

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique plane**

## **GSP 13**

**EXGSP120 – EXGSP129**

<http://www.matheux.be.tf>

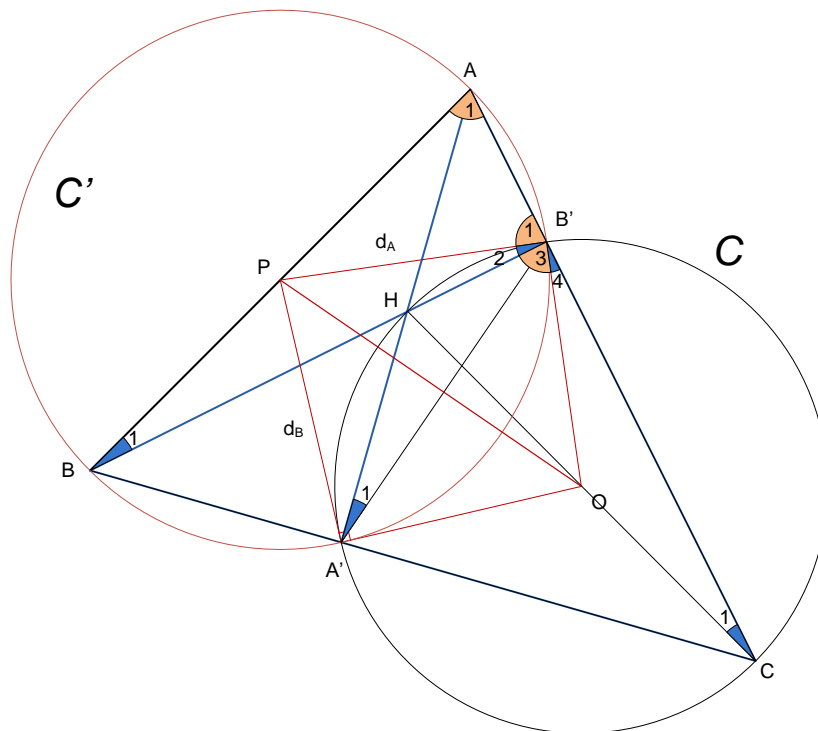
**Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson**

Décembre 08

## EXGSP130 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2009

Dans un triangle  $ABC$ , on note respectivement  $A'$  et  $B'$  les pieds des hauteurs issues des sommets  $A$  et  $B$ . On note  $H$  le point d'intersection de ces hauteurs. On trace le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $A'B'C$  et, par les points  $A'$  et  $B'$ , on mène respectivement les tangentes  $d_A$  et  $d_B$  à ce cercle.

- (a) Démontrer que  $[CH]$  est un diamètre de  $\mathcal{C}$
- (b) On note  $P$  l'intersection des droites  $AB$  et  $d_A$ . Démontrer que le triangle  $PA'B$  est isocèle.
- (c) En déduire que le point  $P$  est situé au milieu du côté  $[AB]$
- (d) En déduire que la droite  $d_B$  passe par  $P$ .



Les angles  $HB'C$  et  $HA'C$  sont droits car  $AA'$  et  $BB'$  sont des hauteurs.

Les points  $HB'CA'$  sont donc cocycliques et  $[HC]$  est un diamètre de  $\mathcal{C}$ .

Les angles  $BB'A$  et  $AA'B$  sont droits. Les points  $AB'A'B$  sont cocycliques.

Soit  $\mathcal{C}'$  le cercle circonscrit au quadrilatère défini par ces points.  $[AB]$  est un diamètre de  $\mathcal{C}'$ .

Les angles  $\widehat{B_1}$  et  $\widehat{A_1}$  sont égaux car ce sont des angles inscrits dans  $\mathcal{C}'$  qui interceptent

le même arc. Dans  $\mathcal{C}$ , l'angle inscrit  $\widehat{A_1}$  intercepte le même arc que l'angle tangentiel  $\widehat{B'_2}$ .

Ils sont donc égaux. Il en résulte que  $\widehat{B_1} = \widehat{B'_2}$ , c'est-à-dire que le triangle  $PBB'$  est isocèle et  $\overline{PB} = \overline{PB'}$ .

$\widehat{B'_1}$  et  $\widehat{B'_2}$  sont complémentaires puisque  $BB'$  est une hauteur.  $\widehat{B_1}$  et  $\widehat{A_1}$  sont complémentaires puisque  $BB'A$  est un triangle rectangle et comme  $\widehat{B_1} = \widehat{B'_2}$  nous avons  $\widehat{B'_1} = \widehat{A_1}$ , c'est-à-dire que le triangle  $APB'$  est isocèle et  $\overline{PA} = \overline{PB'}$ .

Dès lors,  $\overline{PA} = \overline{PB}$  et  $P$  est le milieu de  $[AB]$ . (C'est le centre de  $\mathcal{C}$ ) et  $[PA']$  est une médiane du triangle rectangle  $AA'B$ , donc  $\overline{PA'} = \overline{PB}$  et le triangle  $PA'B$  est isocèle.

Soit  $O$  le centre de  $\mathcal{C}$ .  $PB'$  est une tangente à  $\mathcal{C}$  et le triangle  $PB'O$  est rectangle.

Or les triangles  $PB'O$  et  $PA'O$  sont égaux puisqu'ils ont un côté commun, que  $\overline{OA'} = \overline{OB'}$

et que  $\overline{PB'} = \overline{PA'}$ . Les angles  $\widehat{PA'O}$  et  $\widehat{PB'O}$  sont égaux et droits. Nous concluons que  $A'P \equiv d_B$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A'$  et qu'elle passe par  $P$ .

