Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 1

EXGSP010 – EXGSP019

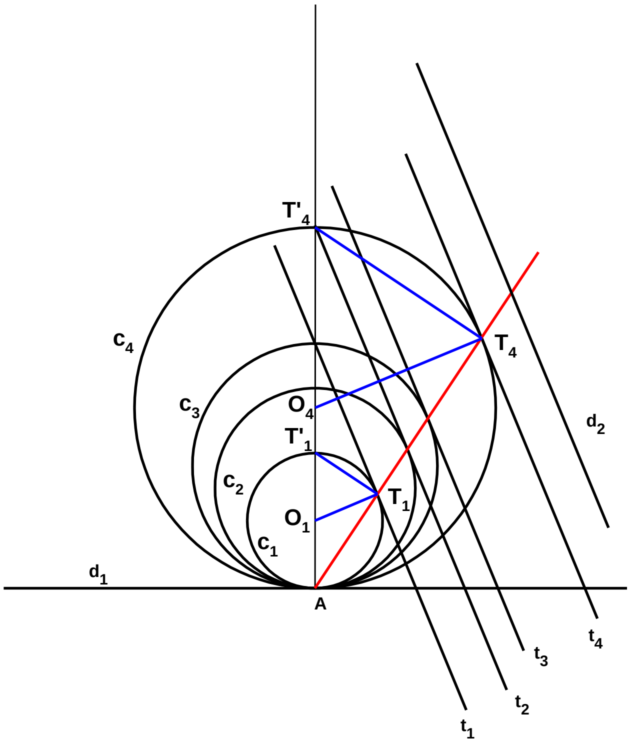
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXGSP010 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

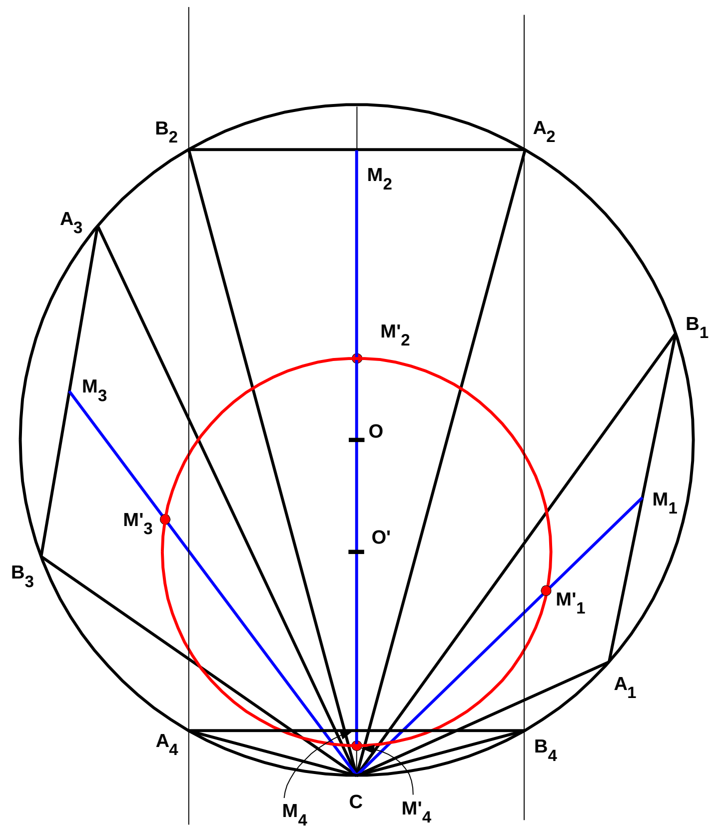
Soit un point fixe A d'une droite d_1 fixe. Soit l'ensemble des cercles tangents à A en d_1.
Soit l'ensemble des tangentes à ces cercles parallèles à une direction donnée d_2.
(direction $d_2 \neq$ direction d_1).
Quel est le lieu des points de contact de ces tangentes avec les cercles ?



