Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 9

EXGSE090 – EXGSE099

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 08

EXGSE090 - FPMS, Mons, 2002, Groupe A

Considérons un cube $ABCDA'B'C'D'$.

a) Démontrer que la diagonale AC' du cube définit avec les trois arêtes issues de A des angles égaux ;

b) Calculer la valeur de cet angle ;

c) Démontrer que les projections des arêtes AB, $B'C'$ et CC' sur AC' ont même longueur ;

Solution proposée par Steve Tumson

a)

Le plus simple selon moi, est de se fixer un repère cartésien dont l'origine est le point A, l'axe des OX est la droite AB, l'axe des OY est la droite AD et l'axe des OZ est la droite AA'. Travailler ensuite vectoriellement facilite beaucoup la démarche de réflexion.

Les coordonnées des vecteurs qui nous intéressent sont :

$$\overrightarrow{AC'}=(a,a,a) \qquad \overrightarrow{AB}=(a,0,0) \qquad \overrightarrow{AD}=(0,a,0) \qquad \overrightarrow{AA'}=(0,0,a)$$

Les angles entre ces vecteurs sont donnés à l'aide du produit scalaire :

$$\widehat{BAC'}=Arc\cos\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC'}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|} \quad \widehat{DAC'}=Arc\cos\frac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC'}}{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|} \quad \widehat{A'AC}=Arc\cos\frac{\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{AC'}}{\left\|\overrightarrow{A'A}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|}$$

$$\to \begin{cases} \left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\left\|\overrightarrow{DA}\right\|=\left\|\overrightarrow{A'A}\right\|=a \\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{AC'}=a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{BAC'}=\widehat{DAC'}=\widehat{A'AC}}$$

b)

$$\begin{cases} \widehat{A'AC}=Arc\cos\dfrac{\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{AC'}}{\left\|\overrightarrow{A'A}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|}=Arc\cos\dfrac{a^2}{a.\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|} \\ \left\|\overrightarrow{AC'}\right\|=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAC'}=\widehat{DAC'}=\widehat{A'AC}=Arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\simeq\boxed{54,74°}$$

c)

La projection d'un vecteur sur un autre s'obtient encore grâce au produit scalaire :

$$p_{\perp,AB\to AC'}=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|} \quad p_{\perp,AD\to AC'}=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|} \quad p_{\perp,AA'\to AC'}=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'}}{\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|}$$

Nous avons déjà montré que les produits scalaires étaient égaux, les projections le sont donc aussi :

$$p_{\perp,AB\to AC'}=p_{\perp,AD\to AC'}=p_{\perp,AA'\to AC'}=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'}}{\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|}=\frac{a^2}{\sqrt{3}a}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|}$$

---

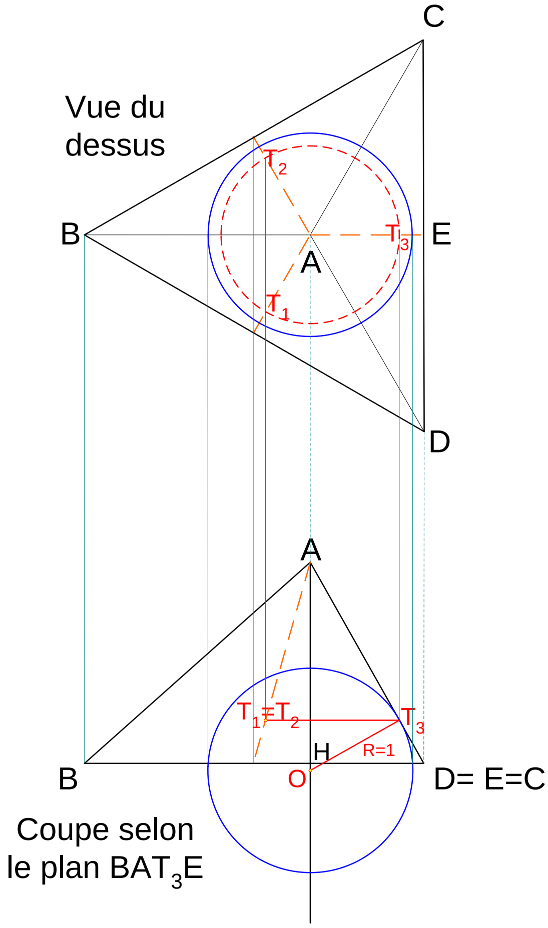
9 septembre 2008

EXGSE091 - FACSA, ULG, Liège – septembre 08

On place une sphère S de rayon 1 à l'intérieur d'un tétraèdre régulier $ABCD$, de façon à ce qu'elle soit tangente aux trois faces issues de A.

(a) Calculer la distance séparant le sommet A du centre O de S.

(b) Pour quelle longueur des arêtes du tétraèdre $ABCD$ la sphère S est-elle tangente à ses quatre faces?

