

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique dans l'espace**

**GSE 5**

**EXGSE050 – EXGSE059**

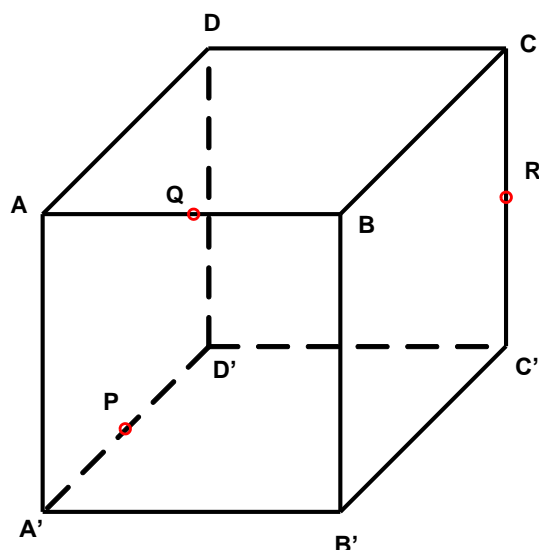
<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Avril 04

## EXGSE050 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2003.

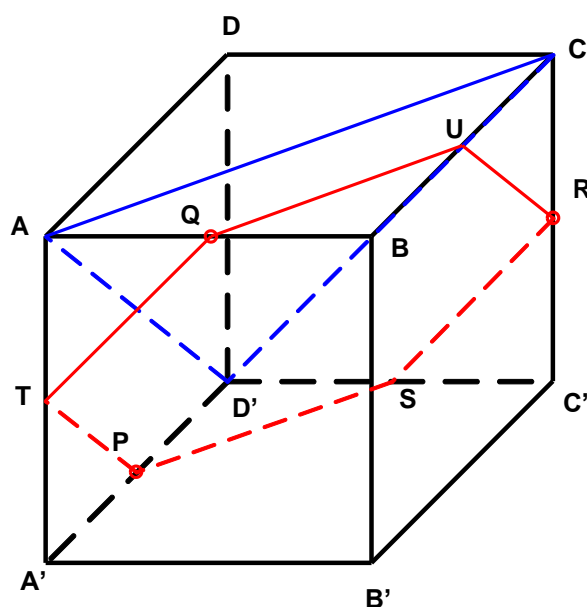
On considère le cube  $ABCD A' B' C' D'$ . On note  $P$  le milieu de  $[ D', A' ]$ ,  $Q$  le milieu de  $[ A, B ]$  et  $R$  le milieu de  $[ C, C' ]$ .



1. Montrer que

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{2D'A} + \overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$$

2. Montrer que le plan  $PQR$  est parallèle au plan  $ACD'$
3. Montrer que  $PQR$  coupe le cube selon un hexagone régulier.



$$\begin{aligned}
1) \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PD'} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{QR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'R}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'C'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})
\end{aligned}$$

2) En vertu du point 1)  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{QR}$  sont des combinaisons linéaires de  $\overrightarrow{D'A}$  et  $\overrightarrow{AC}$   
 $\rightarrow \overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{QR}$  sont parallèles au plan  $ACD'$   $\rightarrow$  les plans  $PQR$  et  $ACD'$  sont parallèles

3)  $QU \parallel AC$  puisque les plans  $PQR$  et  $ACD'$  sont parallèles  $\rightarrow U$  est le milieu de  $BC$

$$\text{et } |QU| = \frac{|AC|}{2}$$

De même pour  $SR$  et  $TP$  et comme les diagonales des faces du cube sont égales

$$\rightarrow |QU| = |UR| = |RS| = |SP| = |TP| = |PQ|$$

De plus,  $|QS| = |UP| = |TR|$  car médianes du cube

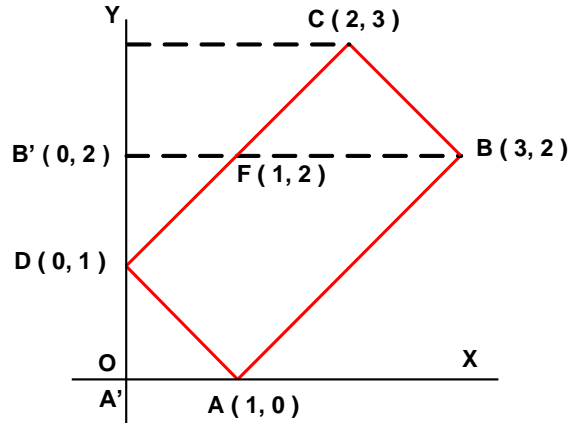
$\rightarrow QURSTQ$  est un hexagone régulier.