$O_1T_1 \perp t_1$ donc à d_2 et $O_4T_4 \perp t_4$ donc à d_2 $\rightarrow$ $O_1T_1 // O_4T_4$
Les angles AO_1T_1 et AO_4T_4 sont par conséquent égaux.
Or l'angle $AO_1T_1 = 2 \times$ l'angle AT'_1T_1
et l'angle $AO_4T_4 = 2 \times$ l'angle AT'_4T_4
$\rightarrow$ angle $AT'_1T_1 =$ angle AT'_4T_4
$\rightarrow$ angle $T'_1AT_1 =$ angle T'_4AT_4
Dés lors T_4 est aligné avec T_2, et le lieu cherché est donc une droite qui passe par tous les points de tangence.

EXGSP011 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

Soit une circonférence de rayon R et de centre O. Soit un point fixe C sur la circonférence.
Soit un triangle variable de sommets A, B, C tel que la longueur du coté $AB = R$ et tel que A et B appartiennent à la circonférence.
Quel est le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABC ?
Expliquer comment la construire.



Soit par exemple la corde A_1B_1. Le milieu de M_1 est situé à une distance constante du centre O. Le lieu de M_1 est donc une circonférence.

Soit M'_1 le centre de gravité du triangle CA_1B_1 qui est situé sur la médiane à 2/3 de C. M'_1 est donc l'image de M_1 obtenue par l'image de centre C et de rapport 2/3.

Or l'homothétie d'un cercle est un cercle. Le lieu cherché est donc un cercle.

Pour le construire, traçons le diamètre CO, et deux droites parallèles à CO, situées de part et d'autre de CO et à une distance égale à R/2.

Les parallèles determinent les points A_2, B_2, A_4 et B_4. On en tire les points M_2 et M_4. Dés lors on peut obtenir les points M'_2 et M'_4.
Le cercle cherché a pour diamètre $M'_2M'_4$.

Calculons en fonction de R, le diamètre $M'_2M'_4$

$$OM_2{}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \quad \rightarrow \quad OM = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$CM_2 = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) \quad \rightarrow \quad CM'_2 = \frac{2}{3}R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = \frac{R}{3}\left(\sqrt{3}+2\right)$$

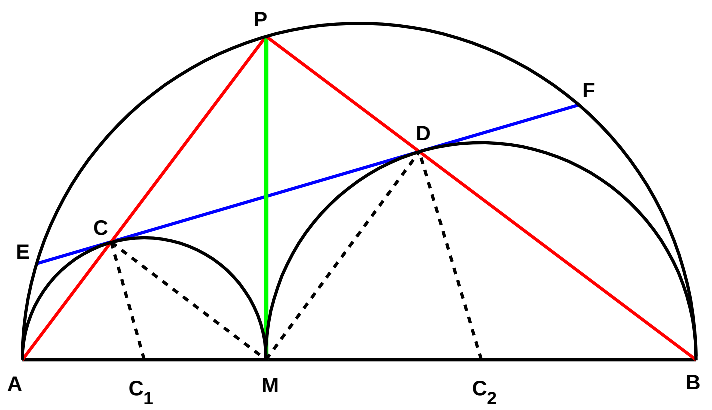
$$CM_4 = R - \frac{\sqrt{3}}{2}R = R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \rightarrow \quad CM'_4 = \frac{R}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$M'_2M'_4 = \frac{R}{3}\left(\sqrt{3}+2\right) - \frac{R}{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Enfin, on calculera facilement que $OO' = \frac{R}{3}$.

EXGSP012 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

Soit un demi-cercle de diamètre AB et un point M quelconque de AB.
Soient les deux demi-cercles construits sur les diamètres AM et MB, du même côté que le demi-cercle.
Soit la tangente commune à ces deux cercles, dont les points de tangence sont notés C et D (C est sur le cercle de diamètre AM). En considérant que le point M peut occuper n'importe quelle position entre A et B, quel est le lieu géométrique du point d'intersection P des droites AC et BD ? Démontrer que PM est tangente commune aux deux demi – cercles.