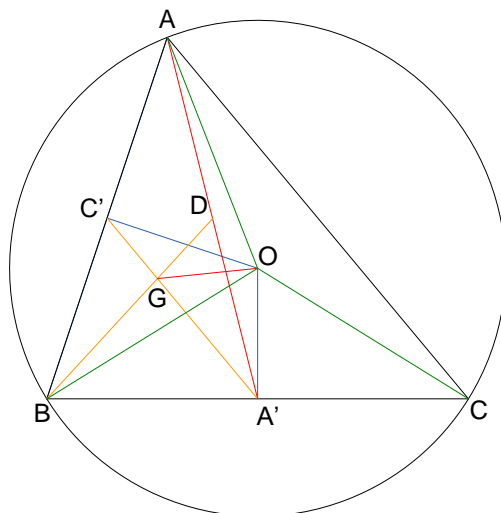
---

Le 16 aout 2009.

## EXGSP131– FACSA, ULG, Liège, Juillet 2009

On note  $O$  le centre du cercle circonscrit à un triangle  $ABC$ , et  $A'$  le pied de la médiane issue de  $A$  de ce triangle. On note  $G$  le centre de gravité du triangle  $AA'B$ .

Démontrer que les droites  $AA'$  et  $OG$  sont perpendiculaires si et seulement si le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ . (Suggestion : Calculer  $\overline{AA'} \cdot \overline{OG}$ )



Soit  $C'$  le milieu de  $AB$ . Joignons  $C'O$  qui est une médiatrice de  $AB$ .

Pour avoir une condition nécessaire et suffisante, il suffit de vérifier que le produit scalaire  $\overline{AA'} \cdot \overline{OG} = \vec{0}$ .

Pour alléger l'écriture, tous les couples de points ci-dessous désignent des vecteurs. Nous n'indiquons pas la flèche au dessus de ces couples.

$$\begin{aligned}
 OG &= OC' + C'B + BG = OC' + C'B + \underbrace{\frac{2}{3}BD}_{\substack{\text{car } G \text{ est le centre de} \\ \text{gravité du triangle } ABA'}} \\
 &= OC' + C'B + \underbrace{\frac{2}{3}BA + \frac{2}{3}AD}_{\text{car } BD=BA+AD} = OC' + C'B + \frac{2}{3}BA + \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}AA'\right)}_{\substack{\text{car } D \text{ est le} \\ \text{milieu de } AA'}} \\
 &= OC' + C'B + \frac{2}{3}BA + \frac{1}{3} \underbrace{AB + BA'}_{\text{car } AA'=AB+BA'} = OC' + C'B - \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}BA' \\
 AA' \cdot OG &= (AB + BA') \cdot \left(OC' + C'B - \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}BA'\right) \\
 &= \underbrace{AB \cdot OC'}_{=0 \text{ car } \perp} + BA' \cdot OC' + \underbrace{AB \cdot C'B + BA' \cdot C'B}_{AB=2C'B} - \frac{1}{3} \underbrace{AB^2}_{AB=2C'B} - \frac{1}{3} \cancel{AB \cdot BA'} + \frac{1}{3} \cancel{AB \cdot BA'} + \frac{1}{3} BA'^2 \\
 &= BA'(OA' + A'B + BC') + 2C'B^2 + BA' \cdot C'B - \frac{4}{3}C'B^2 + \frac{1}{3}BA'^2 \\
 &= \underbrace{BA' \cdot OA'}_{=0 \text{ car } \perp} + \underbrace{BA' \cdot A'B}_{=-A'B^2} + \cancel{BA' \cdot BC'} + 2C'B^2 + \cancel{BA' \cdot C'B} - \frac{4}{3}C'B^2 + \frac{1}{3}BA'^2 \\
 &= -A'B^2 + \frac{2}{3}C'B^2 + \frac{1}{3} \underbrace{BA'^2}_{=A'B^2} = \frac{2}{3}(C'B^2 - A'B^2)
 \end{aligned}$$

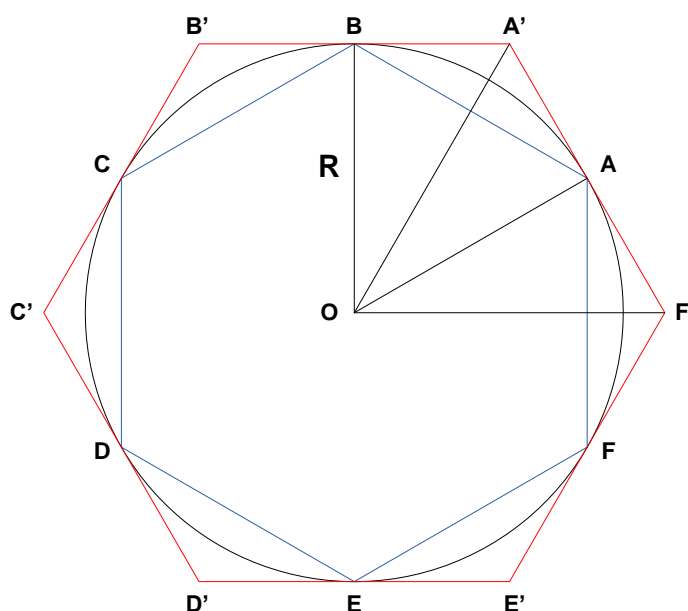
La relation est vérifiée si :  $C'B^2 - A'B^2 = 0 \rightarrow C'B^2 = A'B^2 \rightarrow |C'B|^2 = |A'B|^2 \rightarrow |C'B| = |A'B|$   
 $\rightarrow |BA| = |BC|$  et donc le triangle  $ABC$  est isocèle;

Le 16 aout 2009.

