Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 0

EXGSP000 – EXGSP009

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

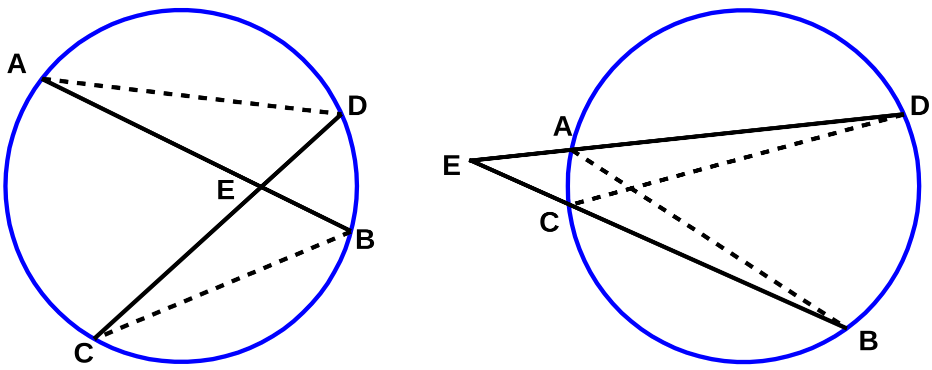
EXGSP001 - Rappels.

a) Si d'un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.

b) Si par un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

c) Réciproque de a) : Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C et D deux points de la seconde ; si $EA.EB = EC.ED$, alors les quatre points $ABCD$ appartiennent à une même circonférence.

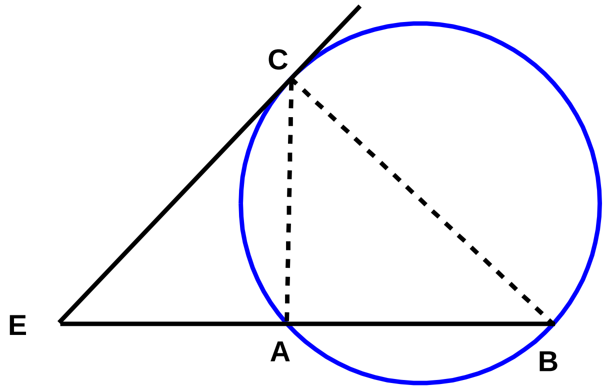
d) Réciproque de b) : Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C un point de la seconde ; si $EA.EB = EC^2$, alors les trois points A, B, C appartiennent à une circonférence tangente en C à EC.



a) Il y a deux cas selon que E est intérieur ou extérieur à la circonférence.
La démonstration est la même dans les deux cas.

Tracons AD et BC.
Les angles AED et BEC sont égaux car opposés par le sommet.
Les angles D et B sont égaux car ils interceptent le même arc.
$\Rightarrow$ Les triangles AED et BCE sont semblables et donc :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{EA.EB = EC.ED}$$



b) Les triangles EAC et ECB sont semblables, donc :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} \quad \rightarrow \quad \boxed{EC^2 = EA.EB}$$

c) En effet, la circonférence qui passe par A, B et C coupe la droite EC en un point D' tel que :

$$EA.EB = EC.ED'$$

Cette relation comparée avec la relation donnée montre que $ED = ED'$ et par conséquent D' est confondu avec D.

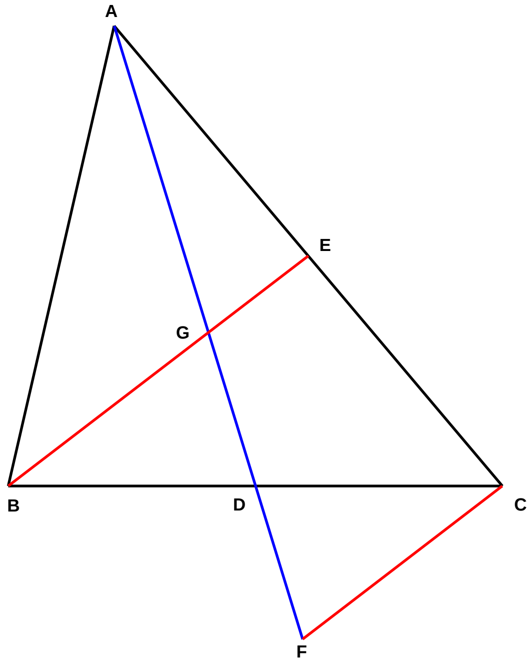
d) Supposons que la circonférence passant par A, B et C coupe la droite EC en un second point C'; on aurait :

$$EA.EB = EC.EC' \quad \text{or} \quad EA.EC = EC^2$$

$\Rightarrow \quad EC' = EC$ et donc C' est confondu avec C.