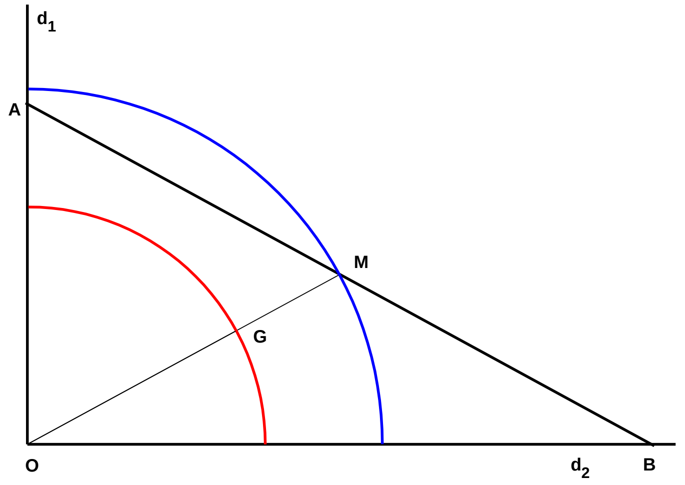


CC_1 et DC_2 sont // car perpendiculaires à CD.
Les triangles DBC_2 et CMC_1 sont semblables et isocèles.
$\rightarrow$ les angles DBM et CMA sont égaux $\rightarrow$ $CM // DB$
De même, les triangles ACC_1 et MDC_2 sont semblables
$\rightarrow$ les angles CAM et DMB sont égaux $\rightarrow$ $AP // DM$
Dés lors, le quadrilatère $CMDP$ est un rectangle puisque l'angle MDB est droit
Ce qui implique que l'angle APB est droit, et donc le point P est situé sur le demi-cercle.

PM est une diagonale du rectangle.
Les angles CMP et MPD sont égaux (alternes-internes)
Les angles CMA et MPA sont égaux,
en effet : $CMA = C_1CM$ (triangle isocèle)
$C_1CM = DCP$ (Angles à côtés perpendiculaires)
$DCP = MPA$ (car CD est diagonale du rectangle)
Par conséquent,
$AMP = AMC + CMP = MPA + MPD = APC =$ 1 droit.
$\rightarrow$ PM est perpendiculaire à AB.
Dés lors, les angles PMD et MBP sont égaux (car côtés perpendiculaires).
Et comme MBP est un angle inscrit, l'angle PMD est donc un angle tangentiel (Si un angle inscrit et un angle tangentiel interceptent le même arc, ils sont égaux ; et réciproquement)
$\rightarrow$ PM est tangent au demi-cercle de centre C_2
De même, on démontrera que PM est tangent à l'autre-cercle de centre C_2
PM est donc la tangente commune.

EXGSP013 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

Soient deux droites d_1 et d_2 orthogonales en leur point commun O.
Soit un segment AB de longueur fixe L tel qu'il s'appuie par son extrémité A sur la droite d_1 et par son extrémité B sur la droite d_2.
On considère toutes les positions possibles de ce segment. On appelle M son point milieu.
Quel est le lieu géométrique du point M ?
Quel est le lieu du centre de gravité du triangle AOB ?



OM est médiane du triangle AOB $\rightarrow$ $OM = \frac{L}{2} =$ une constante.

Le lieu de M est donc le cercle de centre O et de Rayon $\frac{L}{2}$.

Soit G le centre de gravité, qui est situé aux $\frac{2}{3}$ sur la médiane.

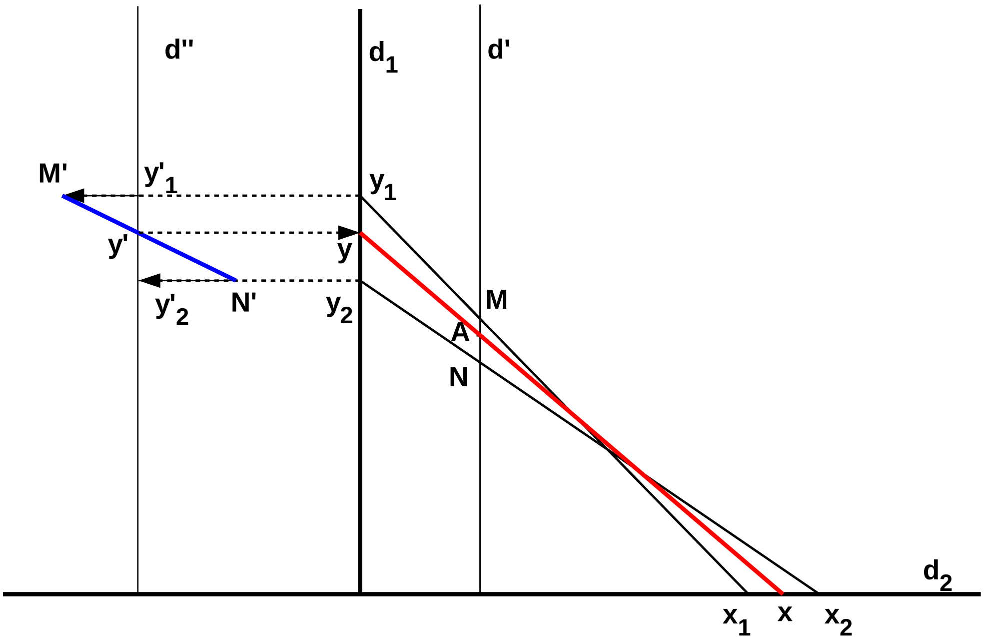
G est donc homothétique de M selon le rapport $\frac{2}{3}$.

