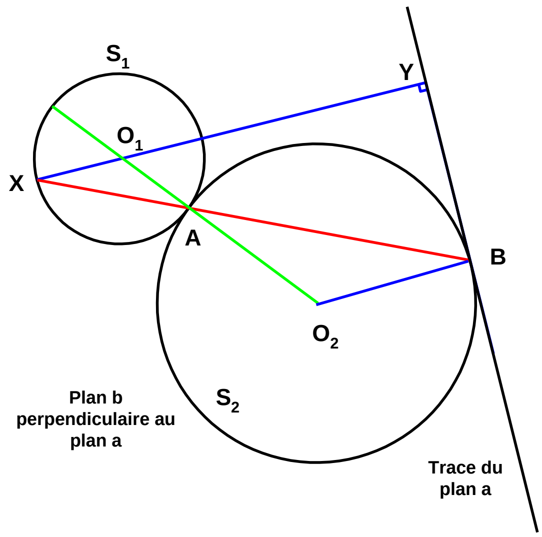
$\angle XBB' = \angle MB'D'$ car angles à côtés perpendiculaires.

$\to\; \Delta XBB' = \Delta MD'B'$ et comme $DD' = D'B'$, M est le milieu de DD'.

Résolu le 19 mars 2003, Modifié le 7 juillet 2004

EXGSE037 – Mons, questions posées de1995 à 1998.

Soit une sphère S_1 et un plan extérieur à cette sphère. On construit une sphère S_2, tangente à la fois au plan a et à la sphère S_1.
Démontrez que la droite qui joint les points de contact de S_1 avec S_2 et de S_2 avec a passe par l'une des extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan a.



Soient O_1 et O_2 les centres respectifs des sphères S_1 et S_2. Travaillons dans le plan contenant la droite O_1O_2 et perpendiculaire au plan a.
Appelons A et B les points de contact de S_2 avec S_1 et de S_2 avec a.
Appelons Y le pied de la perpendiculaire abaissée de O_1 au plan a et X le point de percée de cette droite dans la sphère S_1.
La droite A_1Y est parallèle à O_2B, car ces deux droites sont perpendiculaires au plan a.
Par suite, l'angle XO_1A est égal à AO_2B et les triangles XO_1A et AO_2B sont semblables (une angle égal et leurs deux côtés adjacents sont proportionnels).

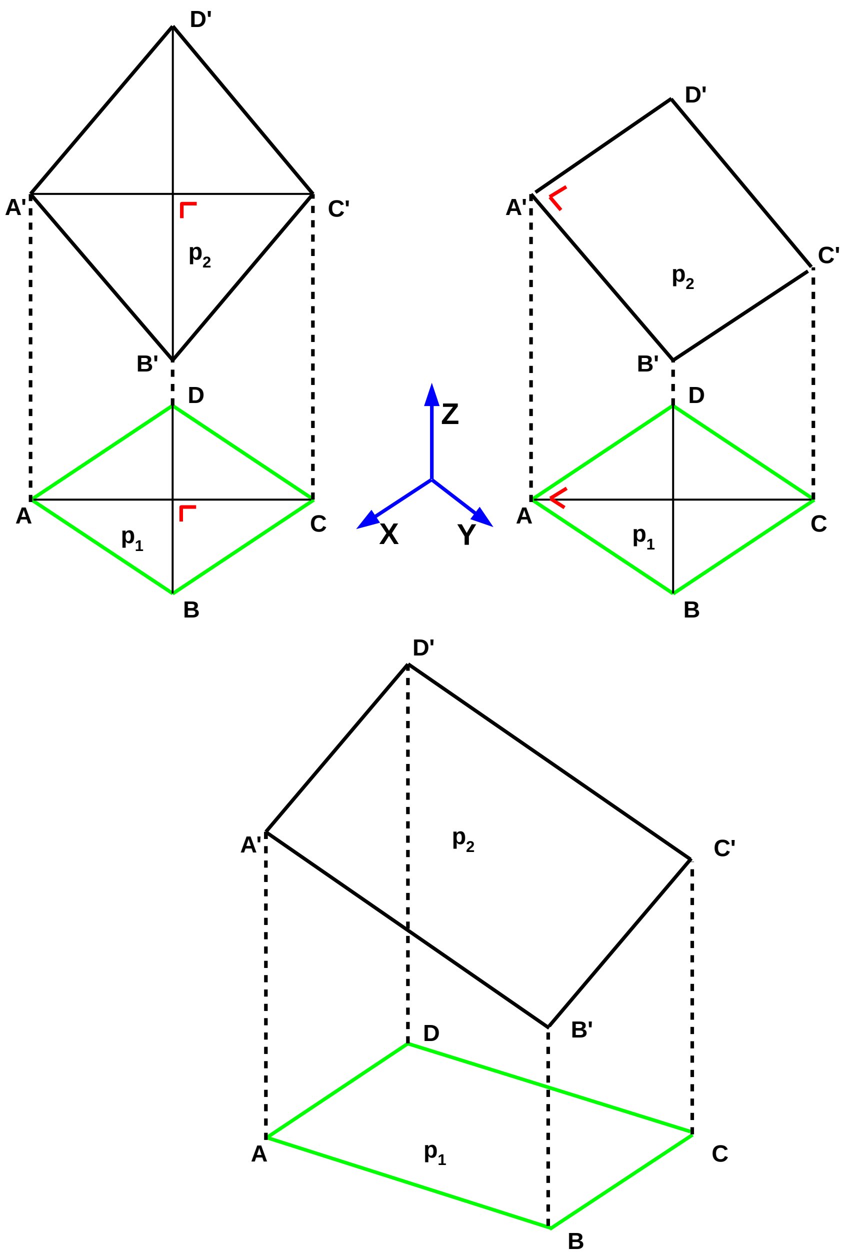
$$\frac{O1A}{O_2A} = \frac{O_1X}{O_2B} = \frac{R}{r}$$