EXGSP002 - Rappels.

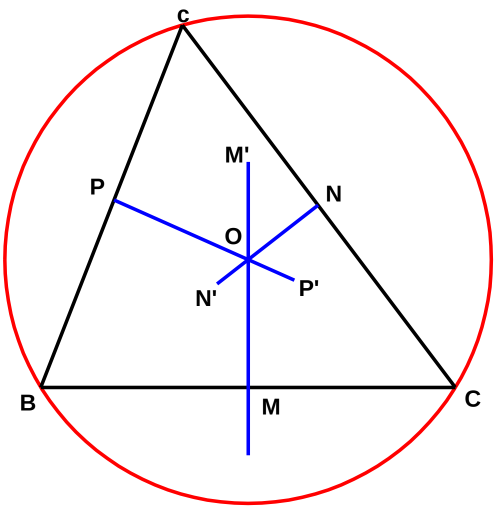
Les médianes d'un triangle se coupent en un même point, situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir des sommets du triangle.



Considérons les médianes AD et BE qui se coupent au point G.
Par le point C, traçons la parallèle à BE qui rencontre le prolongement de AD en F.
Les deux triangles BDG et CDF sont égaux, car ils ont un coté égal et deux angles égaux $\Rightarrow$ $GD = DF$.
Or CF est parallèle à BGE, et comme E est le milieu de AC,
G est le milieu de AF.
Par conséquent DG vaut le tiers de AD.

EXGSP003. - Rappel

Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point, équidistant des trois sommets



Soit O le point d'intersection des médiatrices de BC et CA.

O est équidistant de B et C.

O est équidistant de A et C

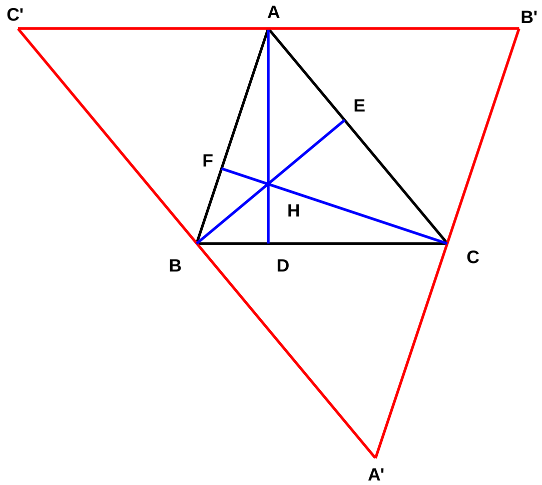
$\Rightarrow$ O est equidistant de B et A et donc O appartient à la médiatrice de BA.

Par conséquent, les trois médiatrices d'un triangle concourent en un même point équidistant des trois sommets.

Ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle.

EXGSP004 – Rappel.

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.



Par les sommets A, B et C du triangle, traçons les parallèles aux côtés opposés du triangle. On obtient un nouveau triangle $A'B'C'$.
Par construction $AB' = BC$ car $ABCD'$ est un parallèlogramme.
De même : $AC' = BC$.
Par conséquent, A est le milieu de $B'C'$, et AD perpendiculaire à BC, l'est aussi à $B'C'$, parallèle à BC.
$\Rightarrow$ AD est médiatrice de $B'C'$.
De même, on a BE médiatrice de $C'A'$ et CF médiatrice de $A'B'$.
Donc, les trois hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$. Elles se coupent en un même point H.