Le lieu de G est donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{3}L$,

car l'homothétie d'un cercle est un cercle.

EXGSP014 – Mons, questions-types 2000-2002.

Construire un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse BC de longueur L s'appuie sur deux droites perpendiculaires d_1 et d_2, et qui passe par un point n'appartenant ni à d_1 ni à d_2



Par A, on trace la verticale d'.

Avec un compas d'ouverture L, on détermine x_1y_1 de façon que x_1y_1 soit au dessus de A. De même on détermine x_2y_2 de façon que x_2y_2 soit au dessous de A.

De y_1, on trace l'horizontale qui coupe la verticale d'' en y'_2.

On contruit M' image de telle façon que $M'y'_1 = 2\ AM$.

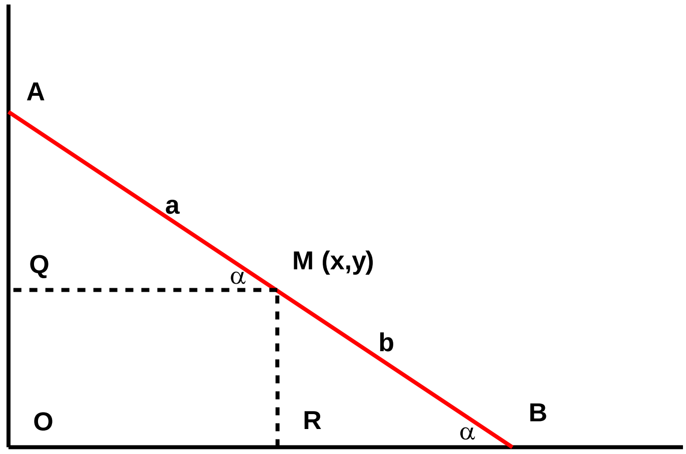
(Le coefficient 2 est arbitraire. Le plus grand le coefficient, meilleur sera la précision).

De même, on construit $y'_2 N' = 2\ AN$.

La droite $M'N'$ détermine y' sur d'', ce qui détermine y et donc la droite cherchée.

Note : Pour avoir plus de précision, il faut que M et N soient voisins.

Ce qui est aussi une condition pour pouvoir assimiler $M'N'$ à une droite.



Extension

Soit le point M fixe sur la droite de longueur L $(a+b=L)$

Quel est le lieu de M quand A et B coulissent sur les côtés?

$$x = QM = a\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x}{a}$$

$$y = MR = b\sin\alpha \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{y}{b}$$

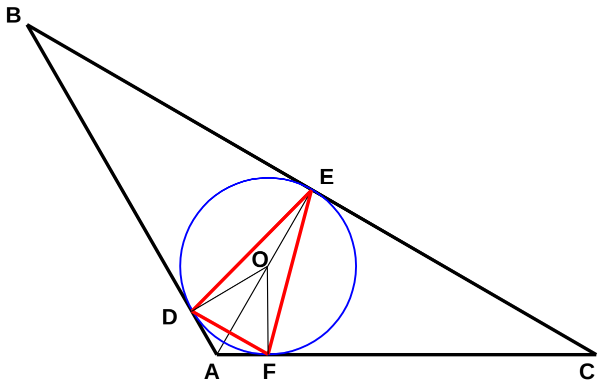
$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

C'est une ellipse. Ceci est la base du "compas elliptique", quand AB coulissent, M décrit une ellipse.