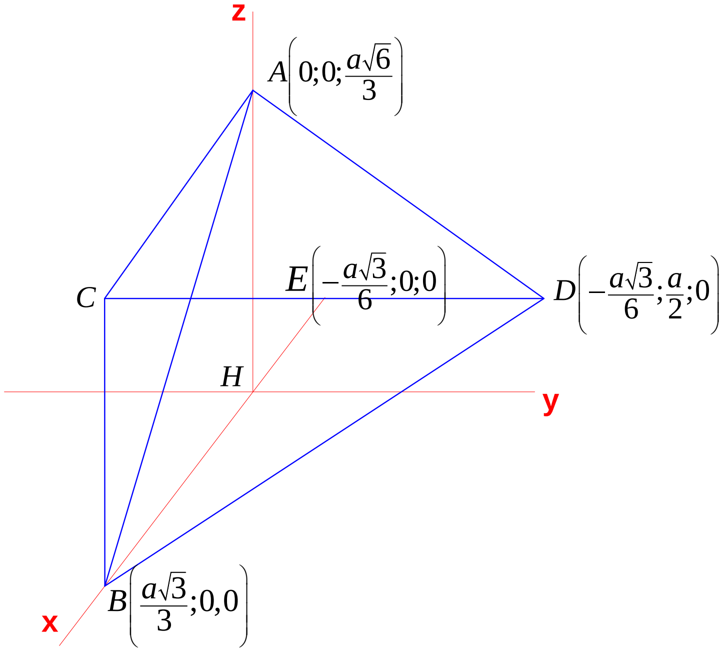


Pour de simples raisons de symétrie, le centre O de la sphère est sur la hauteur AH du tétraèdre.
Les points de tangence aux trois faces $(T_1;T_2;T_3)$ sont situés sur les bissectrices de l'angle A dans les faces correspondantes. Par exemple, T_3 est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DAC}$.

Dans la vue en coupe, on remarque que le triangle AT_3O est rectangle :

$\rightarrow |AO| = \sqrt{|AT_3|^2 + |OT_3|^2} = \sqrt{|AT_3|^2 + 1}.$

Le problème se ramène donc à trouver $|AT_3|$.



a) Plaçons le tétraèdre dans un système d'axe tel que défini sur la figure 2.
Si a est la longueur d'une des arêtes du tétraèdre. Notons que H est aussi le centre de gravité du triangle BCD.

On déduit facilement : $$\begin{cases} |AE| = |BE| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ |HB| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ |HE| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ |AH| = \sqrt{|BA|^2 - |HB|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Les triangles AT_3O et AHE sont semblables :

$$\frac{|AT_3|}{|OT_3|} = \frac{|AH|}{|HE|} \to |AT_3| = |OT_3| \frac{|AH|}{|HE|} = 1 \times \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} . \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

Finalement, $|AO| = \sqrt{|AT_3|^2 + 1} = \sqrt{8+1} = \boxed{3}$

b) Pour déterminer la valeur de a afin que la sphère S soit tangente à ses quatre faces, il faut que

$$|AH| = |AO| + R = |AO| + 1$$

$$\to |AH| = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 3 + 1 = 4 \to a = \frac{12}{\sqrt{6}} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

EXGSE092 - FACS, ULB, Bruxelles – septembre 08

La base carré d'une pyramide $SABCD$ repose sur un plan horizontal. S est le sommet de la pyramide et toutes les arêtes ont même longueur L. Par S, on mène la parallèle p au côté AB du carré $ABCD$ et l'on reporte sur p, de part et d'autre de S, une longueur L. On nomme E et F les points ainsi obtenus (E est du côté de DA)

On demande :

a) De montrer que les tétraèdres $FBCS$ et $EADS$ sont réguliers.

b) De déterminer la nature du solide formé de la pyramide et des deux tétraèdres.

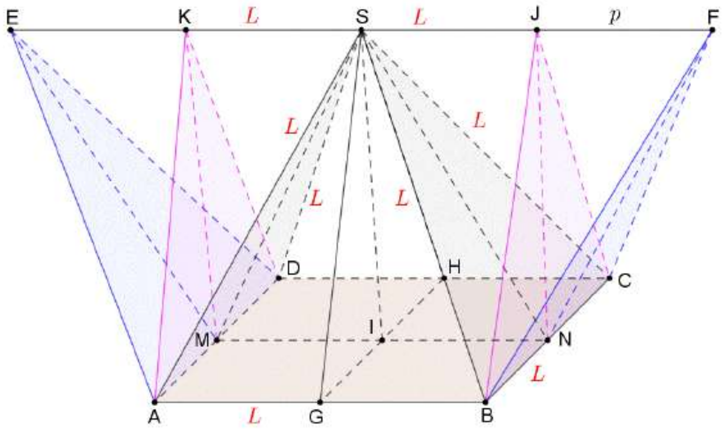
On déterminera en particulier

1) le nombre, la forme et l'aire des faces de ce solide;

2) le nombre de ses arêtes et sommets;

3) les angles des dièdres formés par les faces, en fonction de l'angle a que font les plans $ABCD$ et SAB

4) le volume du solide.



a) Abaissons les perpendiculaires SG sur AB et BJ sur SF. Le quadrilatère $SGBJ$ est un alors rectangle et donc $|GB| = |SJ| = \frac{L}{2}$

J est alors le milieu de SF.