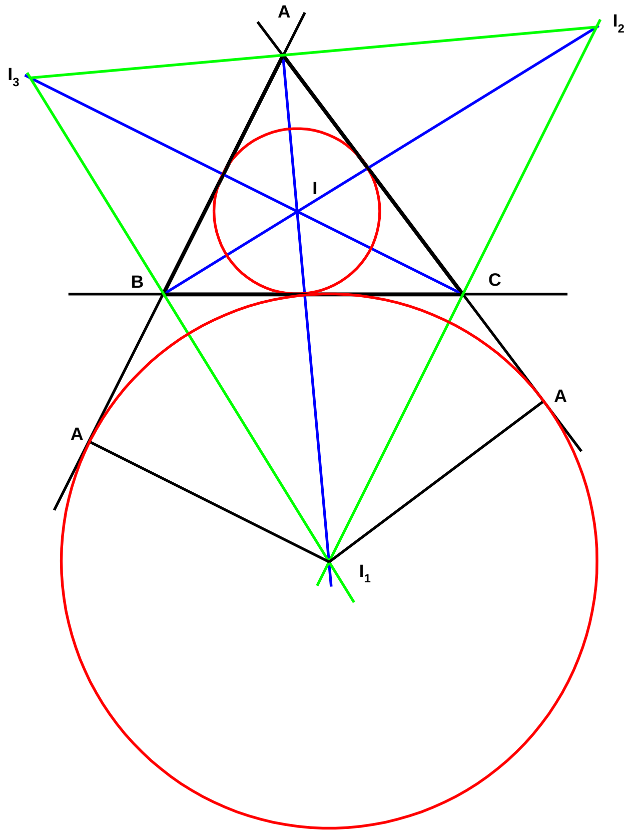
Le triangle ABC est appelé le <u>complémentaire</u> de $A'B'C'$ et $A'B'C'$ est l'<u>anticomplémentaire</u> de ABC.

EXGSP005 – Rappel.

Dans un triangle

1°) les bissectrices des trois angles se coupent en un même point.

2°) la bissectrice d'un angle intérieur et les bissectrices des angles extérieurs non adjacents se coupent en un même point.



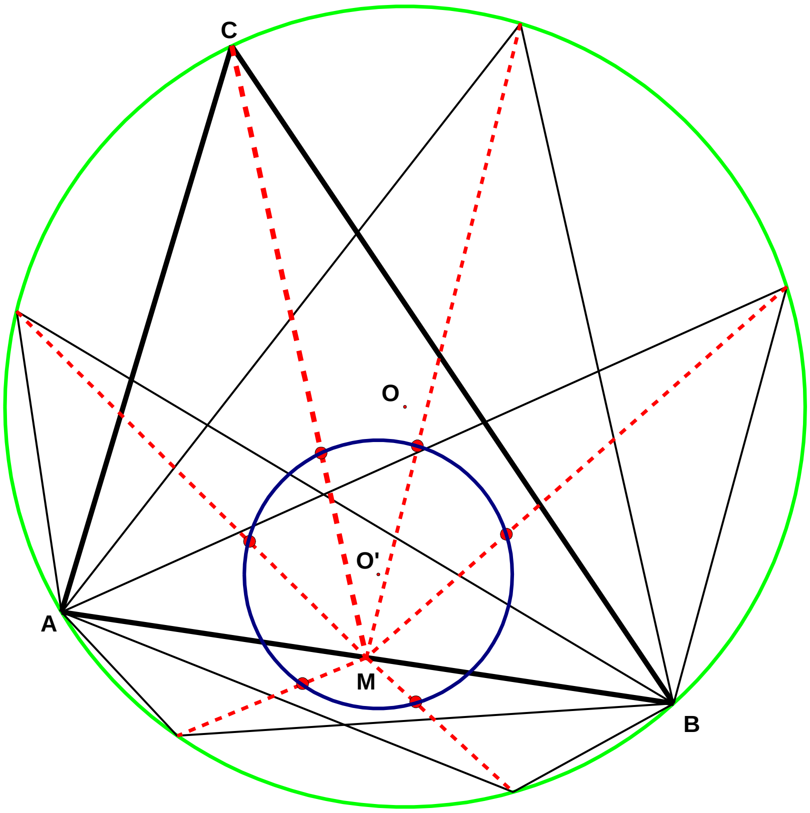
1) Traçons les bissectrices des angles B et C du triangle ABC.
Elles se coupent en I, intérieur au triangle.
$I \in$ à la bissectrice de $B \Rightarrow I$ est équidistant de BC et de BA
$I \in$ à la bissectrice de $C \Rightarrow I$ est équidistant de CB et de CA.
Par conséquent, I est équidistant de AB et AC, il est donc sur la bissectrice de l'angle A.
$\Rightarrow$ les bissectrices des trois angles intérieurs d'un triangle se coupent en un même point.
Le point I est le centre du <u>cercle inscrit</u> au triangle.