EXGSP015 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

On considère un triangle ABC tel que $|AB| = |AC| = L$ et l'angle $BAC = 120°$.
Soit $D, E, F,$ les points de AB, BC et CA où le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à ses côtés.
On demande :

a) De démontrer que le triangle DEF est isocèle.
b) De calculer la longueur des deux côtés égaux de DEF.



Comme ABC est isocèle, AE est en même temps bissectrice et médiatrice.
$OE = OF = OD$ (rayons du cercle inscrit).
Donc les triangles EOD et EOF sont isocèles.
Or $\angle EOF = \angle EOD$ car supplémentaires respectivement de $\angle EFC$ et $\angle EBA$, qui valent chacun 30°
Donc $\angle EOD = \angle EOF \rightarrow DE = EF$, et le ΔDEF est isocèle.

On a $\dfrac{EF}{\sin 30} = \dfrac{EC}{\sin 75}$ car $\angle EFC = \dfrac{180-30}{2} = 75$ et $\sin 75 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$EF = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)L}$$

Rappel:

$$\sin 75 = \sin\left(30+45\right) = \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

EXGSP016 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

On donne un segment fixe AB et on trace une circonférence de diamètre AB. Un point M parcourt cette circonférence.

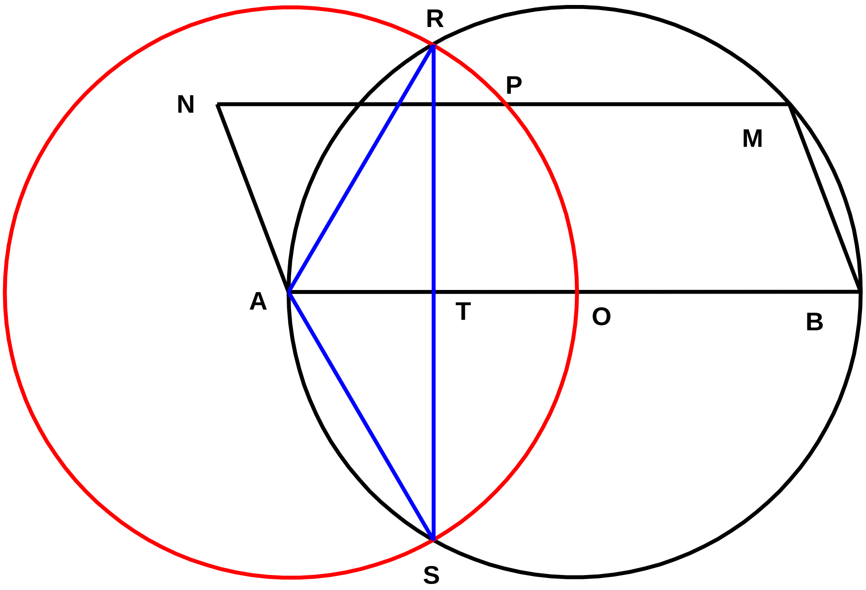
Pour chaque position du point M, on détermine un parallélogramme admettant les points A, B et M comme trois de ses sommets.

Le quatrième est nommé N. Le milieu du côté MN de ce parallélogramme est nommé P.

On demande

a) De déterminer quel est le lieu de P.

b) La première circonférence et ce lieu définissent deux surfaces S_1 et S_2 dans le plan limité, par ces lignes. Quelle est l'aire de $S_1 \cap S_2$?



MN est parallèle à AB et $MN = AB \rightarrow PM = \frac{1}{2}AB = Cste.$

Donc P est l'image de M obtenue par une translation de longueur MP.

M décrit un cercle, or l'image par translation d'un cercle est un cercle.

Le lieu de P est un cercle de centre A et de rayon $\frac{AB}{2}$.

$S_1 \cap S_2 = 2 \times$ l'aire du segment circulaire ROS

L'aire du segment circulaire ROS = l'aire du secteur circulaire $AROS$

- le triangle ARS.