## EXGSP132 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$ . Un hexagone régulier est un hexagone dont tous les côtés ont la même longueur. On considère deux hexagones réguliers, le premier inscrit dans  $\mathcal{C}$ , et l'autre circonscrit à  $\mathcal{C}$ .

- 1) On demande de calculer les périmètres de ces deux hexagones.
- 2) On demande ensuite de déduire des résultats du point 1) deux approximations du nombre  $\pi$ , l'un par défaut, l'autre par excès.



Le périmètre de l'hexagone inscrit est simplement égal à  $6R$ .

L'angle  $A'OA$  vaut  $30^\circ \rightarrow AA' = R \cdot \tan 30 = \frac{R\sqrt{3}}{3} \rightarrow A'F' = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Le périmètre de l'hexagone circonscrit est donc :  $4R\sqrt{3}$

La longueur de la circonférence du cercle est comprise entre les périmètres des deux hexagones :

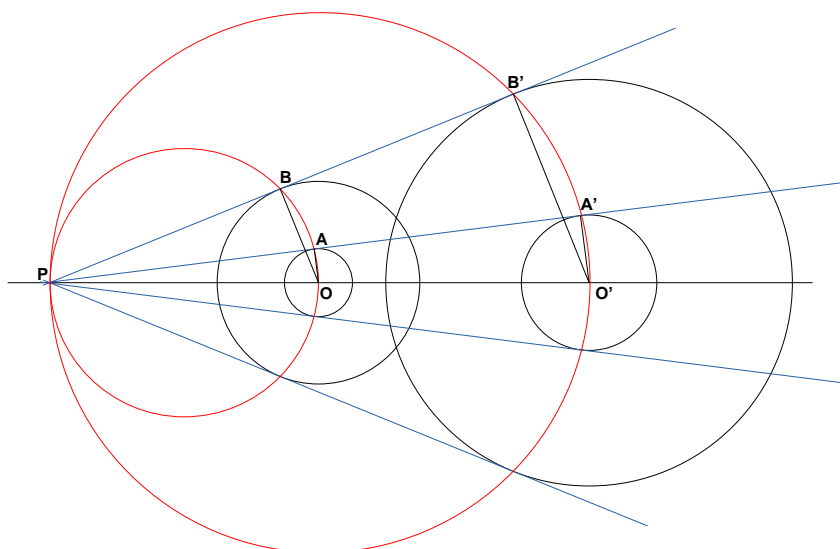
$$6R < 2\pi R < 4R\sqrt{3} \rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

Le 16 aout 2009.

## EXGSP133 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

On donne deux circonférences de centres fixes et choisies de telle manière que le rapport de leurs rayons soit constant.

- 1) Trouvez les lieux décrits par les points de contact des tangentes communes.
- 2) Expliquez votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Soit  $k = \frac{R'}{R}$  le rapport des rayons des deux cercles.

La tangente  $AA'$  coupe l'axe  $OO'$  en un point  $P$ . Les triangles rectangles  $PAO$  et  $PA'O'$  sont

semblables et on a :  $\frac{PO'}{PO} = \frac{OA'}{OA} = k$  (1)

La tangente  $BB'$  coupe l'axe  $OO'$  en un point  $P'$ . Les triangles rectangles  $P'BO$  et  $P'B'O'$  sont

semblables et on a :  $\frac{P'O'}{P'O} = \frac{OB'}{OB} = k$  (2)

$$(1) = (2) \rightarrow \frac{PO'}{PO} = \frac{P'O'}{P'O} \rightarrow \frac{PO + OO'}{PO} = \frac{P'O + OO'}{P'O} \rightarrow 1 + \frac{OO'}{PO} = 1 + \frac{OO'}{P'O} \rightarrow PO = P'O$$

Les points  $P$  et  $P'$  sont donc confondus.

On en déduit que toutes les tangentes sont concourantes en  $P$

Le quadrilatère  $PBOA$  est inscriptible dans un cercle de diamètre  $PO$  puisque  $PBO = PAO = 90^\circ$

Le lieu des points de tangence au petit cercle est donc un cercle de diamètre  $PO$ .

Le quadrilatère  $PB'O'A'$  est inscriptible dans un cercle de diamètre  $PO'$  puisque  $\overline{PB'O'} = \overline{PA'O'} = 90^\circ$

Le lieu des points de tangence au grand cercle est donc un cercle de diamètre  $PO'$ .