(R et r étant les rayons respectifs des sphères S1 et S2)
Il en résulte que les angles XAO_1 et O_2AB sont égaux et que X est sur le prolongement de AB.

EXGSE038 – Mons, questions posées de1995 à 1998.

Soit p_1 et p_2 deux plans de l'espace qui ne sont pas perpendiculaires entre eux.
Soit dans le plan p_1, un carré ABCD que l'on projette orthogonalement sur p_2 A'B'C'D'.
Déterminer quelles conditions imposées pour que

a) A'B'C'D' soit un losange
b) A'B'C'D' soit un rectangle
c) A'B'C'D' soit un carré
d) A'B'C'D' soit un parallélogramme

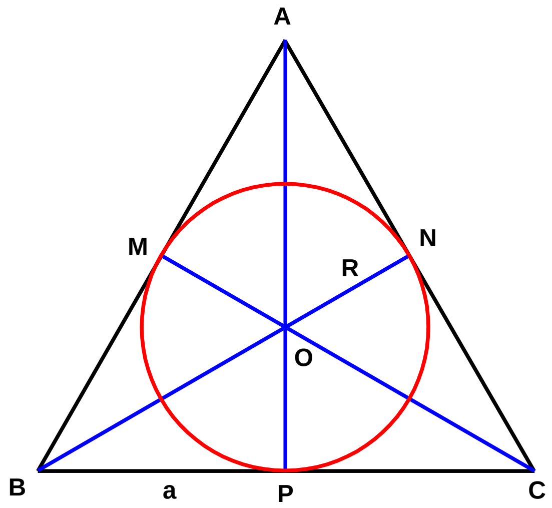


On sait que pour qu'un angle droit se conserve par projection orthogonale sur un plan, il faut qu'un de ses côtés soit parallèle à ce plan.

a) Les diagonales d'un losange A'B'C'D' sont perpendiculaires entre elles, d'où la condition A'C' parallèle à p_1 cas de la première figure ou D'B' est parallèle à p_1.
b) Les côtés d'un rectangle sont perpendiculaires entre eux. D'où la condition A'D' (B'C') parallèle à p_1 (cas de la seconde figure) ou A'B' (D'C') parallèle à p_1.
c) Pour un carré, une des diagonales et l'un des côtés doivent être parallèles à p_1. Par conséquent, le plan p_2 est parallèle à p_1.
d) Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles 2 à 2 et leurs angles ne sont pas droits (troisième figure). Les plans ADD'A' et BCC'B' sont parallèles entre eux. Les plans ABB'A' et DCC'D' sont parallèles entre eux. Les plans ADD'A' et BCC'B' sont coupés par p_2 selon 2 parallèles A'D' et B'C' qui ne sont pas parallèles à p_1. Les plans ABB'A' et DCC'D' sont coupés par p_2 selon 2 parallèles A'B' et D'C' qui ne sont pas parallèles à p_1. Il n'y a donc pas de conditions particulières à imposer.

EXGSE039 – Bruxelles, juillet 2000

Par rotation d’un triangle équilatéral et de sa circonférence inscrite, autour d’une hauteur, on obtient un cône et sa boule inscrite.
Démontrer que si le volume de la boule est de quatre litres celui du cône en vaut neuf.



Soit a la longueur du côté $\rightarrow\ BH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\rightarrow\ R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ car le centre du cercle inscrit d'un triangle équilatéral est aussi le centre de gravité

Sphère : $V_S=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3$

Cône : $V_C=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\rightarrow\ \frac{V_C}{V_S}=\frac{9}{4}$