Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 3

EXGSP030 – EXGSP039

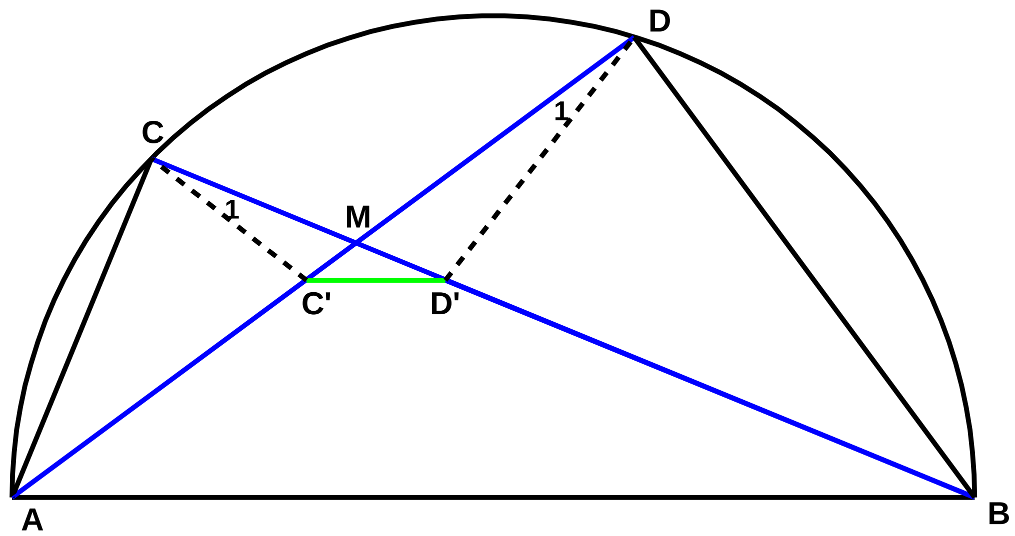
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGSP030 – Liège, septembre 1997.

Soient un demi-cercle de diamètre AB et C et D deux points du demi-cercle de A et B.
On suppose que les cordes AD et BC se coupent en M.
On fixe C' sur la corde AD tel que | AC' | = | AC | et D' sur la corde BC tel que | BD' | = | BD |.
Démontrer que les triangles ACM et BDM sont semblables et que C'D' est parallèle à AB.



$CAD = CBD$ car interceptent le même arc.

$\rightarrow$ Les triangles rectangles ACM et BDM sont semblables

$$\rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{\underline{DM}} = \boxed{\frac{AM}{BM}}$$

Les triangle $CC'A$ et $DD'B$ sont aussi semblables

(car deux triangles isocèles, et l'angle au sommet égal).

$$\rightarrow \frac{CC}{\underline{\underline{DD'}}} = \frac{CA}{DB} = \boxed{\frac{C'A}{D'B}}$$

On déduit aussi que $\widehat{DD'B} = \widehat{AC'C} \rightarrow \pi - \widehat{DD'B} = \pi - \widehat{AC'C}$

$\rightarrow \widehat{MD'D} = \widehat{MC'C}$

De plus $\widehat{CMC'} = \widehat{DMD'}$ car angles opposés par le sommet

$\rightarrow$ $\Delta CC'M$ et $\Delta DD'M$ sont semblables

$$\rightarrow \frac{CM}{\underline{DM}} = \boxed{\frac{C'M}{D'M}} = \frac{CC'}{\underline{\underline{DD'}}}$$

On déduit des égalités précédentes que :

$$\rightarrow \boxed{\frac{AM}{BM}} = \boxed{\frac{C'M}{D'M}} = \boxed{\frac{C'A}{D'B}}$$

Autrement dit, les $\Delta CC'M \; et \; \Delta DD'M$ sont semblables.

Par conséquent, $\boxed{C'D' /\!/ AB}$

EXGSP031– Liège, juillet 1996.