Calculons les diamètres de ces cercles en fonction du rapport  $k$  et de la distance  $OO'$ .

$$\frac{PO'}{PO} = k \rightarrow PO = \frac{1}{k} PO'$$

$$PO' = PO + OO' = \frac{1}{k} PO' + OO' \rightarrow PO' - \frac{1}{k} PO' = OO' \rightarrow PO' = OO' \cdot \frac{k}{k-1} \rightarrow PO = OO' \cdot \frac{1}{k-1}$$

---

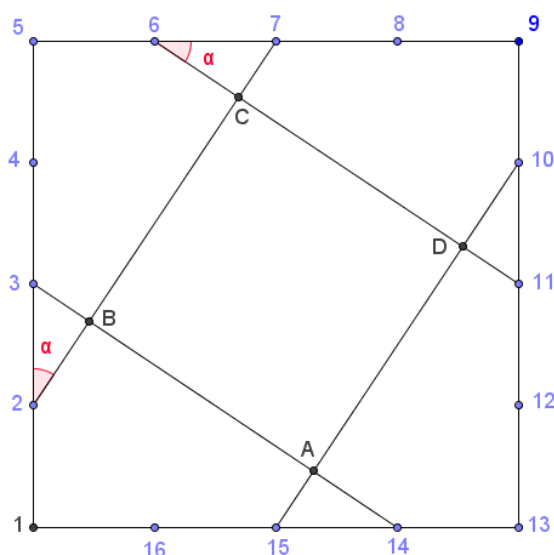
Le 16 aout 2009.

## EXGSP134 – FACS, ULB, Bruxelles – juillet 2009.

Les côtés d'un carré sont divisés en quatre segments de même longueur. On numérote de 1 à 16 les points des subdivisions en commençant par un des sommets du carré et en tournant dans le sens horlogique. On relie le point 2 au point 7, le point 6 au point 11, le point 10 au point 15 et le point 14 au point 3. Les quatre droites ainsi obtenues déterminent un quadrilatère.

a) Quelle est la nature de ce quadrilatère?

b) Combien de fois l'aire du quadrilatère est-elle comprise dans celle du carré initial?



1) Les triangles rectangles  $(2)(5)(7)$  et  $(6)(9)(11)$  sont isométriques car les côtés de l'angle droit sont de même mesure. Les angles correspondant sont donc de même amplitude.

Les triangles  $(3)B(2)$  et  $(6)C(7)$  sont isométriques (un côté de même mesure compris entre deux angles de même amplitude), et, comme les angles  $\widehat{(3)(2)B}$  et  $\widehat{(2)(3)B}$  sont complémentaires, les triangles sont de plus rectangles.

Finalement, on en déduit que les quatre triangles  $(3)B(2)$ ,  $(6)C(7)$ ,  $(10)D(11)$  et  $(14)A(15)$  sont tous isométriques.

$$\rightarrow |BC| = |(2)(7)| - |(2)B| - |C(7)| = |(6)(11)| - |(6)C| - |D(11)| = |CD|$$

On démontre de la même façon que :  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

En conclusion, le quadrilatère  $ABCD$  est un carré.



$$2) \text{ On a } \tan \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{9}{13} \rightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{13} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{D'une part : } |(2)(7)| = \frac{|(2)(5)|}{\cos \alpha} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{13}}{13}} = \sqrt{13}$$

$$\text{D'autre part : } |(2)B| = |(2)(3)| \cdot \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ et } |C(7)| = |(6)(7)| \cdot \sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{Donc : } |BC| = |(2)(7)| - |(2)B| - |C(7)| = \sqrt{13} - \frac{3\sqrt{13}}{13} - \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$$

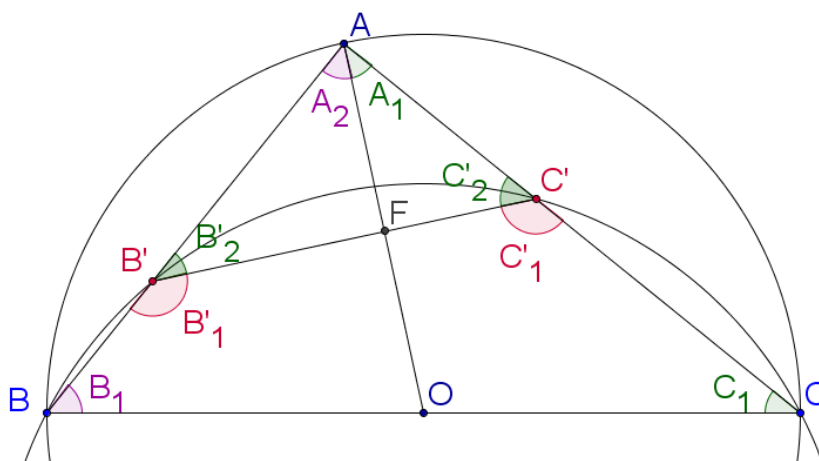
$$\text{Le rapport des aires est alors : } \frac{A_{(1)(5)(9)(13)}}{A_{ABCD}} = \left( \frac{4}{\frac{8\sqrt{13}}{13}} \right)^2 = \boxed{\frac{13}{4}}$$

Le 22 juin 2010.

## EXGSP135 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2010.

On considère un cercle passant par les extrémités  $B$  et  $C$  de l'hypoténuse d'un triangle rectangle  $ABC$ . Ce cercle coupe la droite  $AB$  en  $B$  et en un autre point noté  $B'$ . De même, il coupe la droite  $AC$  en  $C$  et en un autre point noté  $C'$ . Les points  $B'$  et  $C'$  sont distincts de  $A$ .

Démontrer que la médiane issue de  $A$  du triangle  $ABC$  est confondue avec la hauteur issue de  $A$  du triangle  $AB'C'$ .