Soit $r = \frac{1}{2}AB \rightarrow AT = \frac{r}{2} \rightarrow RT^2 + \frac{r^2}{4} = r^2$

$\rightarrow RT = \frac{\sqrt{3}}{2}r \quad (\rightarrow \widehat{RAT} = 60°)$

$\rightarrow RS = r\sqrt{3}$

Aire du $\triangle ARS = \frac{1}{2}r\sqrt{3}\,\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

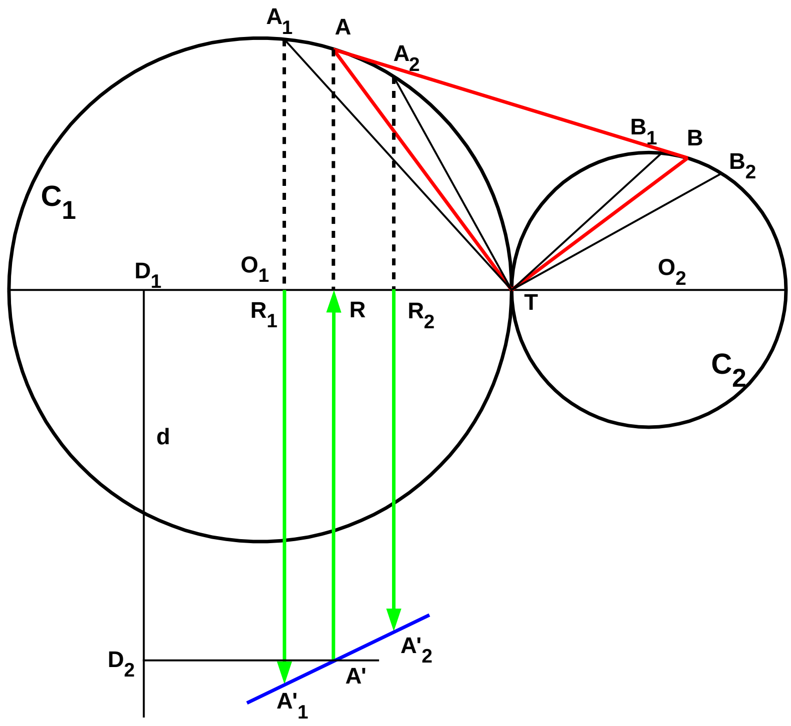
Aire du secteur circulaire $AORS$ = $\frac{1}{3}$ aire du cercle $(\widehat{RAS} = 120°)$

$= \frac{\pi}{3}r^2$

$$S_1 \cap S_2 = 2\left(\frac{\pi}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \boxed{\frac{r^2}{6}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}$$

EXGSP017 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

On considère deux circonférences C_1 et C_2 tangentes extérieurement. T est le point de contact entre C_1 et C_2. Par T, on mène une corde de C_1 – soit TA – et une corde de C_2 – soit TB – de telle sorte que TA et TB soient perpendiculaires entre elles.
Déterminer la position à imposer à TA pour que $|AB|$ soit égal à une longueur d donnée.