Les triangles rectangles SJB et FJB sont égaux car ils ont un côté égal et un côté en commun (JB)

$\Rightarrow |SB| = |BF| = L$

De même on démontre que $|SC| = |CF| = |SA| = |AE| = |SD| = |DE| = L$

Les tétraèdres $ESDA$ et $SFCB$ sont donc réguliers.

b) Etablissons la valeur de quelques grandeurs qui nous seront utiles par la suite.

$$|SG| = |SH| = |SM| = |SN| = |NF| = |ME| = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$|SI| = |MK| = |NJ| = \sqrt{|SG|^2 - |GI|^2} = \sqrt{\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

1) Les faces : Nous avons 5 faces $(f = 5)$

1 carré $ABCD$ $\qquad S_{ABCD} = L^2$

2 trapèzes isocèles $ABFE$ et $DCFE$ $\qquad S_{ABFE} = \frac{1}{2}(|AB| + |EF|).|SG|$

$$= \frac{1}{2}(2L + L).\frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{4}$$

2 triangles isocèles ADE et BCF $\qquad S_{ADE} = \frac{1}{2}|AD|.|ME| = \frac{1}{2}L.\frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$

2) Nombre d'arêtes : $r = 9$

Nombre de sommets : $s = 6$

Nous pouvons alors vérifier la relation d'Euler : $\quad s - r + f = 2 \rightarrow 6 - 9 + 5 = 2$

Voir la note en annexe ci-dessous.

3) Calcul des dièdres

Désignons par a les dièdres formés par les plans $ABCD / SAB$ et $ABCD / SDC$

Désignons par b les dièdres formés par les plans $ABCD / EAD$ et $ABCD / FBC$

Désignons par c tous les dièdres, par exemple le dièdre formé par les plans $EFBA / EFCD$

i) Triangle rectangle SIG : $\cos a = \frac{|GI|}{|SG|} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \boxed{a = 54.74°}$

ii) Triangle rectangle KMA : $\sin\frac{c}{2} = \frac{|MA|}{|AK|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \boxed{c = 70.528° = 1.29a}$

iii) Et enfin , $\boxed{b = a + c = 2.29a = 125.264°}$

4) Calcul du volume

Celui-ci peut se faire de plusieurs façons. Donnons deux exemples :

i) $V_{ABCDEF} = V_{SABCD} + 4 \times V_{ADKS}$

Pyramide : $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times |\ SI\ | = \frac{1}{3} \times L^2 \times \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{L^3\sqrt{2}}{6}$

Tétraèdre : $V_{ADKS} = \frac{1}{3} S_{ADK} \times |\ KS\ | = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times |\ AD\ | \times |\ MK\ | \times |\ KS\ |$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times L \times \frac{L\sqrt{2}}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{L^3\sqrt{2}}{24}$$

$$\to V_{ABCDEF} = \frac{L^3\sqrt{2}}{6} + 4 \times \frac{L^3\sqrt{2}}{24} = \boxed{\frac{L^3\sqrt{2}}{3}}$$

ii) $V_{ABCDEF} = V_{ABCDKL} + 2 \times V_{ADKE}$

Prisme à base triangulaire : $V_{ABCDKL} = S_{ADK} \times |\ AB\ | = \frac{1}{2} \times |\ AD\ | \times |\ MK\ | \times |\ AB\ |$

$$= \frac{1}{2} \times L \times \frac{L\sqrt{2}}{2} \times L = \frac{L^3\sqrt{2}}{4}$$

Tétraèdre : $V_{ADKE} = V_{ADKS} = \frac{L^3\sqrt{2}}{24}$

$$V_{ABCDEF} = \frac{L^3\sqrt{2}}{4} + 2 \times \frac{L^3\sqrt{2}}{24} = \frac{L^3\sqrt{2}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{L^3\sqrt{2}}{3}}$$

Annexe

http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Descartes-Euler

Formulé par Leonhard Euler en 1752, le théorème de Descartes-Euler (également appelé relation d'Euler) énonce une formule mathématique qui relie le nombre de côtés, de sommets, et de faces dans un polyèdre du genre 0. Un polyèdre de genre 0 est un polyèdre sans trou : en supprimant une face on obtient une surface simplement connexe ; un polyèdre convexe est de genre 0.
Il semble cependant que Descartes ait prouvé une relation analogue dans un traité jamais publié.
C'est la raison pour laquelle cette relation porte ce double nom.