Comme le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  et que  $AO$  est une médiane, le triangle  $AOC$  est isocèle :  $\rightarrow A_1 = C_1$ . (1)

Les points  $B, B', C'$  et  $C$  sont cocycliques. Donc  $B_1 + C'_1 = \pi$  et comme  $C'_1 + C'_2 = \pi$ , nous en déduisons que  $\widehat{B_1} = \widehat{C'_2}$ . (2)

Cependant, comme  $\widehat{B_1} + C_1 = \frac{\pi}{2}$ , en tenant compte de (1) et (2), nous tirons :  $\widehat{A_1} + C'_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Ces angles sont donc complémentaires. Le triangle  $AHC'$  est rectangle en  $H$  et  $AH$  est une hauteur.

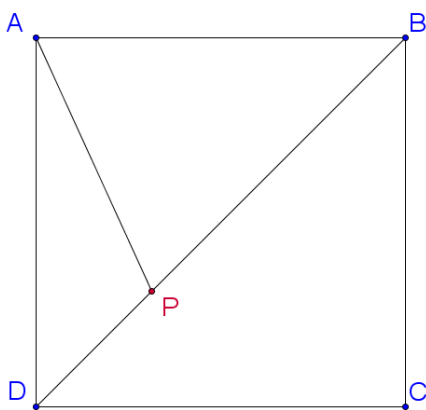
Le 13 juillet 2010.

## EXGSP136 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2010.

Un point  $P$  appartient à la diagonale  $BD$  d'un carré  $ABCD$ . Démontrer l'égalité :

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = |AP|^2 - c^2$$

où  $c$  désigne la longueur d'un côté du carré, et où  $|XY|$  représente la longueur du segment  $[XY]$ .



$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AP}}_{=\overrightarrow{CD}} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \quad \text{Car } BA \text{ et } DA \text{ sont perpendiculaires} \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + |AP|^2 \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} + |AP|^2 \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \cdot \overrightarrow{CA} + |AP|^2 \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \underbrace{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CA}}_{=0} + |AP|^2 \quad \text{Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.} \\ &= -c^2 + |AP|^2 \quad \text{car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|AB|^2 = -c^2 \\ & \quad \text{La projection de } AC \text{ sur } AB \text{ est } AB \end{aligned}$$

Le 13 juillet 2010.

## EXGSP137 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, série 2.

Un quadrilatère est cyclique si ses quatre sommets sont situés sur une même circonférence.

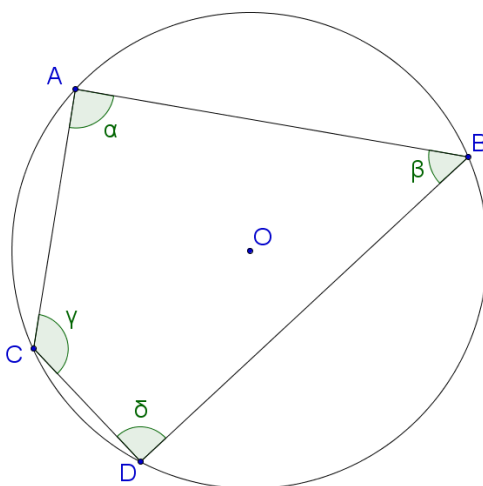
1. Montrez que la somme des angles opposés d'un quadrilatère cyclique est égale à  $\pi$ .
2. Illustrez votre démonstration à l'aide d'un dessin clair et précis.

On considère ensuite un triangle  $ABC$  quelconque. On choisit un point sur chaque arête de ce triangle. Soit  $D$  le point sur l'arête  $AB$ ,  $E$  le point sur l'arête  $AC$  et  $F$  le point sur l'arête  $BC$ .

3. Démontrez que les cercles  $ADE$ ,  $BDF$  et  $CEF$  sont concurrents (théorème de Miquel).

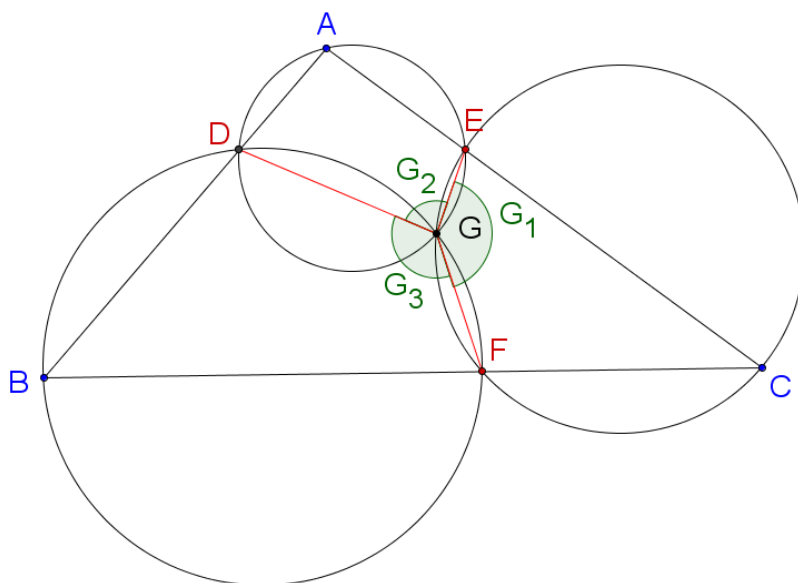
La propriété des quadrilatères cycliques démontrée au point 1. sera bien évidemment d'une grande utilité.