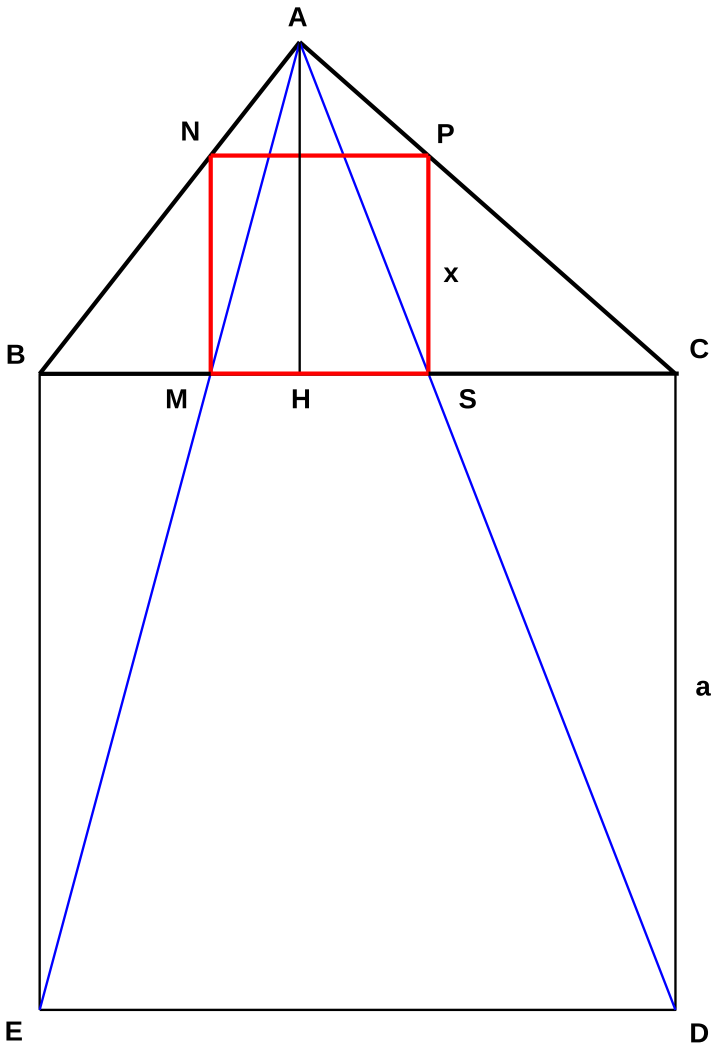
On trace A_1TB_1.
On construit A'_1 image de A_1, de telle façon que $R_1A'_1 = A_1B_1$.
On recommence. Soit par exemple, $R_2A'_2 = A_2B_2$
On détermine $RA' = d \rightarrow A \rightarrow B$.
On vérifie que $|AB| = d$.

Note : Pour que la précision soit suffisante, il faut que A_1 et A_2 encadrent A et soient voisin de A. (C'est aussi une condition pour pouvoir assimiler $A'_1\, A'_2$ à une droite).

EXGSP018 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2002.

Sur la base BC d'un triangle ABC extérieurement au triangle, on construit un carré $BCDE$. En joignant le sommet A du triangle aux extrémités D et E du côté du carré parallèle à la base, démontrer qu'on détermine un segment dont la mesure vaut celle du carré du côté inscrit au triangle.

Si on note a la mesure de BC, h la mesure de la hauteur issue de A et x la mesure du côté du carré inscrit à ABC, que doit valoir a / h pour que x soit égal au tiers de a ?



On trace SP et MN // à BE et CD (donc MN et PS sont $\perp$ à BC)

Les triangles APS et ACD sont semblables

$$\rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PS}{CD} = \frac{AS}{AD} = \frac{x}{a}$$

Les triangles AMS et AED sont semblables

$$\rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{MS}{ED} = \frac{AS}{AD} = \frac{x}{a}$$

et comme $ED = CD = a \rightarrow MS = PS = x$

De même on démontre que $MN = MS = x$

$\rightarrow$ $NPMS$ est un carré inscrit au triangle ABC

Comme AMS et AED sont semblables, on a immédiatement : $\frac{h}{x} = \frac{h+a}{a}$

Si $x = \frac{a}{3} \rightarrow \boxed{\frac{h}{a} = \frac{1}{2}}$

EXGSP019 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.
EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010

FACSA

On donne un triangle ABC. Le milieu de BC est M et G' est le symétrique par rapport à M du centre de gravité G du triangle.

On note D l'intersection de AB avec CG', E celle de DG avec BG' et F celle de AE avec CD.

Montrer que :

a) Les droites AC, BG' et la parallèle à BC menée par D sont concourantes.