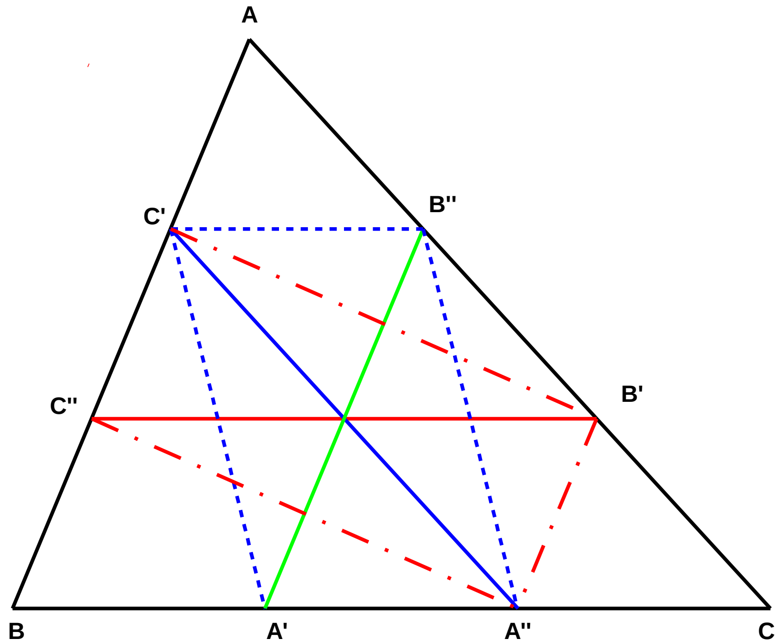
Soit ABC un triangle.
On fixe C’, C’’ sur le côté AB de sorte que :

$$|AC'| = |C'C''| = |C''B|$$

De même, on fixe A’, A’’ et B’, B’’ sur BC et CA de sorte que :

$$|BA'| = |A'A''| = |A''C|$$
$$|CB'| = |B'B''| = |B''A|$$

Démontrer que les segments A’B’’, B’C’’ et C’A’’ se coupent en leur milieu



On a immédiatement :

$$\begin{cases} C'B'' // AB \\ |C'B'| = |A'A''| \end{cases} \rightarrow A'A''B''C' \text{ est un parallélogramme.}$$

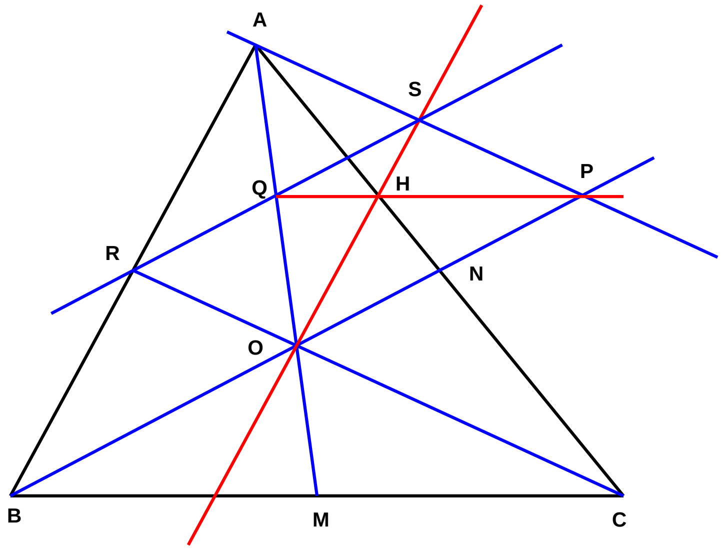
De même, on a $C'C''A''B'$ est un parallélogramme.

Ces deux parallélogrammes ont $C'A''$ comme diagonale commune, dont le milieu est unique.

$\rightarrow$ $A'B'$, $B'C''$ et $C'A''$ se coupent en leur milieu.

EXGSP032– Liège, septembre 1996.

Soit un triangle ABC. On désigne par M le milieu de BC, par N le milieu de AC et par O le point d'intersection de AM et BN.
La droite BN coupe la parallèle à CO passant par A en P.
Démontrer que la parallèle passant par O et la parallèle à BC passant par P se coupent en un point de AC.



$\Delta ANP = \Delta ONC$ car un côté égal compris entre deux angles égaux.

$\rightarrow$ ON=NP $\rightarrow$ AC est une médiane du ΔAOP

$OP = OB$ puisque $ON = \dfrac{1}{2}OB$ (O est centre de gravité).

$\rightarrow$ $\Delta BMO = \Delta OQP$ car un côté égal compris entre deux angles égaux.

$\rightarrow$ OQ=OM=$\dfrac{1}{2}OA$ $\rightarrow$ PQ est une médiane du ΔAOP

CO coupe AB en R. CR est une médiane de ΔABC.