2) Soient les bissectrices des angles CBE et BCD.
Comme les angles CBE et BCD ont une somme inférieure à quatre droits, leurs moitiés ont une somme inférieure à deux droits.
$\Rightarrow$ Les bissectrices de CBE et de BCD se coupent en un point I_1 extérieur au triangle ABC et intérieur à l'angle A.
On établit comme au point 1) que I_1 est equidistant des côtés AB et AC et que, par suite, il appartient à la bissectrice de l'angle A.
$\Rightarrow$ La bissectrice d'un angle intérieur et les bissectrices des angles extérieurs non adjacents se coupent en un même point.

Le triangle ABC est le <u>triangle orthique</u> de $I_1I_2I_3$.
Le triangle $I_1I_2I_3$ est l'<u>antiorthique</u> de ABC.

EXGSP006 – Mons, questions-types 2000-2001. Louvain, Septembre 2000. Espace Math.

Considérons un triangle ABC inscrit dans un cercle.
Quel est le lieu du centre de gravité du triangle lorsque le sommet C se déplace sur le cercle ?



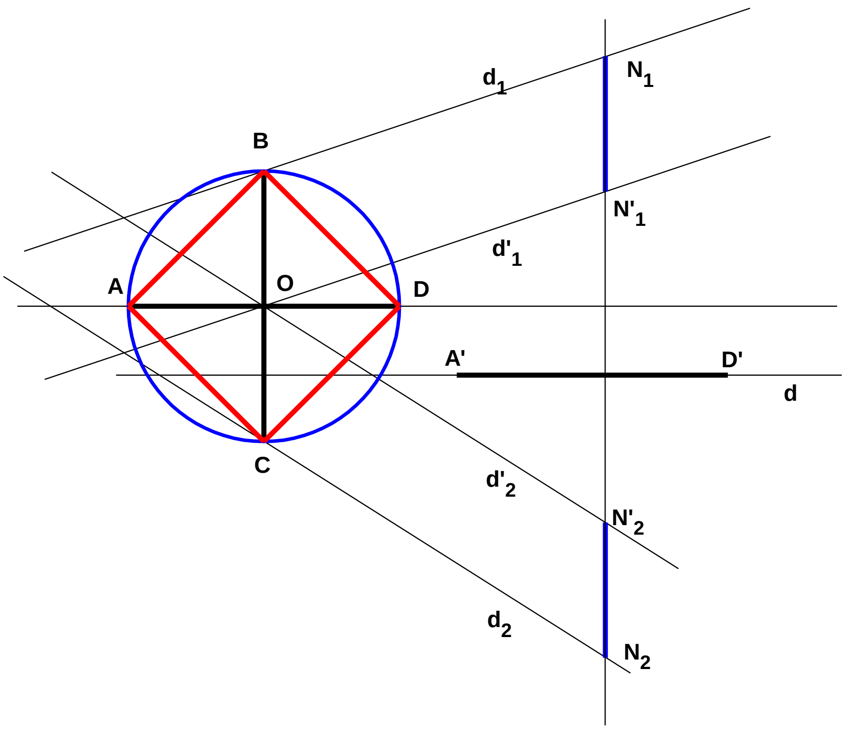
Le centre de gravité du triangle ABC est le point de concours des médianes.
Si M est le milieu de AB, et G le centre de gravité, on a

$$MG = \frac{1}{3} MC.$$

Par conséquent G est l'image de C par l'homothétie de rapport 1/3 et de centre M.
Or l'homothétie d'un cercle est un cercle.
$\Rightarrow$ Le lieu cherché est un cercle, dont le centre est O', image de O, et son rayon est égal au tiers du cercle donné.