Énoncé

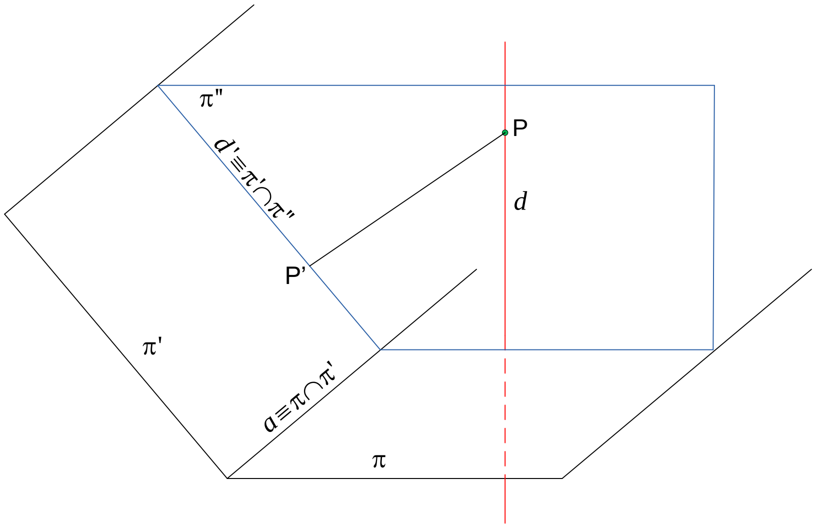
Soit un polyèdre de genre 0, on note :

- f le nombre de faces de celui-ci,
- r le nombre d'arêtes de celui-ci,
- s le nombre de sommets de celui-ci,

On peut démontrer qu'on a toujours : $s - r + f = 2$

EXGSE093 - FACSA, ULG, Liège – juillet 09

On considère deux plans sécants π et π', et une droite d perpendiculaire à π.
Démontrer que la projection de d sur π' est perpendiculaire à l'intersection de π et π'.
(*Rappel* : La projection orthogonale de d sur π' est l'intersection de π' et du plan perpendiculaire à π' incluant d)



Désignons par π'' le plan perpendiculaire à π' incluant d.
d' est alors l'intersection de π' et π''.
Soit P un point quelconque de d. Sa projection sur π' est P'.
Alors :

$$\begin{cases} \text{si } d \perp \pi \to d \underline{\perp} a & (\underline{\perp} = \text{ orthogonale}) \\ PP' \perp \pi' \to PP' \underline{\perp} a \end{cases}$$

Ce qui implique que $a \perp \pi''$ et donc $a \perp d'$ qui appartient à π''

---

20 décembre 2008

EXGSE094 - FACSA, ULG, Liège – juillet 09
FACS, ULB, Bruxelles – juillet 2011

Enoncé de FACSA

On donne un cube de sommets $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (voir figure)

(a) Démontrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.

(b) Démontrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$

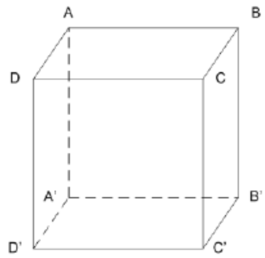
(c) Si on désigne par T la projection orthogonale du point C sur le plan $AB'D'$ (c'est-à-dire le pied de la droite perpendiculaire à ce plan issue de C), démontrer que la longueur du segment $[A'T]$ est égale au tiers de la longueur du segment $[A'C]$

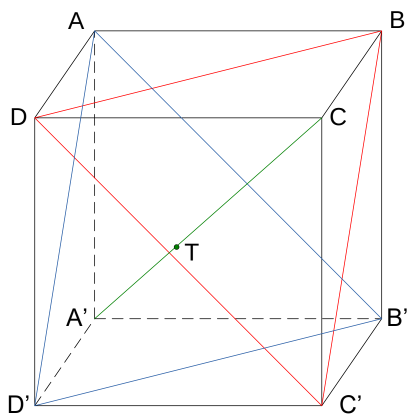
Enoncé de FACS

Identique à celui de FACSA avec les points suivants en plus:

(d) Calculer le volume de la région intérieure au cube et comprise entre les plans $AB'D'$ et $C'DB$

(e) Calculer le volume de la sphère dont le centre coïncide avec celui du cube et qui est tangente aux plans $AB'D'$ et $C'DB$





$$(a)\left.\begin{array}{l} AB'C'D \text{ est un rectangle } \rightarrow DC'//AB' \\ ABC'D' \text{ est un rectangle } \rightarrow BC'//AD' \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Plans } AB'D' \text{ et } C'DB \text{ sont parallèles.}$$

$$(b)\left.\begin{array}{l} \text{Plan } DCB'A' \perp \text{ à la face } AA'D'D \rightarrow A'C \underline{\perp} AD' \\ \text{Plan } BCD'A' \perp \text{ à la face } ABB'A' \rightarrow A'C \underline{\perp} AB' \end{array}\right\} \rightarrow A'C \perp \text{ au plan } AB'D'$$

