Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 12

EXGSP120 – EXGSP129

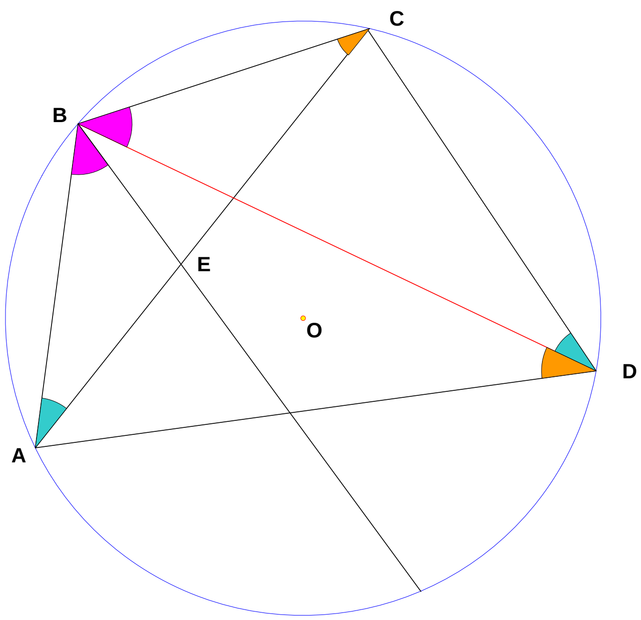
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 08

EXGSP120 – Théorème de Ptolémée.

Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle alors le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.



Soit E un point sur BC tel que $ABE = CBD.$

Les triangles ABE et DBC sont semblables : $\rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DC}}$

$\rightarrow \overline{AB}.\overline{DC} = \overline{DB}.\overline{AE} = \overline{DB}.\left(\overline{AC} - \overline{EC}\right) = \overline{DB}.\overline{AC} - \overline{DB}.\overline{EC} \qquad (1)$

Les triangles BEC et BAD sont semblables : $\rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DB}} \rightarrow \overline{EC}.\overline{BD} = \overline{AD}.\overline{BC}$

On remplace dans $(1) \rightarrow \overline{AB}.\overline{DC} = \overline{DB}.\overline{AC} - \overline{AD}.\overline{BC}$

$\rightarrow \boxed{\overline{DB}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{DC} + \overline{AD}.\overline{BC}}$

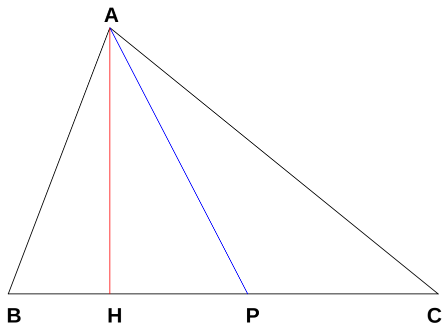
Le 10 octobre 2007.

EXGSP121 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2007.

On considère un triangle ABC, et un point P arbitraire appartenant à son côté $[B,C]$, distinct de B et C. Démontrer que la valeur de

$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}}+\frac{\overrightarrow{AC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}}+\frac{\overrightarrow{AP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}$$

est indépendante de P et des dimensions du triangle.



$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}}+\frac{\overrightarrow{AC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}}+\frac{\overrightarrow{AP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}=\frac{\overrightarrow{AH}^2+\overline{HB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}}+\frac{\overrightarrow{AH}^2+\overline{HC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}}+\frac{\overrightarrow{AH}^2+\overline{HP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}$$

$$=\overrightarrow{AH}^2\left(\frac{1}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}}+\frac{1}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}}+\frac{1}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}\right)+\frac{\overline{HB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}}+\frac{\overline{HC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}}+\frac{\overline{HP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}$$

$$=\frac{\overrightarrow{AH}^2}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\underbrace{\left(\overline{CP}-\overline{BP}+\overline{BC}\right)}_{=0}+\frac{1}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\left(\overline{HB}^2.\overline{CP}-\overline{HC}^2.\overline{BP}+\overline{HP}^2.\overline{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\left(\overline{HB}^2.\overline{CP}-\overline{HC}^2.\overline{BP}+\overline{HP}^2.\left(\overline{BP}+\overline{PC}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\left[\left(\overline{HB}^2-\overline{HP}^2\right).\overline{CP}+\left(\overline{HC}^2-\overline{HP}^2\right).\overline{PB}\right]$$

$$=\frac{1}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\left[\left(\overline{HB}+\overline{HP}\right)\underbrace{\left(\overline{HB}-\overline{HP}\right)}_{\overline{PB}}.\overline{CP}+\underbrace{\left(\overline{HC}-\overline{HP}\right)}_{\overline{PC}}\left(\overline{HC}+\overline{HP}\right).\overline{PB}\right]$$

$$=\frac{\overline{CP}.\overline{PB}}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}\underbrace{\left(\overline{HB}+\cancel{\overline{HP}}-\overline{HC}-\cancel{\overline{HP}}\right)}_{\overline{CB}}$$

$$=\frac{\overline{CP}.\overline{PB}.\overline{CB}}{\overline{BC}.\overline{BP}.\overline{CP}}=1$$

Le 10 octobre 2007.