4. Illustrez votre démonstration à l'aide d'un dessin clair et précis.



L'angle inscrit  $CAB$  intercepte l'arc  $CBD$ . L'angle inscrit  $CDB$  intercepte l'arc  $CAB$ . Ensemble, ils interceptent la totalité du cercle. Or l'amplitude d'un angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. L'angle au centre qui intercepte la totalité du cercle vaut  $2\pi$ . En conclusion :  $\overline{CAB + CDB} = \pi$ . Les angles sont donc supplémentaires.

De la même façon, on déduira que :  $\overline{ACD + ABD} = \pi$ .



Soit  $G$  l'intersection des cercles déterminés par les points  $A, D, E$  et les points  $C, E, F$ .

En vertu de la proposition précédente, on a alors :

$$G_2 + A = \pi \quad \text{et} \quad G_1 + C = \pi$$

Or dans le triangle  $ABC$  :  $A + B + C = \pi$

On déduit :  $\pi - G_2 + \widehat{B} + \pi - G_1 = \pi$

$$\widehat{B} + 2\pi - G_2 - G_1 = \pi$$

Et comme :  $\widehat{G_3} = 2\pi - G_2 - G_1$

On conclut :  $\widehat{B} + \widehat{G_3} = \pi$

Autrement dit, les angles  $\widehat{B}$  et  $\widehat{G_3}$  sont supplémentaires. Le point  $G$  est donc situé sur le cercle déterminé par les points  $BDF$ . Les trois cercles sont donc concurrents.

---

Le 16 aout 2009.

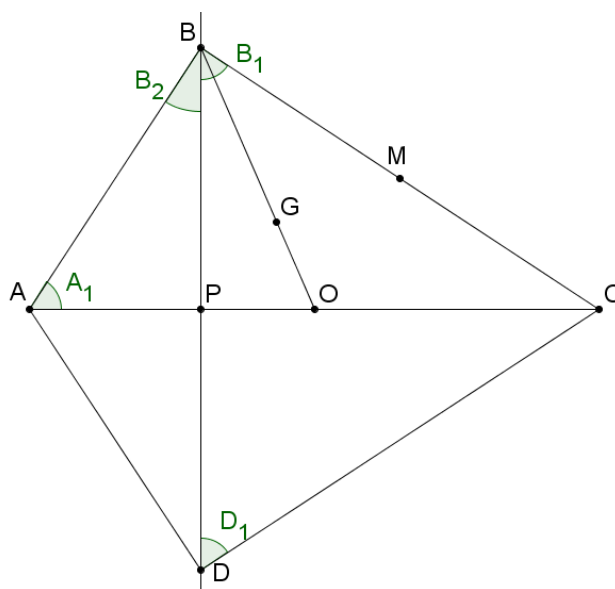
## EXGSP138 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, Série C.

Considérons un quadrilatère variable  $ABCD$  tel que:

- ses diagonales  $AC$  et  $BD$  sont perpendiculaires entre elles et se coupent en un point  $P$  variable sur  $AC$  mais qui reste entre  $A$  et  $C$ ;
- ce point  $P$  est le milieu de  $BD$ ;
- sa diagonale  $BD$  est de longueur variable;
- sa diagonale  $AC$  est de longueur constante;
- les 2 angles variables  $\widehat{PAB}$  et  $\widehat{PDC}$  restent égaux entre eux, quelle que soit la position  $P$  et quelle que soit la position de  $BD$ .

On demande :

- Par les méthodes de la géométrie synthétique :
  - A. de déterminer le lieu du point  $B$ ;
  - B. de déterminer le lieu du point  $M$ , milieu du côté variable  $BC$ ;
  - C. de déterminer le lieu du point  $G$ , centre de gravité du triangle variable  $ACB$ ;
  - D. de déterminer s'il existe une circonférence inscrite au quadrilatère  $ABCD$  qui soit simultanément tangente aux 4 côtés de ce quadrilatère.
- Par les méthodes de la géométrie analytique :
  - E. de déterminer, dans le système d'axes orthonormés  $OXY$  ( $O$  étant le milieu de  $AC$  et  $OX$  étant aligné sur  $AC$  et orienté comme  $\overrightarrow{AC}$ ) l'équation des paraboles admettant la diagonale  $BD$  comme directrice et le point  $A$  comme foyer, dans le cas où  $BD = 40$  et  $AC = 50$ .



A.  $A_1 = D_1$  par hypothèse.

$D_1 = B_1$  car les triangles rectangles  $BPC$  et  $DPC$  sont égaux

( $PC$  est commun et  $|PD| = |PB|$  par hypothèse).

Or  $A_1$  et  $B_2$  sont complémentaires. Donc  $B_1 + B_2 = 90^\circ$ .

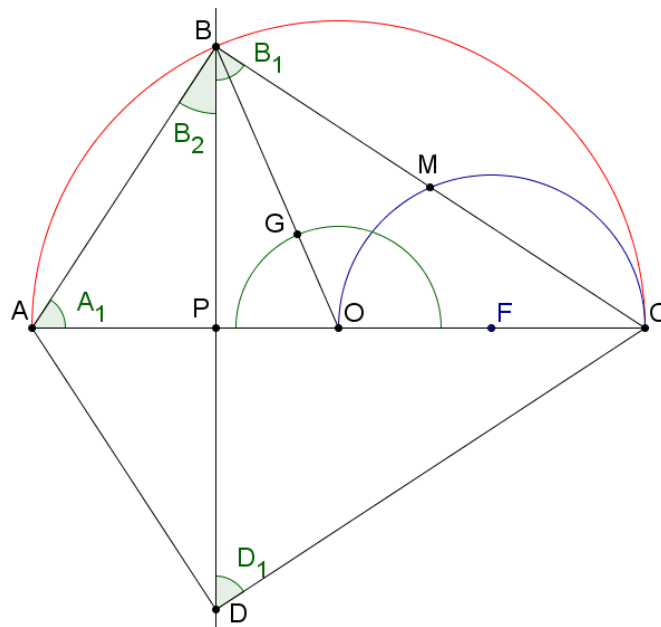
$B$  regarde donc  $AC$  selon un angle droit. Le lieu de  $B$  est donc un demi-cercle de diamètre  $AC$ .