---

Modifié le 6 septembre 2004

## EXGSE051– FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  et d'axes  $X$  et  $Y$ , on donne quatre points :  $A ( 1, 0 )$ ,  $B ( 3, 2 )$ ,  $C ( 2, 3 )$  et  $D ( 0, 1 )$ . Calculer le volume balayé par le rectangle  $ABCD$  lorsqu'on lui fait subir une rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe  $OY$



Rappel :

$$\text{Volume du tronc de c\^one: } V_{TC} = \frac{\pi}{12} h (D^2 + Dd + d^2)$$

$$\text{Volume du c\^one: } V_C = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Le volume recherché (  $V$  ) est la moitié de :

$$\text{volume du tronc de c\^one engendré par } CC'BB' \quad (V_{TC}^{CC'BB'})$$

$$- \text{volume du tronc de c\^one engendré par } CC'FB' \quad (V_{TC}^{CC'FB'})$$

$$+ \text{volume du tronc de c\^one engendré par } B'BAA' \quad (V_{TC}^{B'BAA'})$$

$$- \text{volume de c\^one } B'FD \quad (V_C^{B'FD})$$

$$- \text{volume du c\^one } DAA' \quad (V_C^{DAA'})$$

$$V_{TC}^{CC'BB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times (6^2 + 6 \times 4 + 4^2) = \frac{76\pi}{12}$$

$$V_{TC}^{CC'FB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times (4^2 + 4 \times 2 + 2^2) = \frac{28\pi}{12}$$

$$V_{TC}^{B'BAA'} = \frac{\pi}{12} \times 2 \times (6^2 + 6 \times 2 + 2^2) = \frac{104\pi}{12}$$

$$V_C^{B'FD} = V_C^{DAA'} = \frac{\pi}{3} 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}$$

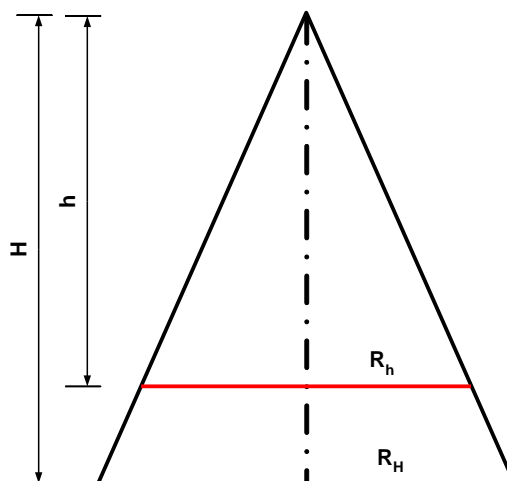
$$\rightarrow V = V_{TC}^{CC'BB'} - V_{TC}^{CC'FB'} + V_{TC}^{B'BAA'} - 2V_C^{B'FD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} (76 - 28 + 104 - 8) = 6\pi$$

## EXGSE052– EPL, UCL , Louvain, juillet 2002, série 1.

Soit un cône circulaire droit qui est coupé par un plan parallèle à sa base. On vous demande

- De déterminer la position du plan par rapport au sommet du cône pour que les volumes des deux solides formés soient égaux.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



$$V_H = \frac{1}{3} \pi R_H^2 H$$

$$V_h = \frac{1}{3} \pi R_h^2 h$$

$$\text{Or } \frac{R_h}{h} = \frac{R_H}{H} \quad \text{et} \quad V_H = 2V_h$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} \pi R_H^2 H = \frac{1}{3} \pi \frac{R_H^2}{H^2} h^3$$

$$\rightarrow h^3 = \frac{1}{2} H^3 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} H \approx 0.7937.H$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXGSE053– EPL, UCL , Louvain, juillet 2002, série 2.

Soit un cube d'arête  $a$  et dont les diagonales sont  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  et  $DD'$ . On fait tourner le cube autour de  $AA'$ .

- De déterminer en fonction de  $a$  l'aire de la surface engendrée par le segment de droite  $AB$ .
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

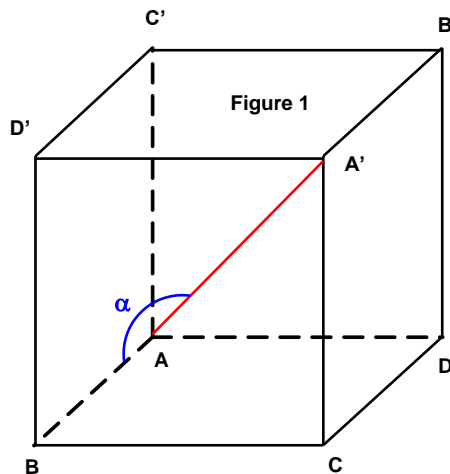


Figure 1

$$\overrightarrow{AB} : (a, 0, 0) \quad \overrightarrow{AA'} : (a, a, a)$$

Soit  $\alpha$  est l'angle entre ces deux vecteurs

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 54.7356^\circ$$

La Figure 2 montre le plan  $ABA'$

$$\rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{3} a \rightarrow BH = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$AB$  engendre un cône dont l'aire latérale est :

$$A_L = 2\pi \cdot AH \cdot BH = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$$\rightarrow \boxed{A_L = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a^2}$$