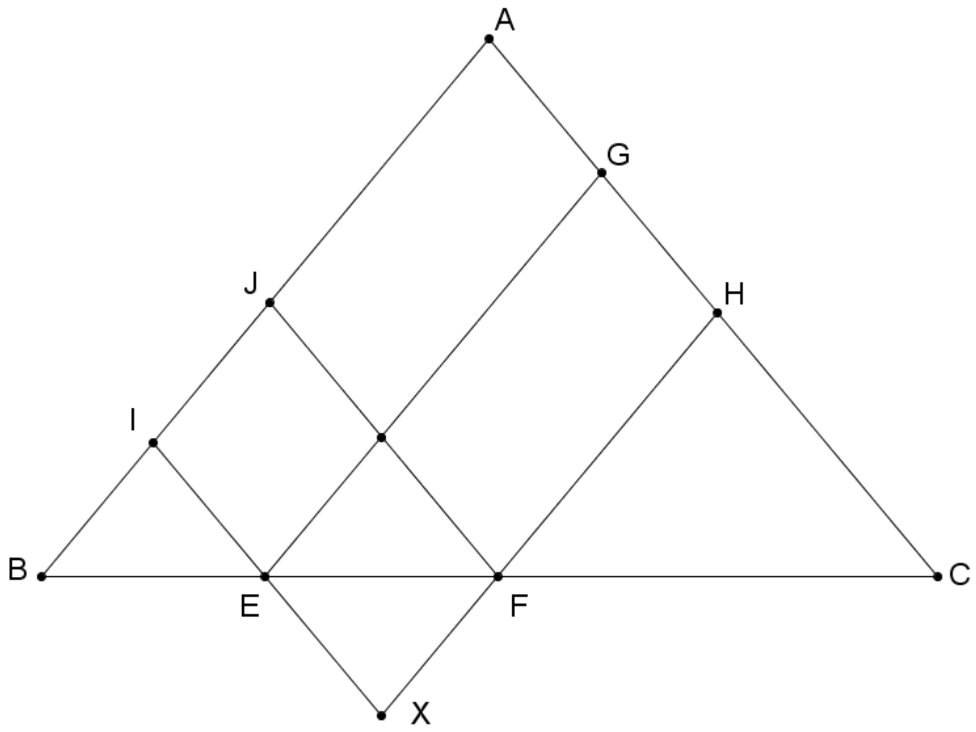
EXGSP122 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2008.

Soit ABC un triangle isocèle en A (c'est-à-dire tel que les côtés $[A,B]$ et $[A,C]$ sont de même longueur). On considère deux points E et F distincts situés à l'intérieur du segment $[B,C]$. Les parallèles à AB menées par E et par F coupent respectivement $[A,C]$ en G et H. Les parallèles à AC menées par E et F coupent respectivement $[A,B]$ en I et J.

(a) Démontrer que les segments $[I,J]$ et $[G,H]$ sont de même longueur.

(b) Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les positions de E et F pour que les droites JG et IH soient parallèles.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.



(a) Sans perte de généralité, on peut supposer que E est situé à l'intérieur du segment $[B, F]$. Notons X le point d'intersection des droites EG et FJ.

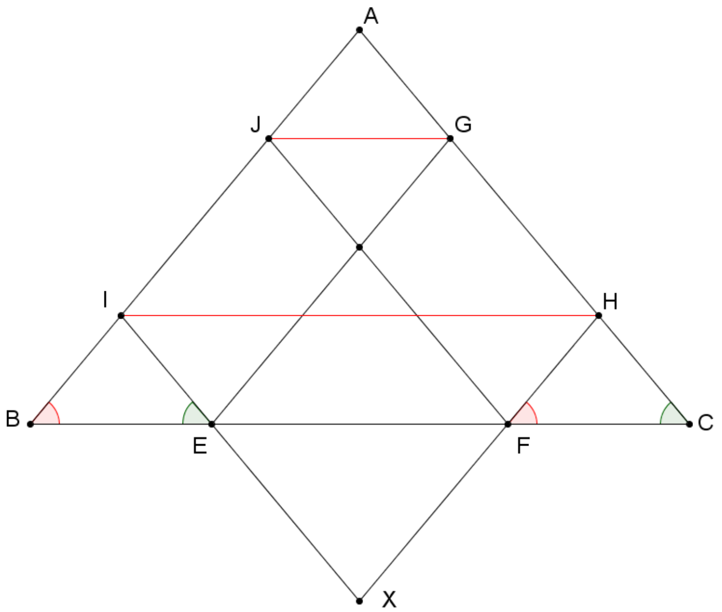
Remarque : Ces droites sont sécantes, car sinon elles seraient parallèles et par transitivité, on aurait $AB \parallel AC$, ce qui contredirait les hypothèses.