$RQ\ //\ BP$ puisque RQ joint le milieu des deux côtés du ΔABO.

RQ passe par S puisque $ASOR$ est un parallélogramme dont AO est une diagonale et Q le milieu de celle-ci.

$\rightarrow$ Dans le ΔABP, comme $BR = RA$ $\rightarrow$ $AS = SP$.

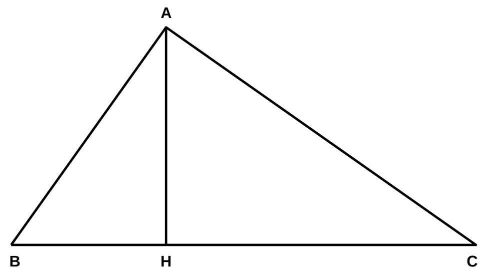
$\rightarrow$ OS est une médiane du ΔAOP

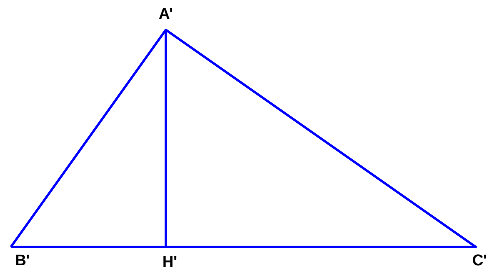
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point:

$\rightarrow$ QP coupe OS en H situé sur AC.

EXGSP033– Liège, septembre 1996.

Soit un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
De même, soient A'B'C' un triangle rectangle en A' et H' le pied de la hauteur issue de A'.
Démontrer que si | BC | = | B'C' | et | AH | = | A'H' |, les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.





$\begin{cases} AH^2 = BH.HC \\ A'H'^2 = B'H'.H'C' \end{cases}$ car dans un triangle rectangle la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$\rightarrow \begin{cases} AH^2 = BH.(BC - BH) \\ A'H'^2 = B'H'.(B'C' - B'H') \end{cases}$

Comme $AH = A'H' = a$ et $BC = B'C' = b$, on obtient :

$\begin{cases} a^2 = BH.(b - BH) \\ a^2 = B'H'.(b - B'H') \end{cases}$ Ce sont deux équations du second degré qui la même forme et les mêmes coefficients. Les solutions sont donc identiques.

$\rightarrow$ $BH = B'H'$ et $CH = C'H'$

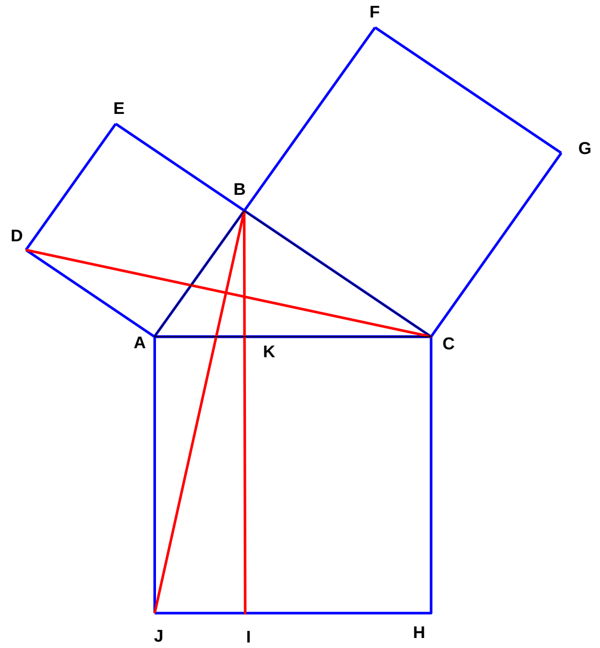
$\rightarrow$ ΔABC et $\Delta A'B'C'$ sont isométriques.

Note
Comme c'est une équation du second dégré, il y a deux solutions, qui correspondent aux symétriques.

EXGSP034 – Théorème de Pythagore, démonstration d'Euclide..

Dans un triangle rectangle ABC, si AC désigne l'hypoténuse, on a

$$| AB |^2 + | BC |^2 = | AC |^2|$$



On trace BJ et DC. On trace $BI \,//\, CH$.