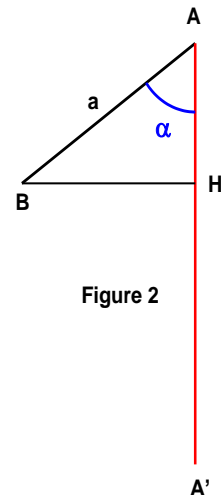


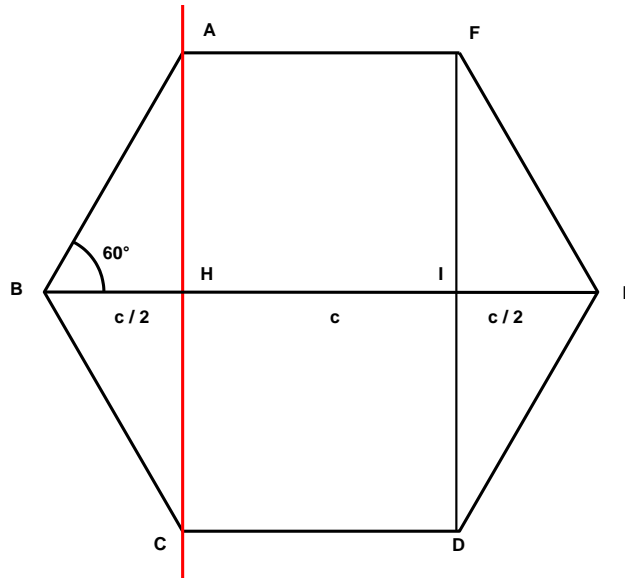
Figure 2

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004.

## EXGSE054– EPL, UCL , Louvain, septembre 2002.

Soit un hexagone régulier tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets et perpendiculaire à un côté adjacent. On vous demande :

- De déterminer les rapports entre les volumes et les surfaces totales des deux solides engendrés par cette rotation.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



$$\text{Puisque } \angle ABE = 60^\circ \rightarrow BH = \frac{c}{2} \text{ et } AH = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Rapport des volumes

Il suffit d'étudier le rapport des volumes engendré par  $AFEH$  et  $ABH$

$$ABH \text{ engendre un c\^one: } V_{ABH} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{24}c^3$$

$$AFEH \text{ engendre un tronc de c\^one: } V_{AFEH} = \frac{\pi}{3} \left[ \left(\frac{3c}{2}\right)^2 + \frac{3c}{2} \cdot c + c^2 \right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$= \frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24}$$

$$\rightarrow \frac{V_{ABH}}{V_{AFEH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{24}c^3}{\frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24}} = 19$$

### Rapport des surfaces totales

Ici aussi, il suffit de faire le rapport des surfaces engendrées par  $AB$  et  $AFE$ .

$$AB \rightarrow \text{Surface latérale d'un c\^one : } S_1 = \pi \frac{c}{2} c = \frac{\pi c^2}{2} \quad (\text{Rappel : } S = \pi r l)$$

$AFE$

$$AF \rightarrow \text{Surface d'un cercle : } S_2 = \pi c^2$$

$$FE \rightarrow \text{Surface latérale d'un tronc de c\^one : } S_3 = \pi \left( c + \frac{3c}{2} \right) c = \frac{5\pi c^2}{2}$$

$$(\text{Rappel : } S = \pi(r_1 + r_2)l)$$

$$AFE \rightarrow S_4 = S_2 + S_3 = \pi c^2 + \frac{5\pi c^2}{2} = \frac{7\pi c^2}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{AFE}{AB} \rightarrow \frac{\frac{7\pi c^2}{2}}{\frac{\pi c^2}{2}} = 7$$

---

Résolu le 24 juin 2004



## EXGSE055 – EPL, UCL , Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère une caisse cubique de côté  $c$ . On désire mettre dans cette caisse des troncs cylindriques de hauteur  $c$  et de rayon  $c / 20$  et ensuite refermer la caisse : en d'autres mots, rien ne peut déborder de la caisse.

On vous demande:

1. De donner le nombre maximum de cylindres qui peuvent être placés dans cette caisse,
2. De calculer le rapport entre le volume vide et le volume de la caisse.
3. D'expliquer votre démarche par un dessin précis.

---

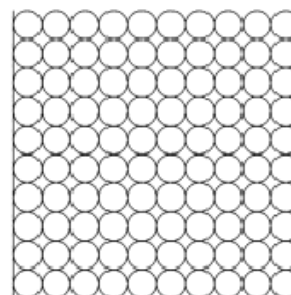
### Solution proposée par Jan Frans Broecks

Appelons le rayon des troncs cylindriques

$$a = \frac{c}{20}$$

On peut exactement couvrir le fond de la caisse par 10 cylindres côté à côté. La hauteur de cette couche est égale à  $2a$ .