Montrons que les triangles XEF et ABC sont semblables. En effet, on a $\widehat{XEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{XFE} = \widehat{ACB}$, puisque ces angles sont correspondants (vu que les droites XE et AB et les droites XF et AC sont parallèles par hypothèse). Des triangles possédant des angles égaux deux à deux sont semblables.

Le triangle ABC étant isocèle en A par hypothèse, le triangle XEF est donc isocèle en X, et l'on a $\overline{XE} = \overline{XF}$.

Montrons à présent que les quadrilatères $EIJX$ et $XFHG$ sont des parallélogrammes. Il suffit de le démontrer pour $EIJX$, le même raisonnement pouvant ensuite être appliqué à $XFHG$. Par hypothèse, on a d'une part $IJ \parallel EX$ et d'autre part $JX \parallel AC$ et $EI \parallel AC$ qui, par transitivité du parallélisme, entraînent $JX \parallel EI$. Le quadrilatère $EIJX$ a donc ses cotés opposés parallèles deux à deux, et est donc bien un parallélogramme.

Puisqu'un parallélogramme possède des cotés opposés de même longueur, on a $\overline{IJ} = \overline{EX}$ et $\overline{XF} = \overline{GH}$. Vu que l'on a $\overline{XE} = \overline{XF}$, on obtient $\overline{IJ} = \overline{GH}$.



(b) Nous allons démontrer que JG et IH sont parallèles si et seulement si $\overline{BE} = \overline{FC}$.

Remarquons tout d'abord que les triangles BIE et FHC sont semblables. En effet, on a $\widehat{HFC} = \widehat{IBE}$ et $\widehat{IEB} = \widehat{HCF}$, car ces angles sont correspondants.

- *Supposons que JG et IH sont parallèles.* Le théorème de Thalès fournit la relation
$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}.$$
On a de plus
$$\overline{AI} = \overline{AJ} + \overline{JI} \quad \text{et} \quad \overline{AH} = \overline{AG} + \overline{GH},$$
donc on a
$$\frac{\overline{JI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AG}}.$$
Puisque par le point (a), on a $\overline{JI} = \overline{GH}$, on obtient $\overline{AJ} = \overline{AG}$. Ces deux relations entraînent $\overline{AI} = \overline{AH}$ et, puisque ABC est isocèle en A, $\overline{IB} = \overline{HC}$. Les triangles BIE et FHC sont alors isométriques (car ils possèdent un coté égal entre deux angles égaux). Les cotés correspondants de ces triangles sont donc de même longueur, et l'on a $\overline{BE} = \overline{FC}$.
- *Supposons que l'on a $\overline{BE} = \overline{FC}$.* Dans ce cas, les triangles BIE et FHC sont isométriques, donc on a $\overline{IB} = \overline{HC}$. Puisque $\overline{JI} = \overline{GH}$, on a également $\overline{AJ} = \overline{AG}$ et $\overline{AI} = \overline{AH}$. On obtient donc la relation
$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}},$$
et la réciproque du théorème de Thalès permet de conclure que les droites JG et IH sont parallèles.

EXGSP123 – FSA, UCL, Louvain, juillet 2008, série 1.

On considère un triangle ABC ayant le côté AB fixe et l'angle en C constant.
On appelle M l'intersection des bissectrices intérieures aux angles en A et B.
On demande :

(1) de déterminer et d'énoncer, en expliquant le raisonnement, le lieu du sommet C lorsque l'on varie sa position et de construire graphiquement le lieu de C;

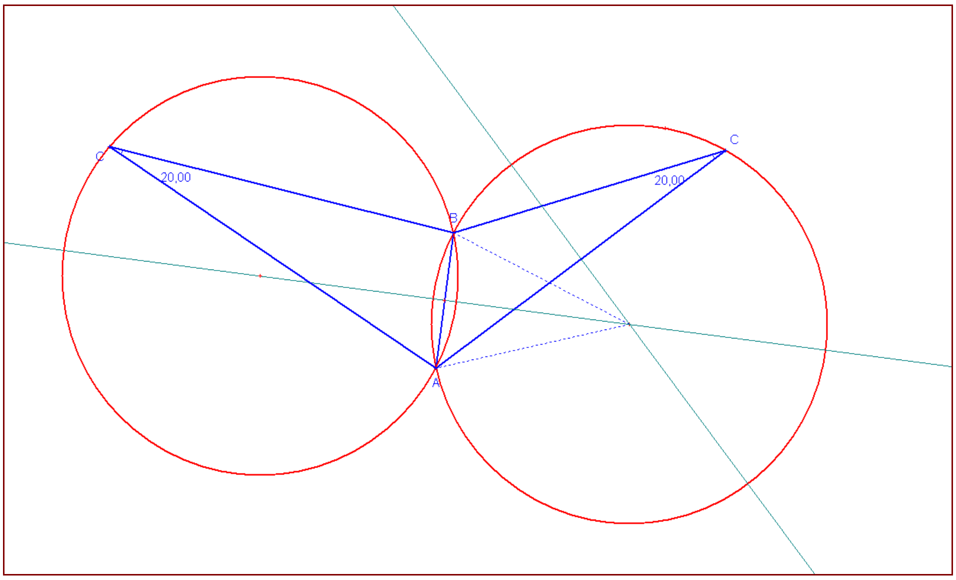
(2) de faire de même pour le lieu du point M.