$\Delta ADC = \Delta ABJ$ car $\angle DAC = \angle BAJ$, $DA = AB$ et $AC = AJ$

Le ΔADC a une surface moitié du carré $ADEB$, car $EC \,//\, DA$

$$\mathcal{S}_{ADC} = \frac{1}{2} DA.DE \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{ADEB} = DA.DE$$

De même $\mathcal{S}_{ABJ} = \frac{1}{2} \mathcal{S}_{AKIJ}$ car $BI \,//\, AJ$

$\rightarrow \quad \mathcal{S}_{ADEB} = \mathcal{S}_{AKIJ}$

On démontre de même, mutadis mutandis, que

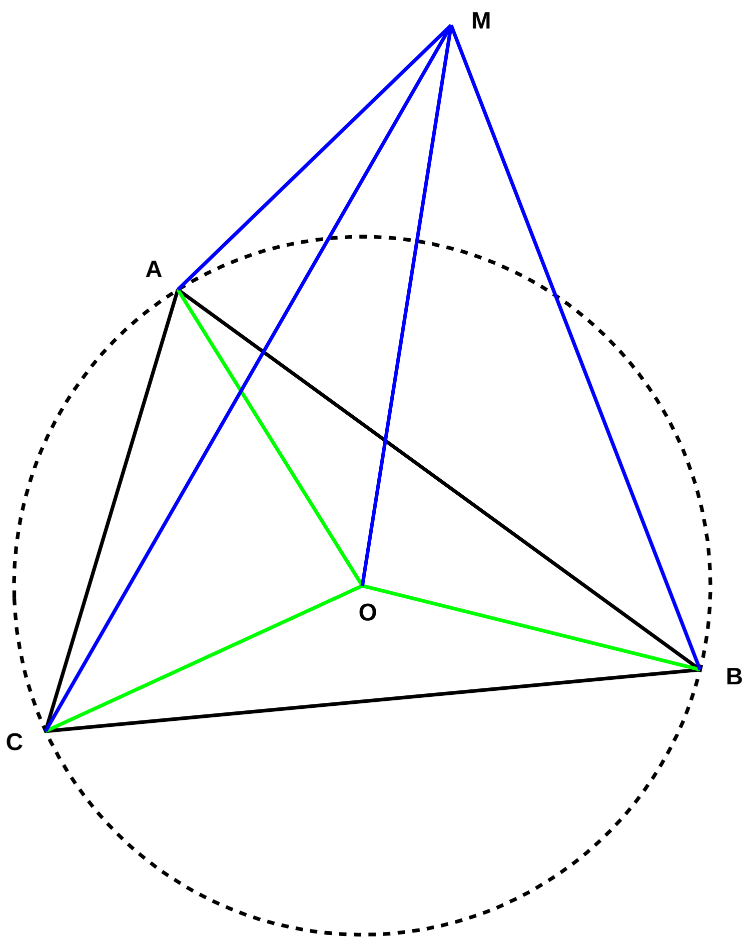
$$\mathcal{S}_{BFGC} = \mathcal{S}_{KCHI}$$

Conclusion : $\boxed{| AB |^2 + | BC |^2 = | AC |^2}$

EXGSP035 – Liège, juillet 2000.

Si O est le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC (O est le point d'intersection des médiatrices) et si M est un point quelconque du plan, démontrer que le vecteur **OM** est orthogonal au vecteur :

$$|\mathbf{MA}|^2.\mathbf{BC} + |\mathbf{MB}|^2.\mathbf{CA} + |\mathbf{MC}|^2.\mathbf{AB}|$$



$$\begin{cases} |\mathbf{MA}|^2 \,.\, \mathbf{BC} = \mathbf{MA}^2.\mathbf{BC} = (\mathbf{MO}+\mathbf{OA})^2.\,\mathbf{BC} \\ \mathbf{MB}|^2 \,.\, \mathbf{BA} = \mathbf{MB}^2.\mathbf{CA} = (\mathbf{MO}+\mathbf{OB})^2.\,\mathbf{CA} \\ \mathbf{MC}|^2 \,.\, \mathbf{AB} = \mathbf{MC}^2.\mathbf{AB} = (\mathbf{MO}+\mathbf{OC})^2.\,\mathbf{AB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{MA}|^2 \,.\, \mathbf{BC} = (\mathbf{MO}+2\,\mathbf{MO}\,.\,\mathbf{OA}+\mathbf{OA})^2\,.\,\mathbf{BC} & (1) \\ \mathbf{MB}|^2 \,.\, \mathbf{BA} = (\mathbf{MO}+2\,\mathbf{MO}\,.\,\mathbf{OB}+\mathbf{OB})^2\,.\,\mathbf{CA} & (2) \\ \mathbf{MC}|^2 \,.\, \mathbf{AB} = (\mathbf{MO}+2\,\mathbf{MO}\,.\,\mathbf{OC}+\mathbf{OC})^2\,.\,\mathbf{AB} & (3) \end{cases}$$