(c) Par calcul :

Soit a la longueur d'un côté du cube. Puisque $A'C \perp$ au plan $AB'D'$, T est la projection de A sur $A'C$.

$$\overline{AC} = a\sqrt{2} \Rightarrow \overline{A'C} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{AA'C} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'C}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{A'T}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A'A}\cos \widehat{AA'C}}{\overline{A'C}} = \frac{a\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

(d) Soit : Région intérieure $= RI = ABD'C'B'D'$; Pyramide $= P = A'AB'D' = CC'DB$ et C le cube.

$$V_{RI} = V_C - 2V_P = L^3 - 2\times\frac{1}{3}\times \underbrace{\frac{1}{3}\sqrt{3}L}_{\text{Hauteur de } P} \times \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}L\right)^2 \overbrace{\sin 60}^{=\sqrt{3}/2}}_{\text{Surface de la base de } P} = \frac{2}{3}L^3$$

(e) Soit S la sphère, R son rayon et O le centre.

$$R = \overline{OT} = \overline{OA'} - \overline{A'T} = \frac{\overline{A'C}}{2} - \frac{\overline{A'C}}{3} = \frac{\overline{A'C}}{6} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

$$V_S = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{54}L^3$$

20 décembre 2009. Modifié le 21 aout 2012

EXGSE095 - EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1

Un tétraèdre est un polyèdre qui possède 4 faces triangulaires, 6 arêtes et 4 sommets.
En d'autres termes, le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Un tétraèdre équilatéral est un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux.
De façon équivalente, un tétraèdre équilatéral est un tétraèdre dont les 6 arêtes ont la même longueur.

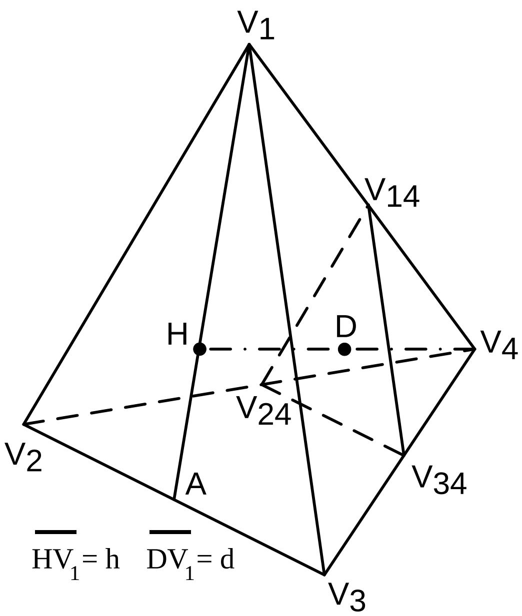
On considère un tétraèdre T, équilatéral de côté a. On note ses quatre sommets V_1, V_2, V_3 et V_4.
On considère le plan Π contenant les sommets V_1, V_2, et V_3.

1. Calculez h, la distance du point V_4 au plan Π.
2. On considère un plan Π' parallèle à Π qui coupe les arêtes V_1V_4, V_2V_4 et V_3V_4 du tétraèdre T en trois points, respectivement V_{14}, V_{24} et V_{34}. Le plan Π' est situé à une distance d du point V_4. Soit A l'aire du triangle $V_1V_2V_3$. Calculez l'aire A' du triangle $V_{14}V_{24}V_{34}$ en fonction de d, h et A.
3. Trouvez d, fonction de h, pour que le plan divise le tétraèdre en deux volumes égaux.

Note 1: Les trois parties de cette question peuvent être résolues indépendamment.
Il est donc possible de résoudre, par exemple, la partie 3 sans avoir résolu les deux autres.
Néanmoins, la solution à la partie 3 de laquestion peut être trouvée rapidement grâce au résultat de la partie 2.

Note 2 : Dans la partie 2, on **ne demande pas** de calculer A.

Note 3 : On vous demande de séparer lesréponses aux trois parties de la question par une ligne horizontale. On vous demande en outre d'entourer clairement vos réponses.



$\overline{HV_1} = h \quad \overline{DV_1} = d$

Soit H la projection de V_4 sur le plan Π. Traçons ensuite V_1H qui coupe V_2V_3 en A.