---

1) Cette sous question est évidente ! Les lieux de C sont deux arcs capables.
En effet, leur définition suffit à tout justifier :

"Arc de cercle sous lequel on voit un segment donné sous un angle géométrique constant."

Pour les tracer, je vous renvoie à vos bouquins de secondaires...



2) L'angle C est constant. On peut donc dire que $A+B=cste$.

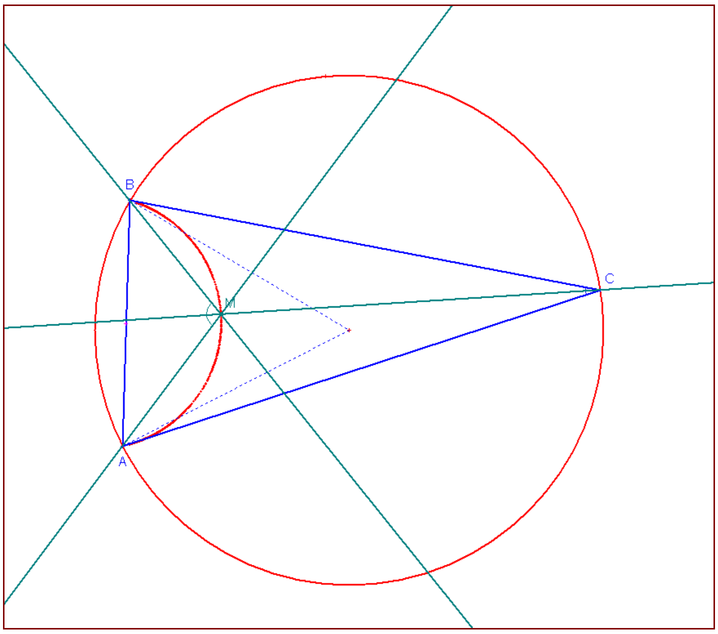
Dans le triangle *AMB*, la somme des angles est aussi constante (180°), on écrit donc :

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+AMB=180° \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left(A+B\right)}_{CSTE}+AMB=\underset{CSTE}{180°}$$

$$\Rightarrow \boxed{AMB=Cste}$$

L'angle *AMB* voit donc le segment *AB* toujours sous le même angle :

le lieu est encore une fois deux arcs capables !



23 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXGSP124 – FSA, UCL, Louvain, juillet 2008, série 2.

On considère un triangle ABC ayant le côté AB fixe et le côté AC de longueur constante.
On appelle M l'intersection des médianes du triangle.
On demande de déterminer et d'énoncer clairement, en justifiant, le lieu du point M et de le construire graphiquement.

Solution proposée par Steve TUMSON

- Tout d'abord, pour que le côté AC soit de longueur constante alors que A est fixe, il faut géométriquement que le point C se balade sur un cercle de centre A et de rayon AC constant.

- Traçons une parallèle à AC passant par M, coupant AB en Q et BC en N.
  Appelons B' l'intersection entre la médiane issue de B et le segment AC.
  Les triangles BQN et BAC sont semblables.
  De plus on sait que dans un triangle, les médianes se coupent avec un rapport 2/3 - 1/3.
  On écrit donc que :

$$\frac{|BQ|}{|BA|} = \frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|BM|}{|BB'|} = \frac{2}{3}$$