Or comme *O* est le centre du cercle inscrit :

$\mathbf{OA}^2 = |\mathbf{OA}|^2 = \quad \mathbf{OB}^2 = |\mathbf{OB}|^2 = \quad \mathbf{OC}^2 = |\mathbf{OC}|^2$

L'expression $\mathbf{BC}+\mathbf{CA}+\mathbf{AB}=0$

peut s'écrire : $\mathbf{OA}^2.\mathbf{BC}+\mathbf{OB}^2.\mathbf{CA}+\mathbf{OC}^2.\mathbf{AB}=0 \quad (4)$

De même : $\mathbf{MO}^2.\mathbf{BC}+\mathbf{MO}^2.\mathbf{CA}+\mathbf{MO}^2.\mathbf{AB}=0 \quad (5)$

Additionnons les équations (1), (2) et (3) en tenant compte de (4) et (5).

Il reste :

$$2\,\mathbf{MO}\,(\mathbf{OA}\,\mathbf{BC}+\mathbf{OB}\,\mathbf{CA}+\mathbf{OC}\,\mathbf{AB}) \qquad (6)$$

$$= 2\,\mathbf{MO}\,(\mathbf{OA}\,(\mathbf{BO}+\mathbf{OC})+\mathbf{OB}\,(\mathbf{CO}+\mathbf{OA})+\mathbf{OC}\,(\mathbf{AO}+\mathbf{OB}))$$

$$= 2\,\mathbf{MO}\,(-\mathbf{OA}\,\mathbf{OB}+\mathbf{OA}\,\mathbf{OC}-\mathbf{OB}\,\mathbf{OC}+\mathbf{OA}\,\mathbf{OB}-\mathbf{OC}\,\mathbf{OA}+\mathbf{OC}\,\mathbf{OB})$$

$$= 0$$

Le deuxième vecteur est donc nul.

Par conséquent : les deux vecteurs sont orthogonaux, puisque leur produit est nul.

Remarque :

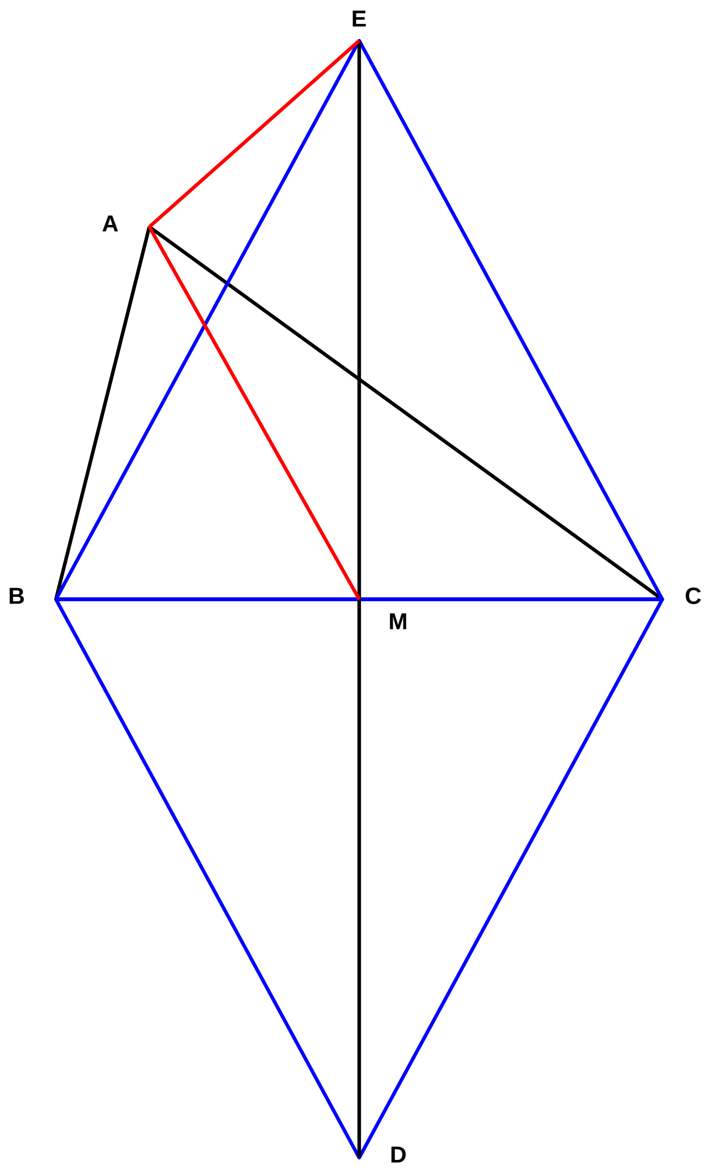
On ne peut pas déduire directement que l'équation (6) est nulle.