EXGSP007 – Mons, questions-types 2000-2001.

Construire un carré connaissant le support de la diagonale AD, sachant que les sommets B et C appartiennent à deux droites données $(d_1 \text{ et } d_2)$



Soit N_1N_2 perpendiculaire à la direction d donnée.

Soient $N_1N'_1 = N_2N'_2 = \frac{1}{2}AD$

On trace $d'_1 // d_1$ et $d'_2 // d_2$.

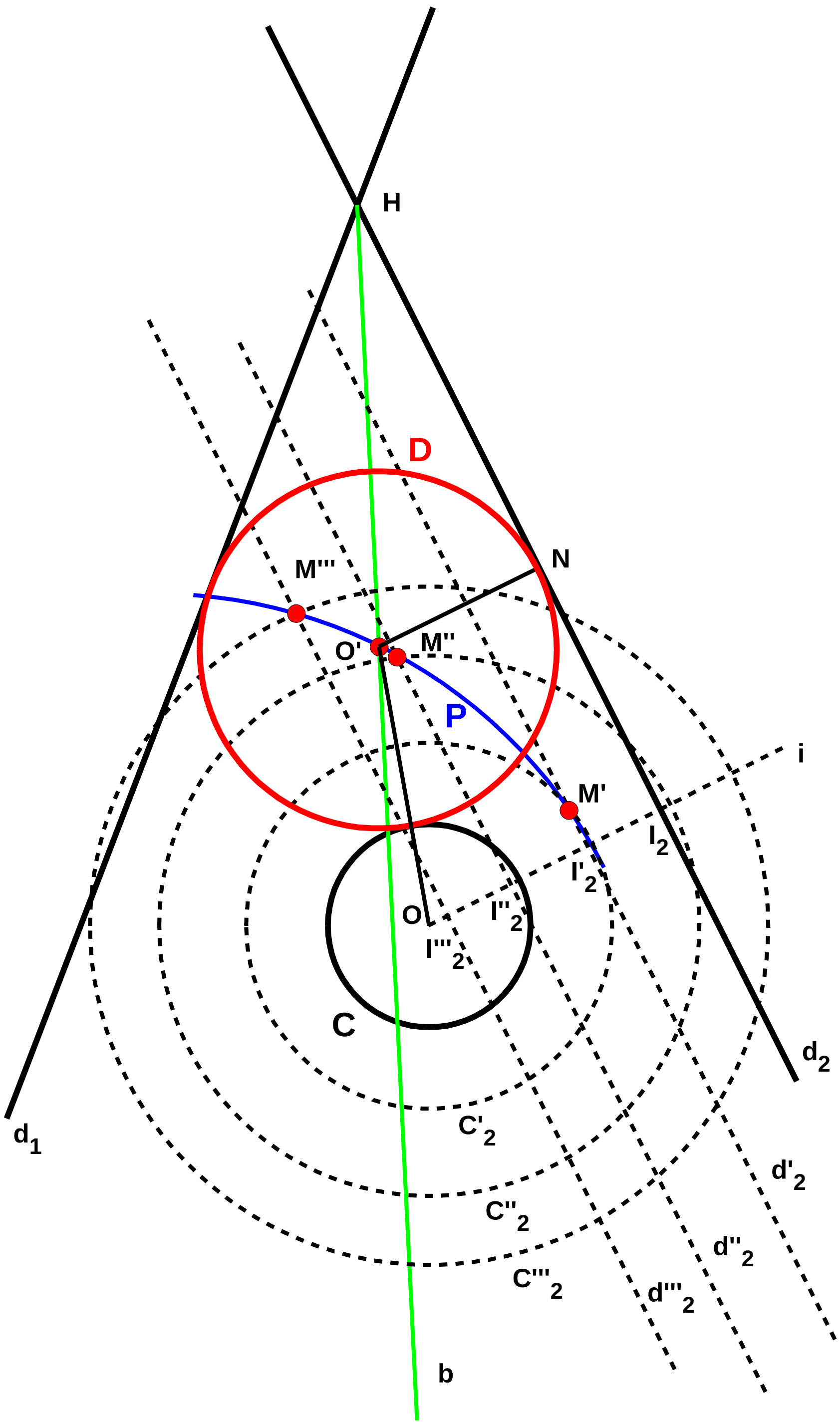
d'_1 et d'_2 se coupent en O, centre du carré.