Appliquons Pythagore dans le triangle rectangle V_1V_2A : $\overline{V_1A} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Or H est aussi le centre de gravité du triangle équilatéral $V_1V_2V_3$. Donc : $\overline{V_1H} = \frac{2}{3}\overline{V_1A} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Appliquons maintenant Pythagore dans le triangle rectangle V_1HV_4 :

$$h = \overline{HV_4} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} \Rightarrow \boxed{h = a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Les triangles $V_1V_2V_3$ et $V_{14}V_{24}V_{34}$ sont semblables. Les aires des surfaces A et A' sont donc dans le rapport : $\frac{A'}{A} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \Rightarrow \boxed{A' = A\frac{d^2}{h^2}}$

Le volume V' est le double du volume V :

$$V = 2V' \Rightarrow \frac{Ah}{3} = 2.\frac{A'd}{3} \Rightarrow \frac{Ah}{3} = 2A\frac{d^2}{h^2}\frac{d}{3} \Rightarrow 2d^3 = 2h^3 \Rightarrow \boxed{d = \frac{h\sqrt[3]{4}}{2}}$$

Note : Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que : $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ et que $V' = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

EXGSE096 - EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 2

Un tétraèdre est un polyèdre qui possède 4 faces triangulaires, 6 arêtes et 4 sommets.
En d'autres termes, le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

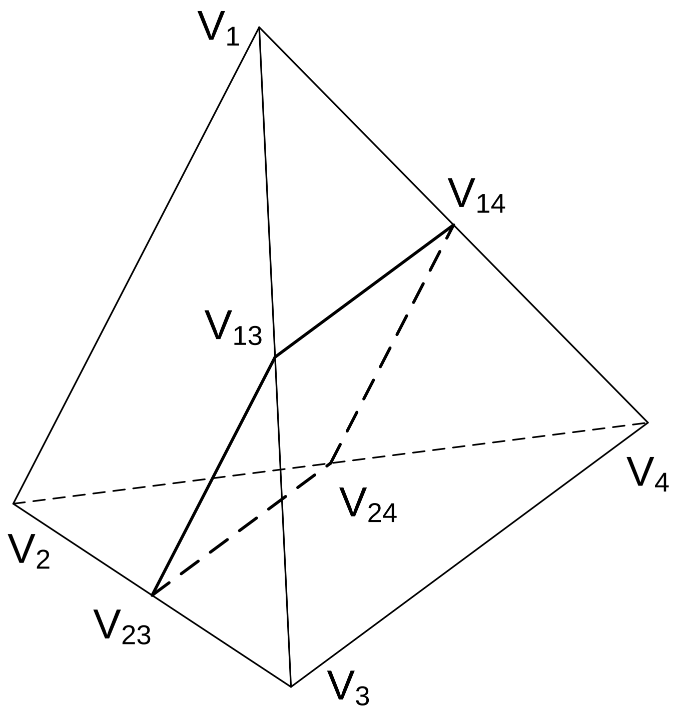
Un tétraèdre équilatéral est un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux.
De façon équivalente, un tétraèdre équilatéral est un tétraèdre dont les 6 arêtes ont la même longueur.

On considère un tétraèdre T, équilatéral de côté a. On note ses quatre sommets V_1, V_2, V_3 et V_4.
On note V_{ij} le point milieu de l'arête reliant le sommet V_i au sommet V_j.

1. Dessinez T en y faisant figurer les sommets V_1, V_2, V_3, V_4 et les 6 points milieux V_{ij},
2. Calculez le volume de T en fonction de a,
3. Démontrez que les points V_{23}, V_{13}, V_{14} et V_{24} sont coplanaires et que la figure plane P qu'ils forment en les reliant est un losange,
4. On effectue une coupe du tétraèdre T par le plan passant par les points V_{23}, V_{13}, V_{14} et V_{24}. Ce plan sépare le tétraèdre en deux régions R_1 et R_2. Calculez les volumes de R_1 et de R_2.

Note 1: Les parties 3 et 4 peuvent être résolues en utilisant la géométrie analytique mais les calculs sont assez longs. Raisonner en termes d'arguments géométriques permet de résoudre les parties 3 et 4 en quelques lignes.

Note 2 : On vous demande de séparer les réponses aux 4 parties de la question par une ligne horizontale. Pour les parties 2 et 4, entourez clairement vos réponses.



L'aire d'une face du tétraèdre (triangle équilatéral) est : $A = \frac{1}{2} a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

A l'exercice précédent, nous avons montré que la hauteur du tétraèdre est : $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$.

Considérons la face $V_1V_2V_3$. Le segment $[V_{13}V_{23}]$ joint les milieux des côtés $[V_1V_3]$ et $[V_2V_3]$.

$V_{13}V_{23}$ est donc parallèle à V_1V_2 et $\overline{V_{13}V_{23}} = \frac{\overline{V_1V_2}}{2} = \frac{a}{2}$. Pour la face $V_1V_2V_4$, nous avons aussi $V_{14}V_{24}$ parallèle à V_1V_2 et $\overline{V_{14}V_{24}} = \frac{\overline{V_1V_2}}{2} = \frac{a}{2}$. Par transitivité, $V_{12}V_{23}$ et $V_{14}V_{24}$ sont parallèles donc coplanaires, et, $\overline{V_{13}V_{23}} = \overline{V_{14}V_{24}} = \frac{a}{2}$.