B. Le point  $M$ , étant le milieu de  $BC$ , est l'image de  $B$  selon l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $1/2$ . Le lieu de  $M$  est donc un demi-cercle de diamètre  $AC/2$  et de centre  $F$  (avec  $CF = CA/4$ ).

C. Soit  $O$  le milieu de  $AC$ . Le point  $G$  est situé sur la médiane  $OB$  au  $1/3$  en partant de  $O$ .

$G$  est donc l'image de  $B$  selon l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $1/3$ .

Le lieu de  $G$  est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $AC/3$ .

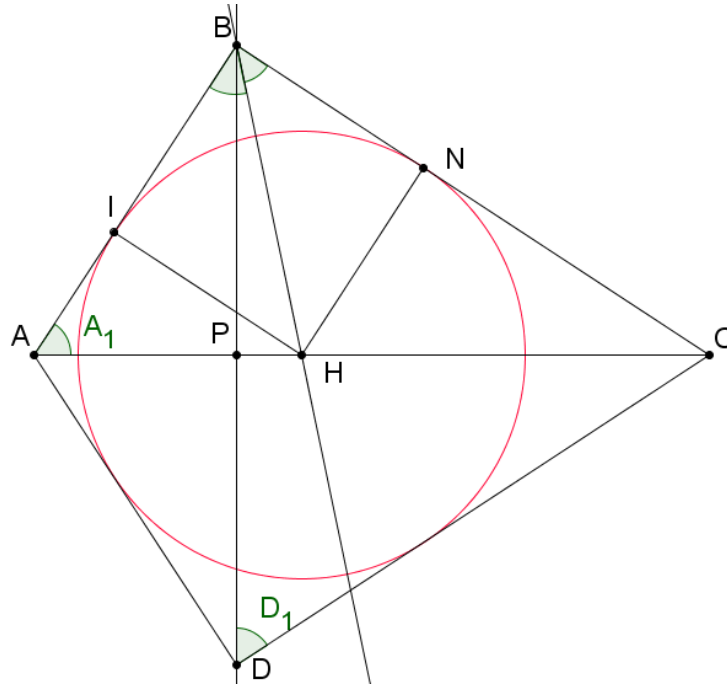


D. Si ce cercle existe, son centre est sur  $AC$  puisque  $AC$  est un axe de symétrie du quadrilatère.

Soit  $H$  l'intersection de la bissectrice de  $B$  et de  $AC$ .

Donc  $H$  est le centre d'un cercle tangent aux côtés.

Par symétrie, ce cercle sera aussi tangent aux côtés  $AD$  et  $DC$ .



E. Il faut d'abord déterminer l'abscisse du point P. Pour cela déterminons les valeurs possibles de l'angle  $A_1$  (ou  $D_1$ ).

$$|AC| = |AP| - |PC| = \frac{|BP|}{\tan A_1} + |DP| \cdot \tan D_1 \rightarrow |AC| \cdot \tan A_1 = |BP| + |DP| \cdot \tan A_1$$

$$\rightarrow 5 \tan A_1 = 2 + 2 \tan^2 A_1 \rightarrow 2 \tan^2 A_1 - 5 \tan A_1 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \widehat{\tan A_1} = 2 \\ \widehat{\tan A_1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1er cas :  $\widehat{\tan A_1} = 2$

$$|AP| = \frac{|BP|}{\tan A_1} = \frac{20}{2} = 10. \text{ La directrice a alors pour équation : } y = -15$$

Un parabole est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice :