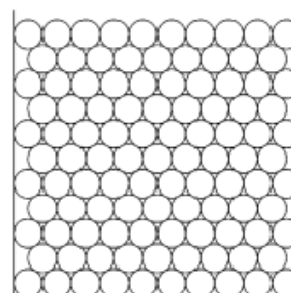
Si on couvre cette première couche par 9 autres couches identiques, on obtient l'arrangement en « réseau carré » montré ci à-côté. La caisse est ainsi entièrement remplie (hauteur totale =  $2a = c$ ) et elle contient **100** troncs.

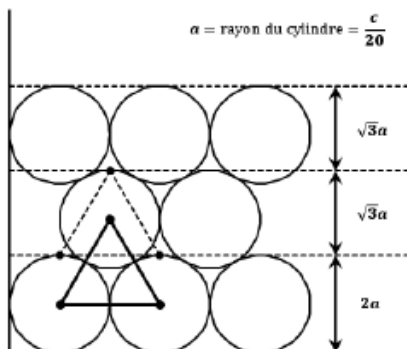


Si, par contre, on couvre la première couche de 10 troncs par une couche de 9 troncs, reposant dans les « creux » entre les troncs de la première couche, suivie d'une nouvelle paire de couches de 10 troncs et de 9 troncs, et ainsi de suite, on obtient l'arrangement en « réseau hexagonal » montré à droite.

Comme le montre la figure en bas, la hauteur totale de  $n$  couches ainsi empilées est de

$$\text{hauteur totale} = (2 + (n - 1)\sqrt{3})a \quad (1)$$





En effet, la hauteur de la première couche est  $2a$ .

Dans un plan vertical, les centres de deux troncs voisins d'une couche et le centre du tronc de la couche suivante, reposant dans le creux entre ces deux troncs, sont les sommets d'un *triangle équilatéral* de côté  $2a$ . La hauteur de ce triangle est égale à :

$$h = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

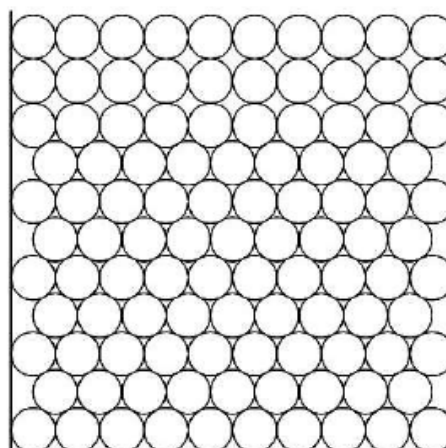
Comme le montre la figure (le triangle équilatéral en pointillé), cette distance est également la hauteur supplémentaire de chacune des  $n - 1$  couches suivantes, d'où la formule (1).

On peut ainsi remplir la caisse avec 11 couches, alternativement 6 couches de 10 troncs et 5 de 9 troncs, donc un total de **105** troncs.

Selon (1), la hauteur totale de ces 11 couches est égale à  $2a + 10\sqrt{3}a = (2 + 10\sqrt{3})a \cong 19,32 a < c$ .

Mais il est possible de faire mieux ! En effet, il reste un espace vide en haut de la caisse d'environ  $0,68 a$ , ce qui est supérieur à la différence entre la hauteur  $6a$  de trois couches en « réseau carré » et la hauteur  $(2 + 2\sqrt{3})a \cong 5,46 a$  de trois couches en « réseau hexagonal ».

On peut donc, dans l'arrangement en « réseau hexagonal », remplacer une des couches de 9 troncs par une couche de 10 troncs, sans dépasser la hauteur du couvercle. Dans la figure ci-contre, c'est la dernière des couches de 9 troncs que nous avons remplacée par une de 10 troncs.



La hauteur totale de ces 11 couches est maintenant égale à  $3(2a) + 8\sqrt{3}a = (6 + 8\sqrt{3})a \cong 19,86 a < c$ .

La caisse peut donc contenir **106** troncs.

Le rapport entre le volume vide et le volume de la caisse est :

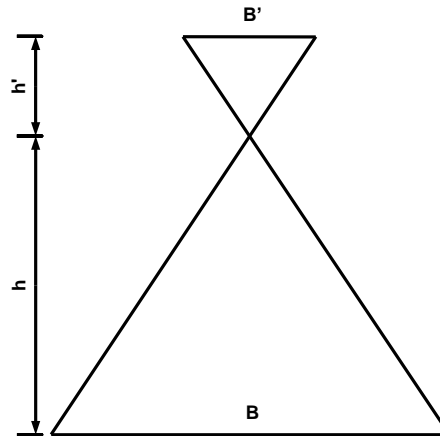
$$\begin{aligned} \frac{\text{volume vide}}{\text{volume caisse}} &= 1 - \frac{\text{volume de 106 cylindres}}{\text{volume du cube}} \\ &= 1 - \frac{106 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot 20a}{(20a)^3} \\ &= 1 - \frac{2120 \cdot \pi}{8000} \\ &\cong 1 - 0,8325 \\ &= \mathbf{0,1675} \quad (\mathbf{16,75\%}) \end{aligned}$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004. Modifié le 23 décembre 2011.