Avec O pour centre on trace un cercle de diamétre égal à AD.

Le cercle coupe d_1 en B et d_2 en C, ce qui détermine le carré cherché.

EXGSP008 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Construire un cercle tangent à un cercle donné et à deux droites données.
Discuter les solutions.



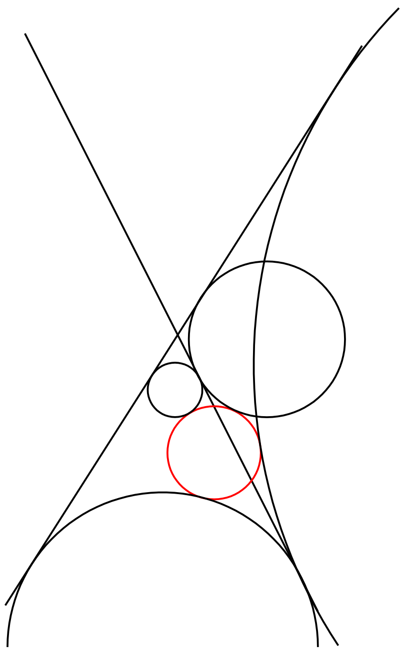
Le lieu des points équidistants de deux droites sécantes est la bissectrice de l'angle formé par les deux droites.

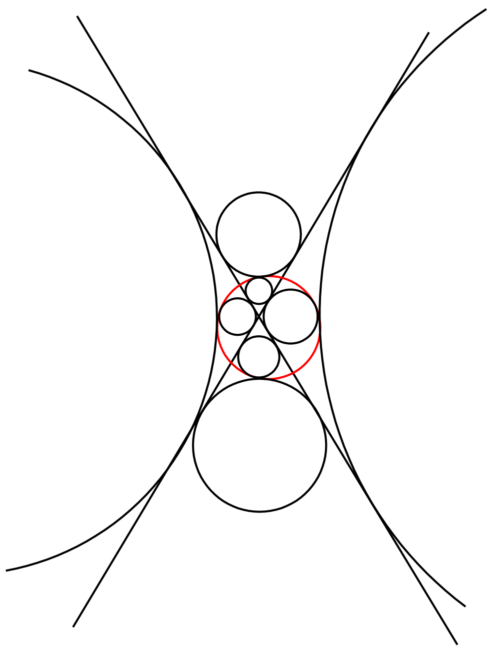
Le lieu des points équidistants d'une droite et d'un cercle est une parabole. (Voir EXGAP022).

Pour construire la parabole:
On trace $d'_2 // $ à d_2 à une distance k.
On trace C'_2 cercle de centre O et de rayon $r+k$
$\Rightarrow M' \equiv C'_2 \cap d'_2$
On recommence pour obtenir les autres points.

O' est l'intersection de la parabole et de la bissectrice,
ce qui permet de tracer le cercle.
On notera qu'il existe un deuxième cercle correspondant
à la deuxième branche de la parabole.