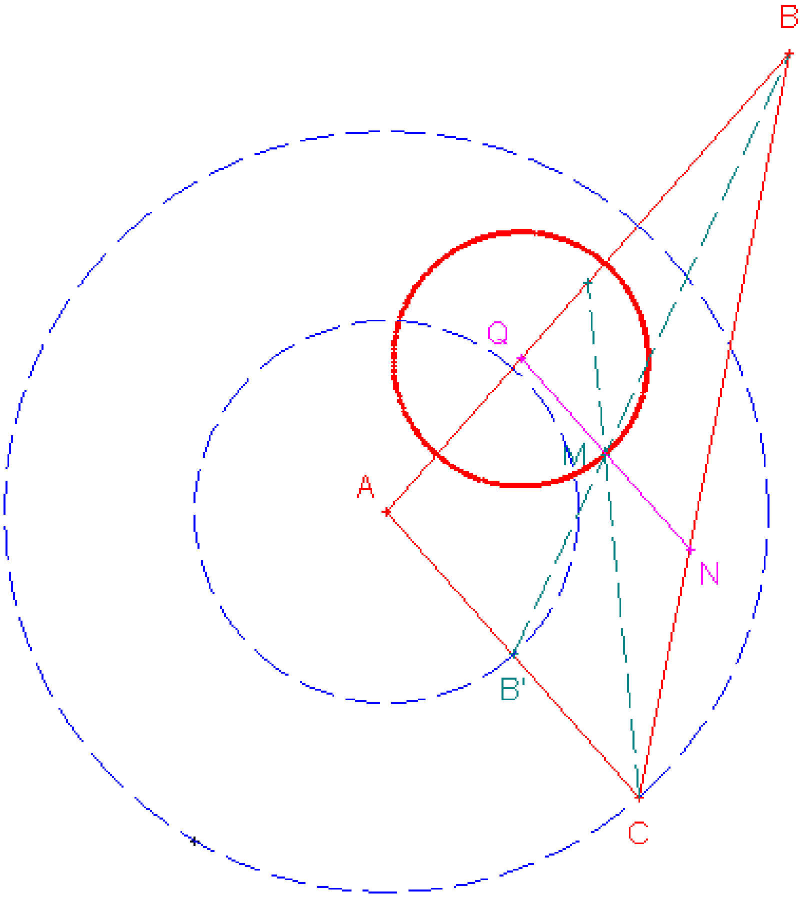
On en déduit que :

1) Le segment AB étant fixe, le point Q est lui aussi fixe, a une distance de A valant le 1/3 de la distance de AB.

2) Vu que AC est de longueur constante, AB' l'est aussi, on peut donc dire que B' se balade sur le cercle de centre A et de rayon AB' (la longueur AB' vaut la moitié de la longuer AC, par définition de la médiane).

- Il existe une homothétie de centre B envoyant A sur Q et B' sur M avec un rapport 2/3.
  Par cette homothétie, le cercle de centre A et de rayon AC se transforme en cercle de centre Q et de rayon QM.

> Le lieu de M est donc un cercle dont :
> - Le centre se situe au 1/3 de AB qui lui est fixé et connu (c'est ici le point Q)
> - Le rayon vaut le 1/3 de la longueur AC constante et connue (c'est ici QM, qui est le 2/3 de AB' qui lui-même est la moitié de AC : le rayon QM est donc bien le 1/3 de AC)



30 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXGSP125 – FPMS, Mons, 2002, Groupe A.

Soit un segment BC horizontal. On demande :

a) De tracer un triangle ABC tel que ses médianes issues de B et C soient perpendiculaires ;

b) De préciser quel est le lieu des points A tel que les médianes issues de B et de C , dans les triangles variables ABC, soient perpendiculaires ;

c) De montrer que $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Solution proposée par Steve Tumson

a)

* On trace le segment BC
* On trace la droite BX avec X fixé arbitrairement
* On trace une droite perpendiculaire à BX, coupant cette dernière en G
* On applique une homothétie de rapport 3/2 du point G de centre C puis B pour obtenir respectivement les points C' et B' qui seront les milieux respectivement de AB et de AC (les médianes d'un Δ se coupant avec un rapport 2/3 ; 1/3)
* On trace les droites BC' et CB' qui se coupent au point A, troisième sommet du triangle ABC.

(Voir première figure)

b)

* BG et CG doivent toujours être perpendiculaires, le lieu de G est donc un cercle de centre M (qui est la moitié de BC) et de rayon MG.
* A est en fait l'homothétie de G de centre M et de rapport 3 (les médianes d'un Δ se coupant avec un rapport 2/3 ; 1/3)
* Le lieu de A est donc lui aussi l'homothétie du lieu de G de même centre et de même rapport :

$$\boxed{\text{Un cercle de centre } M \text{ et de rayon } AM.}$$

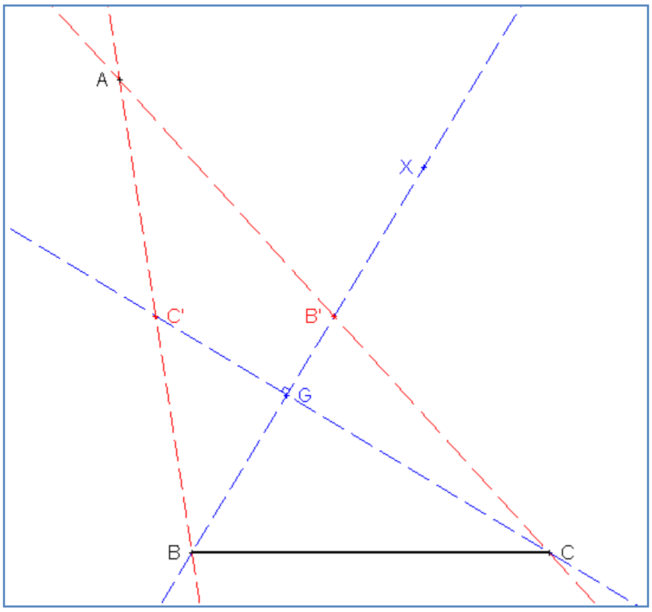
(Voir deuxième figure)