## EXGSE056– EPL, UCL , Louvain, juillet 2003, série 2.

Soit une pyramide de base  $B$  et de hauteur  $h$ . On prolonge les arêtes de cette pyramide au-delà du sommet et on coupe ces prolongements par un plan parallèle à la base  $B$ . On forme ainsi une seconde pyramide de hauteur  $h'$  et de base  $B'$ . On définit :  $\Delta h = |h' - h|$ .

On vous demande d'exprimer la somme des volumes de ces deux pyramides en fonction de  $B$ , de  $B'$  et de  $\Delta h$ , en vous aidant d'un dessin du problème.



$$\text{On a : } \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{B'}{B} \rightarrow h = h' \cdot \sqrt{\frac{B}{B'}}$$

$$\Delta h = |h' - h| = \left| h' - h' \cdot \sqrt{\frac{B}{B'}} \right| = h' \left| 1 - \sqrt{\frac{B}{B'}} \right|$$

$$\rightarrow h' = \frac{\Delta h}{\left| 1 - \sqrt{\frac{B}{B'}} \right|} \quad (1)$$

D'autre part :

$$V + V' = \frac{1}{3}(Bh + B'h') = \frac{1}{3}(Bh - Bh' + Bh' + B'h') = \frac{1}{3}(B \cdot \Delta h + h'(B + B'))$$

En vertu de (1) :

$$V + V' = \frac{1}{3} \left( B \cdot \Delta h + \frac{\Delta h}{\left| 1 - \sqrt{\frac{B}{B'}} \right|} (B + B') \right) \rightarrow V + V' = \frac{\Delta h}{3} \left( B + \frac{B + B'}{\left| 1 - \sqrt{\frac{B}{B'}} \right|} \right)$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXGSE057– EPL, UCL , Louvain, septembre 2003.

Une "maison" est construite à partir d'un cube de côté  $a$  auquel on superpose un toit pyramidal de hauteur  $H$ . Pour des raisons de dimensionnement du chauffage, on cherche à construire trois niveaux (rez de chaussée au niveau zéro et deux étages) **ayant le même volume**. Le premier étage est au niveau  $h_1$  et le deuxième étage au niveau  $h_1 + h_2$ .

On vous demande :

D'exprimer  $h_1$  et  $h_2$  en fonction de  $a$  et  $H$  en discutant la solution pour différentes valeurs de  $a$  et  $H$ .

D'évaluer  $h_1$  dans les cas (i)  $a = 1$  ,  $H = 1/2$  et (ii)  $a = 1$  ,  $H = 9$ .

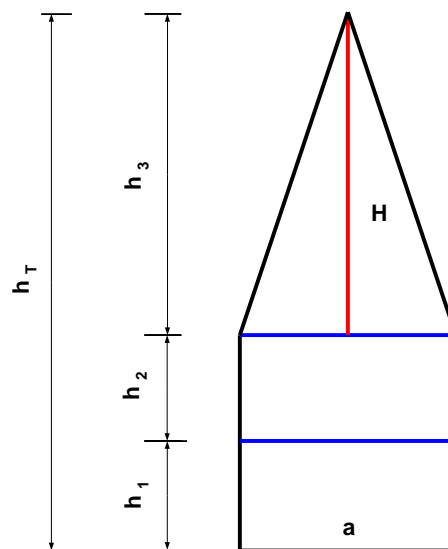


Figure 1  
 $H = 3 a / 2$

Soit :

$V_1$  : le volume correspondant à la hauteur  $h_1$

$V_2$  : le volume correspondant à la hauteur  $h_2$

$V_3$  : le volume correspondant à la hauteur  $h_3$ , définie comme la hauteur du troisième niveau.