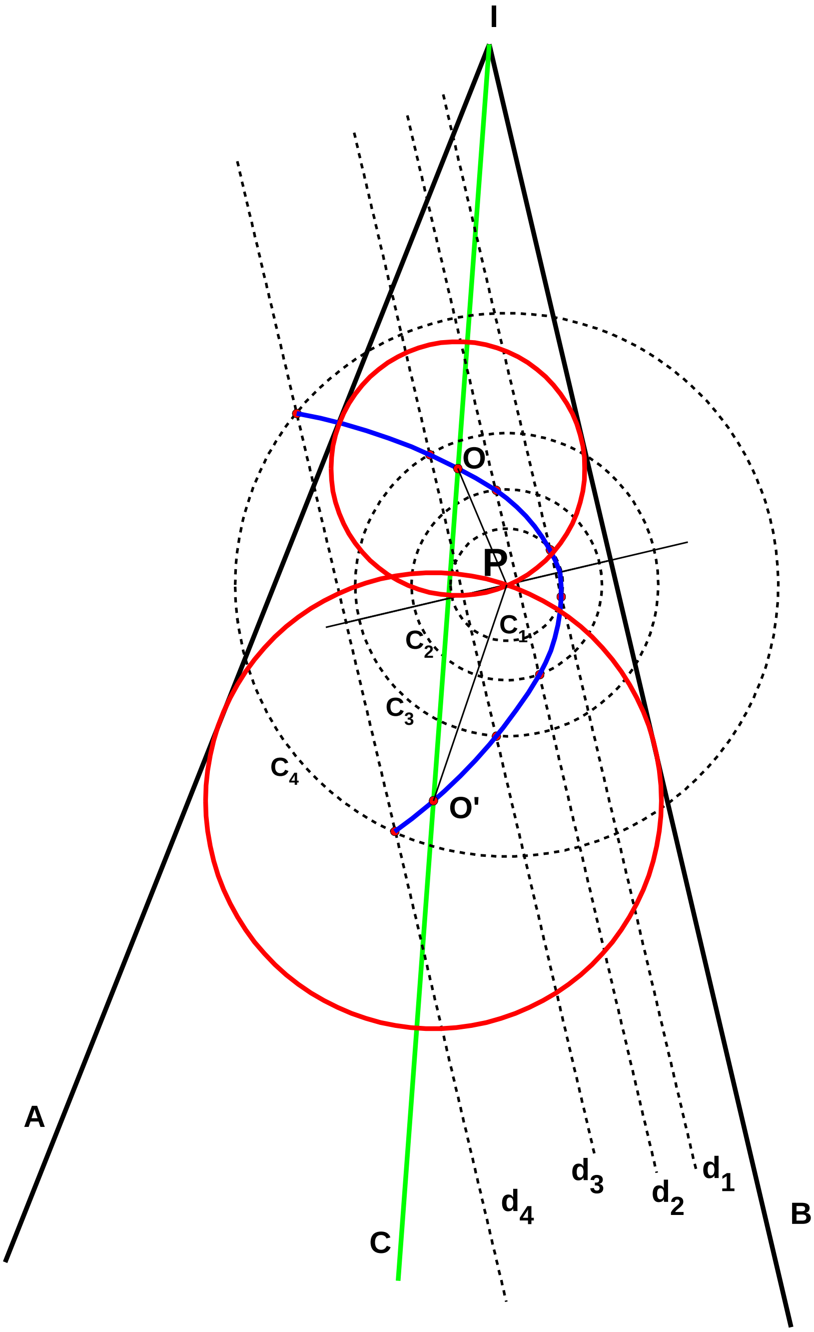
Les figures suivantes donnent différentes possibilités.
On pourra avoir jusque 8 cercles.





EXGSP009 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Soient deux segments IA et IB ; l'angle IAB est supposé aigu.
Entre ces deux segments, on localise un point P quelconque n'appartenant ni à IA, ni à IB.
Construire un ou plusieurs cercles (discuter) passant par P et tangent(s) à la fois à IA et à IB. Pourrait-on trouver deux cercles tangents entre eux ?



Le lieu des points équidistants de deux droites sécantes est la bissectrice de l'angle formé par les deux droites.

Le lieu des points équidistants d'une droite et d'un point est une parabole. (Définition d'une parabole)

Pour construire la parabole:
On trace $d_2 \,//\,$ à IA à une distance k.
On trace C_2 cercle de centre O et de rayon k
$\Rightarrow\; M \equiv C_2 \cap d_2$
On recommence pour obtenir les autres points.

O et O' sont les intersections de la parabole et de la bissectrice, ce qui permet de tracer deux cercles.

Si le point P est situé sur la bissectrice les deux cercles seront tangents.