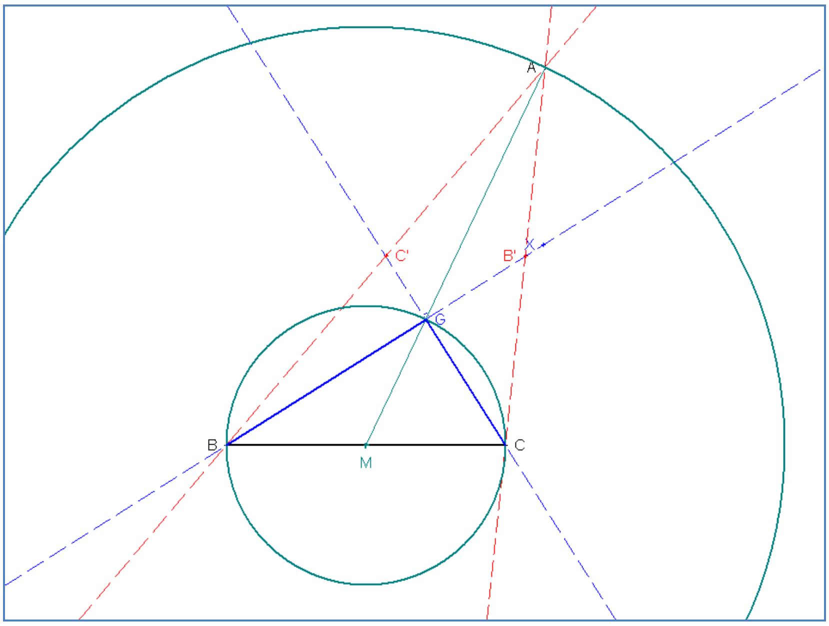
c)

$$\begin{cases} \Delta BC'G \to C'B^2 = BG^2 + C'G^2 \Leftrightarrow BG^2 + C'G^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \\ \Delta CB'G \to B'C^2 = B'G^2 + CG^2 \Leftrightarrow B'G^2 + CG^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} C'G^2 = \left(\frac{1}{2}GC\right)^2 = \frac{CG^2}{4} \\ B'G^2 = \left(\frac{1}{2}GB\right)^2 = \frac{BG^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BG^2 + C'G^2 = \frac{AB^2}{4} = BG^2 + \frac{CG^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 = 4BG^2 + CG^2 \\ B'G^2 + CG^2 = \frac{AC^2}{4} = CG^2 + \frac{BG^2}{4} \Leftrightarrow AC^2 = 4CG^2 + BG^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 5\left(BG^2 + CG^2\right) \Leftrightarrow \boxed{AB^2 + AC^2 = 5BC^2}$$





9 septembre 08

EXGSP126 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2008.
FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

On considère un polygone régulier convexe $A_1A_2....A_n$; avec $n \geq 3$, et un cercle circonscrit C passant par le centre de gravité G de ce polygone. Les droites A_1G, A_2G, A_3G,.....A_nG rencontrent C en G, ainsi qu'en un certain nombre m de points distincts de G notés $B_1, B_2, ...B_m$ (sans ordre particulier)

Démondrer que les pôints $B_1, B_2, ...B_m$ font partie d'un même polygone régulier convexe à n côtés.

(*Suggestion* : Commencer par établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points fassent partie des sommest d'un polygone régulier convexe à n côtés)

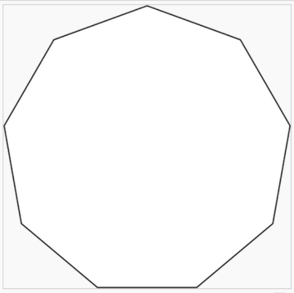
Un polygone est dit régulier lorsque ses côtés et ses angles sont tous égaux. Un polygone régulier peut être étoilé ou convexe. Dans la plupart des cas, lorsqu'on parle de polygone régulier, on pense à un polygone régulier convexe.

Un polygone régulier présente une symétrie d'ordre égal à son nombre de côtés. Cela signifie qu'il se superpose à lui-même quand on le tourne d'un angle de $\frac{2\pi}{n}$, où n est l'ordre du polygone.

Le polygone présente ainsi la même configuration en chacun de ses sommets qui sont donc disposés régulièrement sur un cercle centré sur le centre de rotation.

Inversement, si un polygone est inscriptible dans un cercle et si ses côtés sont égaux, alors il est régulier.