$V_T$  : le volume total.  $V_T = a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right)$

Envisageons deux cas particuliers :

a) Le niveau  $h_1 + h_2$  arrive juste à hauteur du toit. (Figure 1)

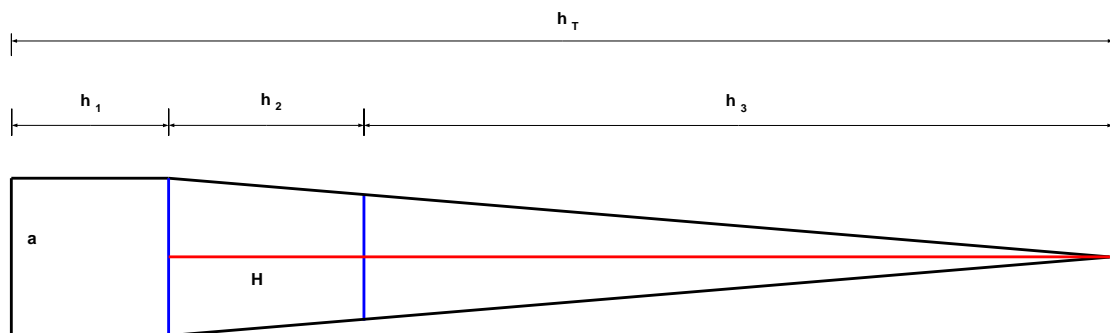
Dans ce cas :

$$V_1 = V_2 = \frac{a^3}{2}$$

$$V_3 = \frac{1}{3} a^2 H = V_1 = \frac{a^3}{2} \rightarrow H = \frac{3}{2} a$$

b) Le niveau  $h_1$  arrive juste à hauteur du toit. (Figure 2)

$$\rightarrow V_1 = a^3 \text{ et } V_1 + V_2 = \frac{1}{3} a^2 H = 2a^3 \rightarrow H = 6a$$



**Figure 2**  
 **$H = 6a$**

Il nous faut donc traiter les cas

$$1) \underline{0 \leq H \leq \frac{3}{2}a} \rightarrow h_1 + h_2 \leq a$$

$$V_1 = V_2 = h_1 a^2 = \frac{1}{3} V_T = \frac{1}{3} a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) \rightarrow \boxed{h_1 = h_2 = \frac{1}{9} (3a + H)}$$

$$2) \underline{\frac{3}{2}a \leq H \leq 6a} \rightarrow h_1 \leq a \text{ et } h_1 + h_2 \geq a$$

$$V_1 = h_1 a^2 = \frac{1}{3} V_T = \frac{1}{3} a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) \rightarrow \boxed{h_1 = \frac{1}{9} (3a + H)}$$

$$V_3 = \frac{1}{3} c_3^2 h_3 \quad (c_3 = \text{côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 3})$$

$$\text{Or } c_3 = \frac{h_3 a}{H} \rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \frac{h_3^3 a^2}{H^2} = \frac{1}{3} a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) \rightarrow h_3 = \sqrt[3]{H^2 \left( \frac{H}{3} + a \right)}$$

$$\rightarrow h_2 = a + H - h_1 - h_3$$

$$3) \underline{6a \leq H} \rightarrow h_1 \geq a$$

$$\rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \frac{h_3^3 a^2}{H^2} = \frac{1}{3} a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) \rightarrow h_3 = \sqrt[3]{H^2 \left( \frac{H}{3} + a \right)}$$

$$V_2 + V_3 = \frac{1}{3} c_2^2 h_3 \quad (c_2 = \text{côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 2})$$

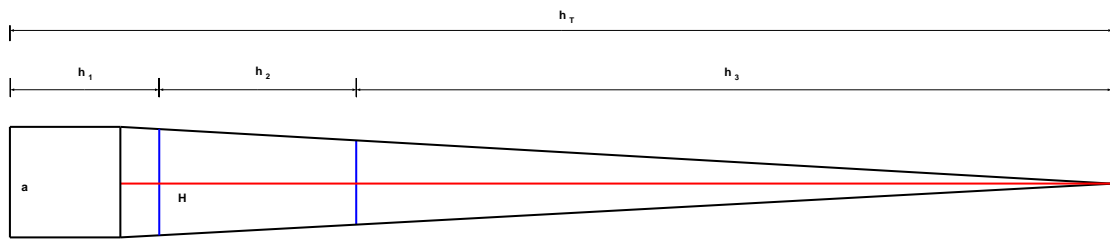
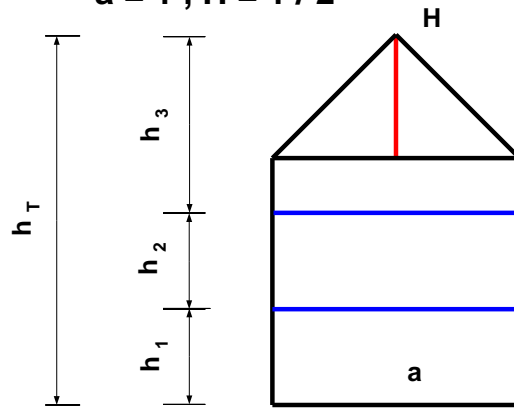
$$\text{Or } c_2 = \frac{(h_2 + h_3) a}{H} \rightarrow V_2 + V_3 = \frac{1}{3} \frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} V_T = \frac{1}{3} a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) = V_T - (V_2 + V_3) = a^2 \left( a + \frac{H}{3} \right) - \frac{1}{3} \frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$$

$$\rightarrow h_2 = \sqrt[3]{2H^2 \left( \frac{H}{3} + a \right)} - h_3 = (\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt[3]{H^2 \left( \frac{H}{3} + a \right)}$$

$$\rightarrow \boxed{h_1 = a + H - (h_2 + h_3) = a + H - \sqrt[3]{2H^2 \left( \frac{H}{3} + a \right)}}$$