Il ne faut pas confondre le type de l'équation $\mathbf{OA}\,\mathbf{BC}+\mathbf{OB}\,\mathbf{CA}+\mathbf{OC}\,\mathbf{AB}$ (où chaque terme est le produit de deux vecteurs) avec le type de l'équation (4) $\mathbf{OA}^2.\mathbf{BC}+\mathbf{OB}^2.\mathbf{CA}+\mathbf{OC}^2.\mathbf{AB}$ (où chaque terme est le produit d'un scalaire par un vecteur).

EXGSP036 – Liège, septembre 2000.

On donne un triangle ABC et deux points distincts D et E tels que BCD et BCE soient des triangles équilatéraux.
Montrer que :

$$|AD|^2 + |AE|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2$$



Développons le premier membre de l'égalité :

$$\begin{cases} \mathbf{AD} = \mathbf{AM} + \mathbf{MD} & \rightarrow \ \mathbf{AD}^2 = \mathbf{AM}^2 + 2\,\mathbf{AM}\,\mathbf{MD} + \mathbf{MD}^2 \\ \mathbf{AE} = \mathbf{AM} + \mathbf{ME} & \rightarrow \ \mathbf{AE}^2 = \mathbf{AM}^2 + 2\,\mathbf{AM}\,\mathbf{ME} + \mathbf{ME}^2 \end{cases}$$

En additionnant membre à membres et en tenant compte que

$\mathbf{AM}\,\mathbf{MD} = -\mathbf{AM}\,\mathbf{ME}$ et que $\mathbf{MD}^2 = \mathbf{ME}^2$

On obtient:

$$|\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + 2\,|\mathbf{ME}|^2$$

Or $|\mathbf{ME}|^2 = \frac{3}{4}|\mathbf{BC}|^2$ (car BE=BC=$\frac{1}{2}MB$)

Finalement: $|\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + \frac{3}{2}|\mathbf{BC}|^2$ (1)

Développons le second membre de l'égalité.

$$\begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{AM} + \mathbf{MB} = \mathbf{AM} + \frac{1}{2}\mathbf{CB} \\ \mathbf{BC} = \mathbf{BC} \\ \mathbf{CA} = \mathbf{CM} + \mathbf{MA} = \frac{1}{2}\mathbf{CB} + \mathbf{MA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{AM}|^2 + \mathbf{AM}\,\mathbf{CB} + \frac{1}{4}|\mathbf{CB}|^2 \\ |\mathbf{BC}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 \\ |\mathbf{CA}|^2 = \frac{1}{4}|\mathbf{CB}|^2 + \mathbf{CB}\,\mathbf{MA} + |\mathbf{MA}|^2 \end{cases}$$

On additionne membre à membre :

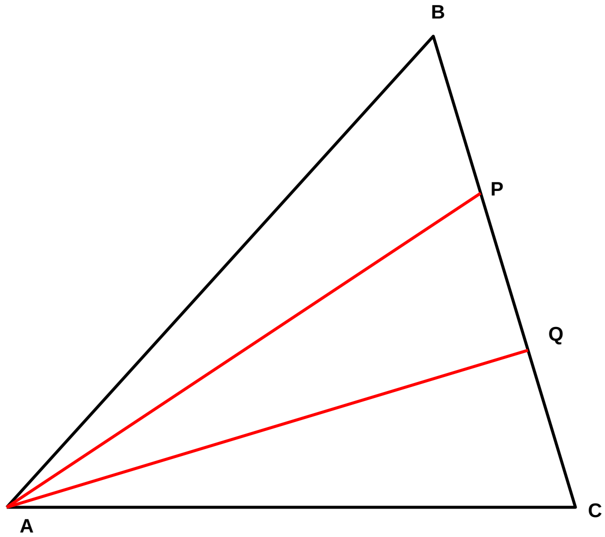
$$|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{CA}|^2 = \frac{3}{2}|\mathbf{CB}|^2 + 2\,|\mathbf{MA}|^2 \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont égales.