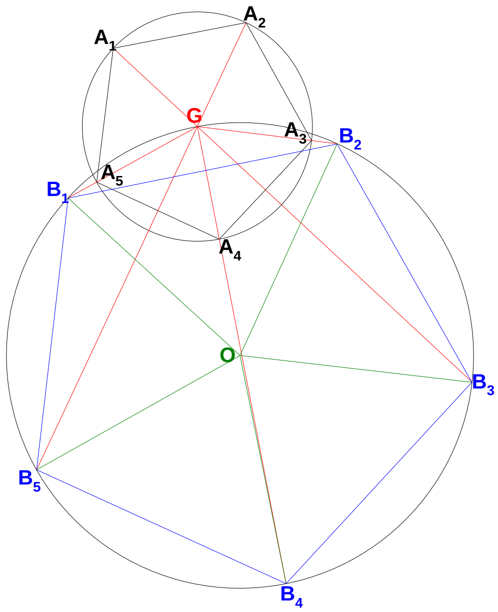
L'ensemble des symétries d'un polygone régulier est appelé un groupe dihédral.


Ennéagone régulier convexe.

Quelques exemples et contre-exemples :

- le triangle équilatéral est un polygone régulier ;
- le carré est un polygone régulier ;
- le losange (non carré) n'est pas régulier (il n'est pas inscriptible dans un cercle).
- le rectangle (non carré) n'est pas régulier (il est inscriptible dans un cercle mais ses côtés ne sont pas égaux).

http://fr.wikipedia.org/wiki/Polygone



Prenons comme exemple le pentagone (donc $n = 5$ et est impair).

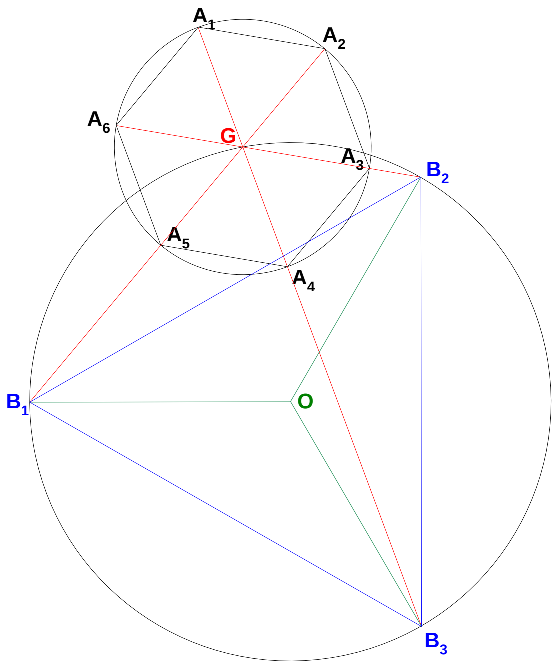
Les angles A_1GA_2, A_2GA_3 ,.... sont tous égaux à $\frac{2\pi}{5}$

La droite A_1G est bissectrice de A_4GA_3 et la droite A_2G est la bissectrice de A_4GA_5

Par conséquent, les arc $\overparen{B_2B_3}, \overparen{B_3B_4}, ...\overparen{B_5B_1}$ sont tous égaux et valent chacun $\frac{2\pi R}{5}$ où R est le rayon du cercle passant par $G. \rightarrow \overparen{B_1B_2} = 2\pi R - 4 \times \frac{2\pi R}{5} = \frac{2\pi R}{5}$.

Autrement dit les arcs $\overparen{B_iB_{i+1}}$ sont tous égaux, ce qui impliquent que les cordes correspondantes sont aussi égales.
En conclusion, le polygone $B_1B_2...B_5$ est un polygone regulier convexe inscrit au cercle passant par G.

Dans le cas d'un hexagone, (donc $n = 6$ et est pair), le polygone $B_1,...B_m$ est un triangle équilatéral $\left(\text{donc } m = \frac{n}{2}\right)$



20 septembre 2008. Modifié le 28 novembre 2014 (Carine Demeesmaeker).

EXGSP127 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2008.

Soient un cercle C de centre O et un point fixe quelconque P.

(a) Une droite variable d issue de O rencontre C en deux points A et B.

Démontrer que la valeur de $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$ reste constante lorsque d varie.

(b) Une droite variable d' issue de P rencontre C en deux points M et N.

En utilisant la propriété établie en (a), démontrer que la valeur de $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ reste constante lorsque d' varie.

Solution proposée par Thomas Belligoi

1. Considérons une droite d variable et les deux points A et B diamétralement opposés qu'elle détermine sur le cercle de centre O.

   Il faut montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ reste constant lorsque la droite d varie.

   Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}\right) \\
&= \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 \\
&= \overrightarrow{PO}^2 - R^2
\end{aligned}
$$

   puisque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ possèdent la même droite support et sont de même norme.

   On arrive bien à une expression ne dépendant que du point *fixe* P et des données du cercle.

2. Considérons la droite d' intersectant le cercle en N et en M. On appelle N' le point du cercle diamétralement opposé à N.

   Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} &= \left(\overrightarrow{PN'} + \overrightarrow{N'M}\right) \cdot \overrightarrow{PN} \\
&= \overrightarrow{PN'} \cdot \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{N'M} \cdot \overrightarrow{PN} \\
&= \overrightarrow{PN'} \cdot \overrightarrow{PN}
\end{aligned}
$$

   puisque les droites $N'M$ et PN sont perpendiculaires (triangle rectangle NMN' inscriptible dans un demi-cercle).

   Par le point précédent, on en déduit que

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PO}^2 - R^2$$

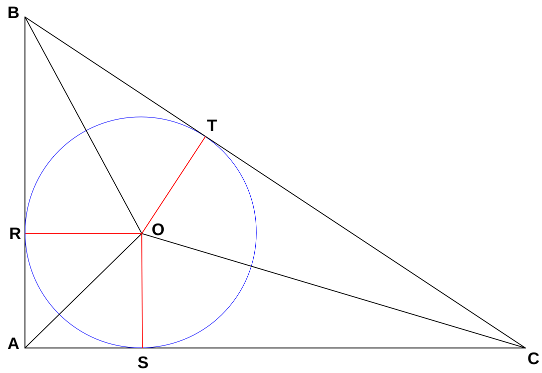
   Par conséquent, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ est une constante pour un point *fixe* P et un cercle donné.

---

20 septembre 2008 (Relu par Steve Tumson)

EXGSP128 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008.

Soit un triangle ABC rectangle en A. On nomme T le point de contact de l'hypoténuse avec le cercle inscrit. Montrer que l'aire du triangle égale le produit des distances BT et TC.



On a :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|.|AC| = \frac{1}{2}(|AR|+|RB|)(|AS|+|SC|)$$
$$= \frac{1}{2}(|AR|.|AS|+|AR|.|SC|+|RB|.|AS|+|RB|.|SC|)$$

Or O étant le centre du cercle circonscrit : $|BT|=|BR|, |SC|=|TC|$

et de plus $ORAS$ est un carré car le triangle ABC est rectangle

donc $|RO|=|OS|=|RA|=|AS|=|OT|$

Par conséquent :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(|AR|.|AS|+|AR|.|SC|+|RB|.|AS|+|RB|.|SC|)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\underbrace{|AR|.|AS|}_{S_{ORAS}}+\underbrace{|OS|.|SC|}_{\substack{S_{OTCS}\\ \text{Voir Note 1}}}+\underbrace{|RB|.|RO|}_{\substack{S_{BROT}\\ \text{Voir Note 2}}}}_{S_{ABC}}+|BT|.|TC|\right)$$

$$\to 2S_{ABC} - S_{ABC} = |BT|.|TC| \to \boxed{|BT|.|TC| = S_{ABC}}$$

Note 1 : En effet, les triangles rectangles OSC et OTC sont égaux.

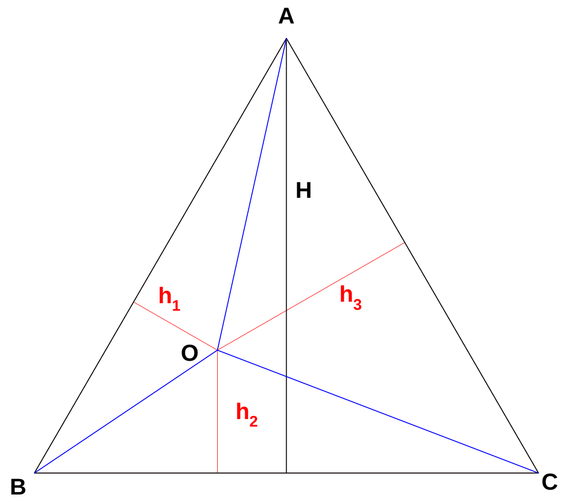
$$\to S_{OTCS} = 2S_{OSC} = 2\times\frac{1}{2}\times|OS|.|SC|$$

Note 2 : De même : $S_{BROT} = 2S_{BRO} = 2\times\frac{1}{2}\times|RB|.|RO|$

20 décembre 2008

EXGSP129 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Soit un triangle équilatéral et O un point intérieur au triangle. Montrer que la somme des distances de O aux côtés du triangle égale sa hauteur.



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} H \times |BC| = \frac{1}{2} h_1 \times |AB| + \frac{1}{2} h_2 \times |BC| + \frac{1}{2} h_3 \times |CA|$$

$$\Leftrightarrow \quad H \times |BC| = h_1 \times |AB| + h_2 \times |BC| + h_3 \times |CA|$$

Or le triangle est équilatéral $\rightarrow |AB| = |BC| = |CA|$

Donc : $H \times \cancel{|BC|} = \cancel{|BC|}\left(h_1 + h_2 + h_3\right)$

$\rightarrow \boxed{H = h_1 + h_2 + h_3}$

15 décembre 08. Modifié le 28 novembre 2014 (Carine Demeesmaeker).