**Figure 3**  
 **$a = 1, H = 1/2$**



**Figure 4**  
 **$a = 1, H = 9$**

### Applications

i)  $a = 1, H = \frac{1}{2}$

Nous sommes dans le premier cas :

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{9} \left( 3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{18} \approx 0.3889$$

$$h_3 = 0.7222$$

ii)  $a = 1, H = 9$

Nous sommes dans le troisième cas :

$$h_3 = \sqrt[3]{9^2 \left( \frac{9}{3} + 1 \right)} = 6.8683$$

$$h_2 = \left( \sqrt[3]{2} - 1 \right) \sqrt[3]{9^2 \left( \frac{9}{3} + 1 \right)} = 1.78521$$

$$h_1 = 1 + 9 - 6.8683 - 1.78521 = 1.3465$$

---

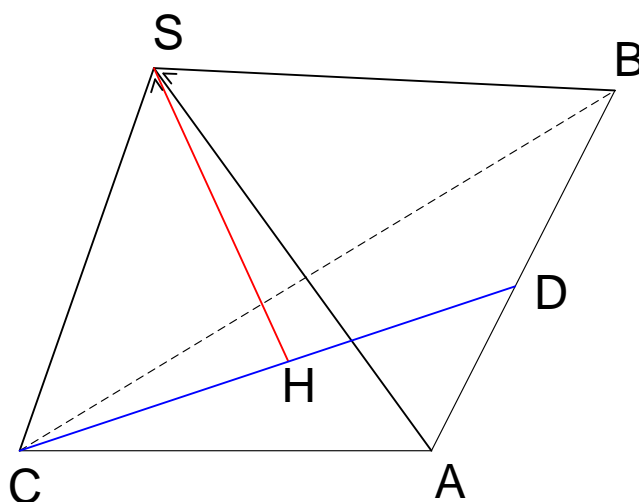
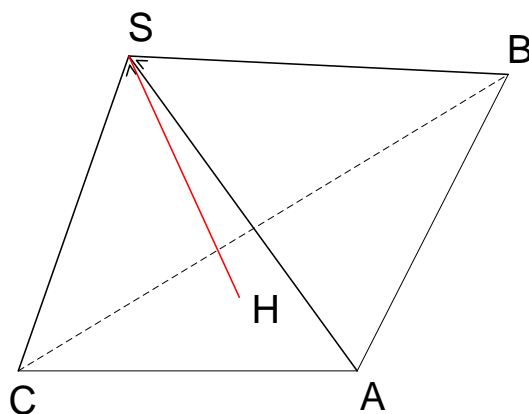
Résolu le 24 juin 2004

## EXGSE058– FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004 .

On considère un tétraèdre  $SABC$  tel que les droites  $SA$ ,  $SB$  et  $SC$  soient perpendiculaires deux à deux. Soit  $H$  la projection orthogonale de  $S$  sur le plan  $ABC$ .

a) Démontrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

b) Si on note  $a_{XYZ}$  l'aire du triangle  $XYZ$ , montrer que  $\frac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \frac{a_{ASB}}{a_{AHB}}$





a) Montrons que  $SC$  est perpendiculaire à  $BA$

$$SC \perp SB \text{ et } SA \Rightarrow SC \perp \text{ au plan } SBA \Rightarrow SC \perp AB$$

$$SH \perp \text{ au plan } ABC \Rightarrow SH \perp AB$$

$$\Rightarrow AB \perp SC \text{ et } SH \Rightarrow AB \perp \text{ au plan } SCH \Rightarrow AB \perp CH$$

$$\Rightarrow AB \text{ et } CH \text{ sont coplanaires, on a } AB \perp CH$$

On recommence pour  $BH$ . Conclusion :  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$

b) Soit  $D$  le pied de la hauteur de  $CH$  dans  $ABC$ , c'est aussi le pied de la hauteur issue de  $S$  dans  $ABS$ .

$$\text{On peut écrire : } \frac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \frac{a_{ASB}}{a_{AHB}} \rightarrow \frac{|\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}|}{|\overline{SD}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{|\overline{SD}| \cdot |\overline{AB}|}{|\overline{HD}| \cdot |\overline{AB}|}$$

$$\Rightarrow |\overline{CD}| \cdot |\overline{HD}| = |\overline{SD}|^2 \text{ qu'il suffit de démontrer}$$