b) $|DF| = |FG'| = |G'C|$

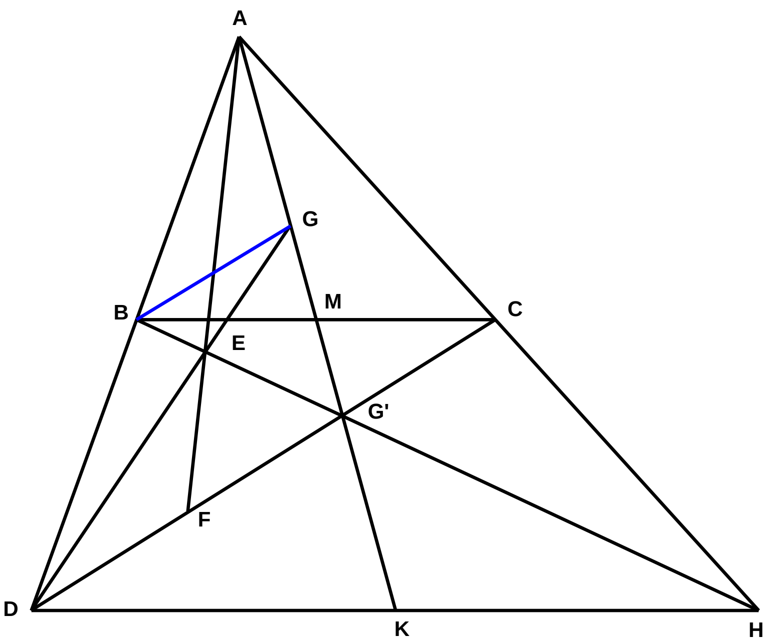
EPL

Soit un triangle ABC, le milieu du segment BC est noté M et le centre de gravité du triangle ABC est noté G. On construit le point G' sur le droite GM de telle façon que $|GM| = 1/2\,|GG'|$ et que $|G'M| = |G'M|$. En d'autres mots, G'est le symétrique de G par rapport à M.

On note D l'intersection de Ab avec CG', E l'intersection de DG avec BG' et F l'intersection avec AE avec CD.

On demande

- d'effectuer un dessin précis des différents éléments décrits dans le problème,
- de démontrer que le quadrilatère $BGCG'$ est un parallèlogramme,
- de démontrer que les droites AC, BG' et la parallèle à BC menée par D sont concourantes,
- de démontrer que $|DF| = |FG'| = |G'C|$.



FACSA

1) Soit H l'intersection de AC et de la parallèle. $BM = MC$ or $\triangle ABC$ et $\triangle ADH$ sont semblables $\rightarrow$ $DK = KH$ $\rightarrow$ AK est médiane du $\triangle ADH$

$\triangle BGM = \triangle CG'M$ (Un angle égal compris entre deux côtés égaux) donc $BG//DC$ et comme G est le milieu de AG'(car $GM = MG' = \frac{1}{3}MG$) $\rightarrow$ B est le milieu de AD.

De même on démontre que C est le milieu de AH. Donc CD est médiane du $\triangle ADH$
On en déduit G'est le centre de gravité du $\triangle ADH$.

Dés lors, BG' est médiane et donc passe par H. DH, BG' et AC sont donc concourantes.

2) $AG = GG'$ (puisque $GM = MG'$) $\rightarrow$ DG est médiane du $\triangle ADG'$
$\rightarrow$ E est le centre de gravité du $\triangle ADG'$ et donc AE est médiane.
$\rightarrow |DF| = |FG'|$ et comme $|G'C| = \frac{1}{2}|DG'| \rightarrow |DF| = |FG'| = |DG'|$

EPL

Solution proposée par Nicole Berckmans

- $BGCG'$ est un parallélogramme car dans le quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu.
- Soit $H = AC \cap BG'$. Démontrons que $DH // BC$.

$$* \triangle\ ADG' : \left.\begin{array}{l} G \text{ est milieu de } AG' \\ BG//DG' \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ milieu de } AD$$

$$* \triangle\ AG'H : \left.\begin{array}{l} G \text{ est milieu de } AG' \\ CG//G'H \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ milieu de } AH$$

$$* \triangle\ ADH : \left.\begin{array}{l} B \text{ est milieu de } AD \\ C \text{ milieu de } AH \end{array}\right\} \Rightarrow BC//DH$$

- G' est l'intersection des médianes du triangle ADG'et est donc son centre de gravité

$$\Rightarrow G'C = \frac{1}{3}DC \qquad (1)$$

- E est l'intersection des médianes du triangle $ADG'\left(E = BG' \cap DG\right)$

Dés lors AF est médiane et $|DF| = |FG'|$ (2)

De (1) et (2), on tire $|DF| = |FG'| = |G'C|$