Pour les faces $V_1V_3V_4$ et $V_2V_3V_4$, nous avons de la même façon : $V_{13}V_{14}$ et $V_{23}V_{24}$ parallèles et coplanaires, et, $\overline{V_{13}V_{14}} = \overline{V_{23}V_{24}} = \frac{a}{2}$.

Nous concluons que les points $V_{13}, V_{14}, V_{23}, V_{24}$ sont coplanaires (plan P) et forment un losange.

Par simple symétrie, il est évident que le plan P divise le tétraèdre en deux volumes égaux :

$$\boxed{R_1 = R_2 = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}}$$

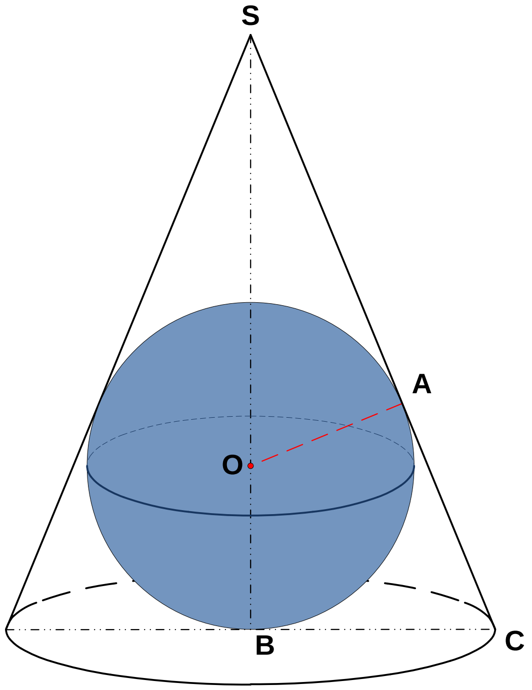
EXGSE097 - EPL, UCL, Louvain, septembre 2009

On considère un cône de hauteur H et dont la base est un cercle de rayon R

1. Quel est le rayon maximal r d'une sphère complètement incluse dans le cône.
2. Quelle est la taille c du côté du cube de volume maximal inclus dans le cône et dont une des faces repose sur la base du cône.

On demande d'exprimer r et c comme des fonctions de H et R. Il est conseillé de s'aider d'un dessin.

Solution proposée par Paul Etienne

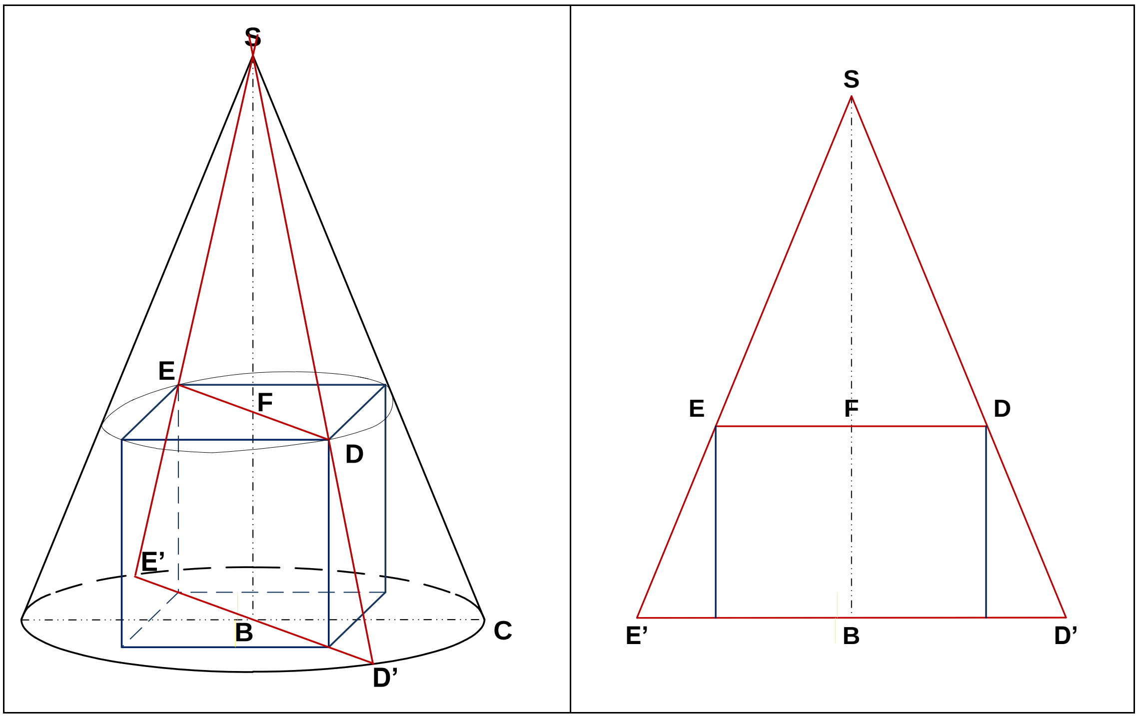


1) La sphère de volume maximal est incrite au cône.