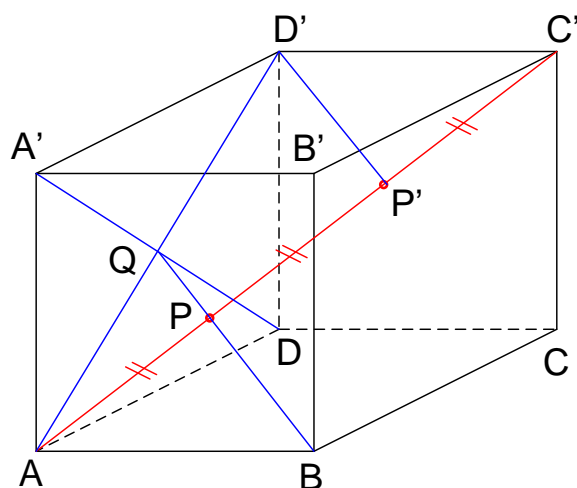
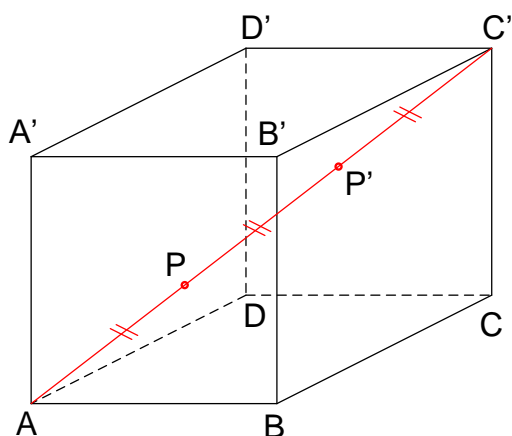
Or le triangle  $SCD$  est rectangle  $\Rightarrow$  les triangles  $CSD$  et  $SHD$  sont semblables puisqu'ils sont rectangles et ont l'angle  $\widehat{D}$  en commun.

$$\Rightarrow \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{HD}|}{|\overline{SD}|} \Rightarrow |\overline{CD}| \cdot |\overline{HD}| = |\overline{SD}|^2$$

## EXGSE059– FACSA, ULiège, Liège, juillet 2004 .

On considère le cube  $ABCD A' B' C' D'$ . Sur la diagonale  $AC'$ , on définit les points  $P$  et  $P'$  par  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'C}$

- Montrer que les droites  $PB$  et  $D'P'$  sont parallèles.
- Montrer que  $PB$  et  $A'D$  ont un point  $Q$  en commun.
- Montrer que  $PQ$  est la perpendiculaire commune aux droites  $AC'$  et  $A'D$ .



Première méthode

a)  $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'P'} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'P'}$   
 $\Rightarrow BP$  et  $D'P'$  sont parallèles.

b)  $BP$  et  $D'P'$  sont dans le plan  $ABD'C'$  qui coupe perpendiculairement la face  $ADD'A'$  selon  $AD'$ . Dans le triangle  $AP'D'$ ,  $P$  est le milieu de  $AP'$ .  
 $\Rightarrow Q$  est le milieu de  $AD'$ . Mais  $Q$  appartient aussi à la diagonale  $A'D$   
 $\Rightarrow Q = PB \cap A'D$

c)  $A'D \perp \text{plan } ABC'D'$

donc 1)  $BQ \perp A'D$

2)  $\text{plan } A'DB \perp \text{plan } ABC'D' \Rightarrow AC' \perp \text{plan } A'DB \Rightarrow AC' \perp BQ$

Donc  $PQ$  est la perpendiculaire commune aux droites  $AC'$  et  $A'D$

## Deuxième méthode

a) Soit un repère placé en  $A$ , d'axes  $AB$ ,  $AD$  et  $AA'$ . On prend l'arête du cube comme longueur unitaire.  $\Rightarrow B:(1,0,0); D:(0,1,0); A':(0,0,1)$

$$\Rightarrow D':(0,1,1) \text{ et } C':(1,1,1)$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'} \Rightarrow P:\frac{1}{3}(1,1,1) \text{ et } P':\frac{2}{3}(1,1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PB} = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{D'P'} = \frac{2}{3}(1,1,1) - (0,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1) \end{cases} \rightarrow PB \parallel D'P'$$

b) Calculons l'équation de  $PB$  de vecteur directeur  $(2, -1, -1)$

$$\Rightarrow PB \equiv \frac{x-1}{2} = -y = -z$$

La droite  $A'D$  contient les points  $A':(0,0,1)$  et  $D:(0,1,0) \Rightarrow A'D \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$

$$PB \cap A'D \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ y=z \\ x=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \text{une seule solution } Q:\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{c) } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{AC'} = (1,1,1) \text{ et } \overrightarrow{A'D} = (0,1,0) - (0,0,1) = (0,1,-1)$$

$$\text{On vérifie : } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 \text{ et } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$$

$\Rightarrow PQ$  est la perpendiculaire commune à  $AC'$  et  $A'D$