$$(x+25)^2 + y^2 = (x+15)^2 \rightarrow \boxed{x = -\frac{y^2 + 400}{20}}$$

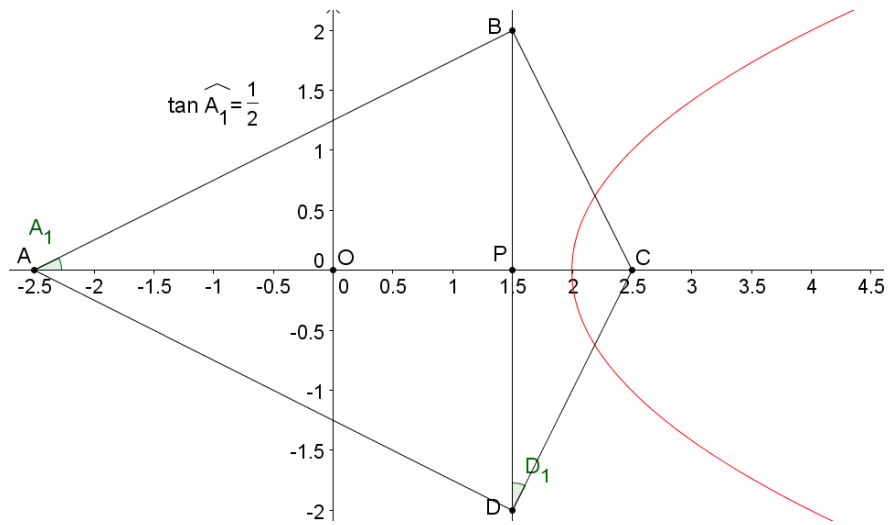
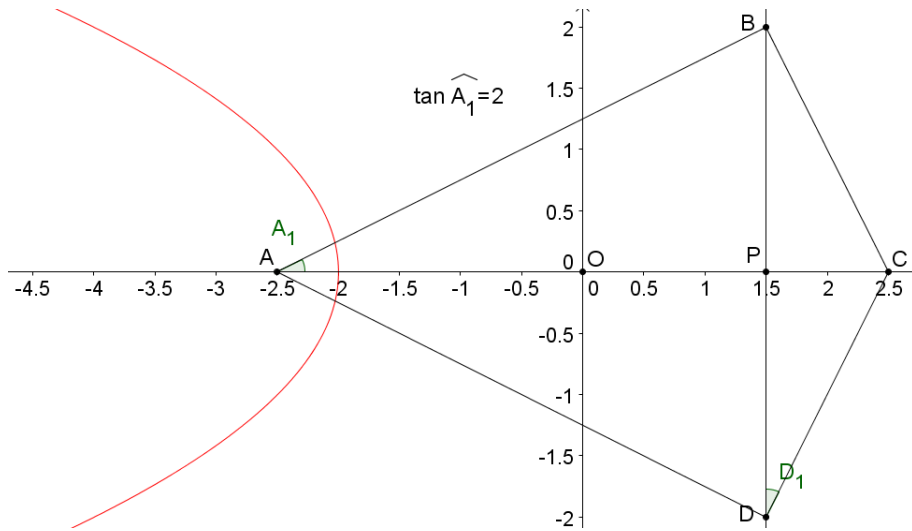
lème cas :  $\widehat{\tan A_1} = 1/2$

$$|AP| = \frac{|BP|}{\tan A_1} = \frac{20}{1/2} = 40. \text{ La directrice a alors pour équation : } y = +15$$

Un parabole est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice :

$$(x-25)^2 + y^2 = (x-15)^2 \rightarrow \boxed{x = +\frac{y^2 + 400}{20}}$$





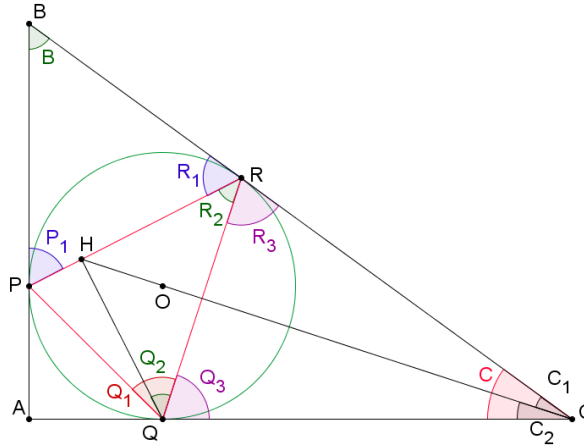
Le 16 aout 2009.

## EXGSP139 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ . Le centre du cercle inscrit à ce triangle est noté  $O$ . Ce cercle rencontre les côtés  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$  du triangle en trois points notés respectivement  $P$ ,  $Q$  et  $R$ .

Dans le triangle  $PQR$ , le pied de la hauteur issue de  $Q$  est noté  $H$ .

- 1) Déterminer la valeur de l'angle  $PQR$ .
- 2) Démontrer que les points  $O$ ,  $C$  et  $H$  sont alignés.



a) Soit donc  $\widehat{PQR} = Q_1$

$P_1$  et  $R_1$  sont deux angles tangentiels qui interceptent le même arc :  $P_1 = R_1$

Donc dans le triangle  $BPR$  :  $B + P_1 + R_1 = \pi$  (1)

Or l'angle inscrit  $Q_1$  intercepte le même arc que  $P_1$  et  $R_1$  :  $P_1 = R_1 = Q_1$

La relation (1) s'écrit :  $\widehat{B + 2Q_1} = \pi \Rightarrow Q_1 = \frac{\pi - B}{2}$

b) Appliquons cette relation à l'angle  $R_2 \rightarrow R_2 = \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ .

Le triangle rectangle  $QHR$  est donc aussi isocèle  $\Rightarrow |HR| = |HQ|$  et  $\widehat{Q_2} = R_2$

D'autre part, le triangle  $CQR$  est isocèle puisque  $CR$  et  $CQ$  sont deux tangentes issues d'un même point  $C$ .  $\Rightarrow |RC| = |QC|$  et  $R_3 = Q_3$ .

Considérons maintenant les triangles  $HRC$  et  $HQC$ . Ils sont isométriques car ils ont un angle égal ( $\widehat{R_2 + R_3} = \widehat{Q_2 + Q_3}$ ) compris entre deux côtés égaux ( $|HR| = |HQ|$  et  $|RC| = |QC|$ ).

Nous concluons que les angles  $C_1$  et  $C_2$  sont égaux.  $H$  est alors situé sur la bissectrice de l'angle  $\widehat{C}$ . Comme  $O$  est aussi sur cette bissectrice puisque le centre du cercle inscrit est le point de rencontre des bissectrices,  $O$ ,  $H$  et  $C$  sont alignés.