$$\Delta(S,A,O)\,\mathbb{S}\,\Delta(S,B,C) \quad [\mathbb{S} = \text{semblables}]$$

$$\rightarrow \frac{\| SA \|}{\| SB \|} = \frac{\| OA \|}{\| CB \|} = \frac{\| SO \|}{\| SC \|} \rightarrow \frac{\sqrt{(H-r)^2 - r^2}}{H} = \frac{r}{H} = \frac{H-r}{\sqrt{H^2+R^2}}$$

La dernière égalité donne : $\boxed{r = \dfrac{HR}{R+\sqrt{H^2+R^2}}}$



2) Le plan de la face supérieure du cube de volume maximum coupe le cône suivant un cercle circonscrit à cette face supérieure :

Dans le plan (SED): $\dfrac{\| DE \|}{\| D'E' \|} = \dfrac{\| SF \|}{\| SB \|} \to \dfrac{c\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{H-c}{H}$

$\to Hc\sqrt{2} = 2RH - 2Rc \to \boxed{c = \dfrac{2RH}{2R + H\sqrt{2}}}$

EXGSE098 - FACSA, ULB, BRUXELLES, Juillet 2009

L'arête d'un cube mesure 18 mètres. Calculez le volume compris entre ce cube et sa sphère circonscrite (celle qui passe par les sommets du cube).

Volume du cube : $V_C = 18^3 m^3$

Diamètre de la sphère circonscrite : $D_S = 18\sqrt{3}\ m$

Volume de la sphère circonscrite : $V_S = \frac{\pi D_S^3}{6} = \frac{\pi}{6}\left(18\sqrt{3}\right)^3$

Volume entre la sphère et le cube :

$$\Delta V = V_S - V_C = 18^3 - \frac{\pi}{6}\left(18\sqrt{3}\right)^3 = 18^3\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - 1\right) \simeq \boxed{10035{,}1\, m^3}$$

Soit $\dfrac{18^3\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}-1\right)}{\dfrac{\pi}{6}\left(18\sqrt{3}\right)^3} = \dfrac{\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}-1}{\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}} = 63.2\%$ du volume de la sphère

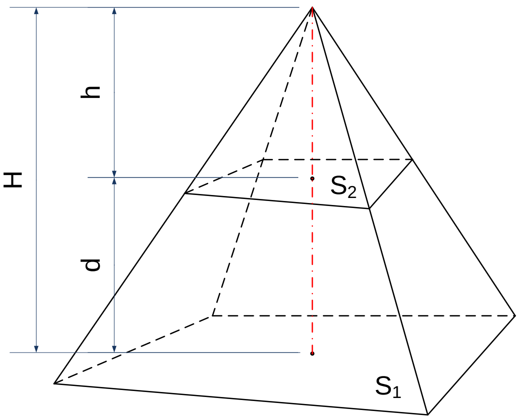
---

Le 28 juin 2010

EXGSE099 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 1.

Soit une pyramide de hauteur H qui est coupée par un plan parallèle à sa base, on vous demande :

1. de déterminer la distance du plan par rapport à la base pour que le volume du tronc de pyramide ainsi formé soit la moitié du volume total de la pyramide;
2. d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



$$\left.\begin{array}{l}\text{Petite pyramide} \quad : V_2 = \frac{1}{3}hS_2 \\ \text{Grande pyramide} : V_1 = \frac{1}{3}HS_1\end{array}\right\} \to V_2 = \frac{1}{2}V_1 \to \frac{1}{3}hS_2 = \frac{1}{6}HS_1 \to h = \frac{1}{2}H\frac{S_1}{S_2} \qquad (1)$$

$$\text{Or : } \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{S_2}{S_1} \to S_2 = S_1\frac{h^2}{H^3} \qquad (2)$$

$$\text{De } (1) \text{ et } (2) : h = \frac{1}{2}H\frac{\cancel{S_1}}{\cancel{S_1}\frac{h^2}{H^2}} \to h = \frac{1}{2}H.\frac{H^2}{h^2} \to h = H\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Finalement : } d = H - h = H - H\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \to \boxed{d = H\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)}$$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

Il suffit de remarquer que les deux pyramides sont homothétiques :

$$V_2 = \frac{1}{2}V_1; \qquad \text{donc} \quad h = H\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

D'où $\quad d = H - H\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = H\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)}$

---

15 Aout 2010. Modifié le 5 septembre 2010 (CALLEWAERT Marc-Antoine). Modifié le 13 janvier 2011 (Nicole BERCKMANS)