EXGSP037 – Liège, septembre 2000.

Soit ABC un triangle. Les points P et Q partagent le côté BC en trois parties égales.

a) Exprimer | **AB** | ² + | **AQ** | ² en fonction de | **AP** | ² + | **PQ** | ²
b) Démontrer que | **AB** | ² - | **AC** | ² = 3 (| **AP** | ² - | **AQ** | ²)



1) On a : $\mathbf{AB}+\mathbf{AQ}=2\,\mathbf{AP} \;\rightarrow\; \mathbf{AB}^2+2\,\mathbf{AB}\,\mathbf{AQ}+\mathbf{AQ}^2=4\,\mathbf{AP}^2$

or $\mathbf{AB}=\mathbf{AP}+\mathbf{PB}=\mathbf{AP}-\mathbf{PB}=\mathbf{AP}-\mathbf{PQ}$

et $\mathbf{AQ}=\mathbf{AP}+\mathbf{PQ}$

Donc $\mathbf{AB}^2+2\left(\mathbf{AP}-\mathbf{PQ}\right)\left(\mathbf{AP}+\mathbf{PQ}\right)+\mathbf{AQ}^2=4\,\mathbf{AP}^2$

$\rightarrow \quad \mathbf{AB}^2+2\,\mathbf{AP}^2-2\,\mathbf{PQ}^2+\mathbf{AQ}^2=4\,\mathbf{AP}^2$

$\rightarrow \quad \mathbf{AB}^2+\mathbf{AQ}^2=2\left(\mathbf{AP}^2+\mathbf{AQ}^2\right)$

Et finalement : $\boxed{\left|\mathbf{AB}\right|^2+\left|\mathbf{AQ}\right|^2=2\left(\left|\mathbf{AP}\right|^2+\left|\mathbf{AQ}\right|^2\right)}$

2) Développons le premier membre :

$$\left|\mathbf{AB}\right|^2-\left|\mathbf{AC}\right|^2=\mathbf{AB}^2-\mathbf{AC}^2=\left(\mathbf{AB}-\mathbf{AC}\right)\left(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\right)$$
$$=-\mathbf{BC}\left(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\right)=-3\,\mathbf{PQ}\left(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\right)$$

Développons le deuxième membre :

$$3\left(\left|\mathbf{AP}\right|^2-\left|\mathbf{AQ}\right|^2\right)=3\left(\mathbf{AP}^2-\mathbf{AQ}^2\right)=3\left(\mathbf{AP}-\mathbf{AQ}\right)\left(\mathbf{AP}+\mathbf{AQ}\right)$$
$$=-3\,\mathbf{PQ}\left(\mathbf{AP}+\mathbf{AQ}\right)=-3\,\mathbf{PQ}\left(\mathbf{AB}+\mathbf{BP}+\mathbf{AC}+\mathbf{CQ}\right)$$
$$=-3\,\mathbf{PQ}\left(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\right)$$

Ce qui vérifie l'égalité.

EXGSP038 – Liège, juillet 1999.

Si les quatre points A, B, C et H vérifient

$$\mathbf{AH}\ \mathbf{BC} + \mathbf{BH}\ \mathbf{CA} + \mathbf{CH}\ \mathbf{AB} = 0$$

Et si X est tel que :

$$2\,\mathbf{XH} = \mathbf{AH} + \mathbf{BH} + \mathbf{CH}$$

Démontrer que :

$$|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{CX}|^2$$

$$2\,\mathbf{AX} = 2\,\mathbf{AB} + 2\,\mathbf{BH} + 2\,\mathbf{HX} = 2\,\mathbf{AB} + 2\,\mathbf{BH} - \mathbf{AH} - \mathbf{BH} - \mathbf{CH}$$
$$= 2\,\mathbf{AB} + \mathbf{BH} - \mathbf{AH} - \mathbf{CH} = 2\,\mathbf{AB} - \mathbf{AB} - \mathbf{CH} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH}$$

De même pour **BX** et **CX**. On aura donc :

$$\begin{cases} 2\,\mathbf{AX} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH} & \rightarrow \quad 4\,|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CH}|^2 \quad car \;\; \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{CH} = 0 \\ 2\,\mathbf{BX} = \mathbf{BC} - \mathbf{AH} & \rightarrow \quad 4\,|\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{AH}|^2 \quad car \;\; \mathbf{BC}\,.\,\mathbf{AH} = 0 \\ 2\,\mathbf{CX} = \mathbf{CA} - \mathbf{BH} & \rightarrow \quad 4\,|\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{CA}|^2 + |\mathbf{BH}|^2 \quad car \;\; \mathbf{CA}\,.\,\mathbf{BH} = 0 \end{cases}$$

Or $\quad 2\,\mathbf{AX} = \mathbf{AB} - \mathbf{CH}$ donne aussi:

$$2\left(\mathbf{AB} + \mathbf{BX}\right) = \mathbf{AB} - \mathbf{CH}$$

$$2\,\mathbf{BX} = -\mathbf{AB} - \mathbf{CH} \;\rightarrow\; 4\,|\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CH}|^2$$

Et donc $|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2$

De même :

$2\,\mathbf{BX} = \mathbf{BC} - \mathbf{AH}$ donne aussi:

$$2\left(\mathbf{BC} + \mathbf{CX}\right) = \mathbf{BC} - \mathbf{AH}$$

$$2\,\mathbf{CX} = -\mathbf{BC} - \mathbf{AH} \;\rightarrow\; 4\,|\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{AH}|^2$$

Et donc : $|\mathbf{CX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2$

Finalement : $\boxed{|\mathbf{AX}|^2 = |\mathbf{BX}|^2 = |\mathbf{CX}|^2}$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP039 – Liège, septembre 1999.

Démontrer que si

$$\mathbf{AB}\,.\,\mathbf{CD} = \mathbf{AC}\,.\,\mathbf{BD} = \mathbf{0}$$

Alors

1) $\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{BC} = \mathbf{0}$
2) $|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CD}|^2 = |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{BD}|^2$

1) $\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{BC} = (\mathbf{AB}+\mathbf{BD})(\mathbf{BD}+\mathbf{DC})$

$$= \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{BD} + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{DC} + \mathbf{BD}\,.\,\mathbf{DC}$$
$$= \mathbf{AB}(\mathbf{BC}+\mathbf{CD}) + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{BD}(\mathbf{DA}+\mathbf{AC})$$
$$= \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{BC} + \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{CD} + \mathbf{BD}^2 + \mathbf{BD}\,.\,\mathbf{DA} + \mathbf{BD}\,.\,\mathbf{AC}$$
$$= \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{BC} + \mathbf{BD}(\mathbf{BD}+\mathbf{DA})$$
$$= \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{BC} + \mathbf{BD}\,.\,\mathbf{BA} = \mathbf{AB}(\mathbf{BC}-\mathbf{BD}) = \mathbf{AB}\,.\,\mathbf{CD} = 0$$

2) $(\mathbf{AB}+\mathbf{CD})^2 = (\mathbf{AD}+\mathbf{DB}+\mathbf{CA}+\mathbf{AD})^2$

$$\mathbf{AB}^2 + 2\,\mathbf{AB}\,.\,\mathbf{CD} + \mathbf{CD}^2$$
$$= 4\,\mathbf{AD}^2 + \mathbf{DB}^2 + \mathbf{CA}^2 + 4\,\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{DB} + 4\,\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{CA} + 2\,\mathbf{DB}\,.\,\mathbf{CA}$$

Or $4\,\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{DB} + 4\,\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{CA} = 4\,\mathbf{AD}(\mathbf{DB}+\mathbf{CA}) = 4\,\mathbf{AD}(\mathbf{DC}+\mathbf{CB}+\mathbf{CA})$

$$= 4\,\mathbf{AD}\,.\,\mathbf{CB} + 4\,\mathbf{AD}(\mathbf{DC}+\mathbf{CA}) = -4\,\mathbf{AD}^2$$

$\rightarrow \quad \mathbf{AB}^2 + \mathbf{CD}^2 = \mathbf{DB}^2 + \mathbf{CA}^2$

Finalement : $\boxed{|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{CD}|^2 = |\mathbf{DB}|^2 + |\mathbf{CA}|^2}$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.