Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 4

EXGSP040 – EXGSP049

http://www.matheux.be.tf

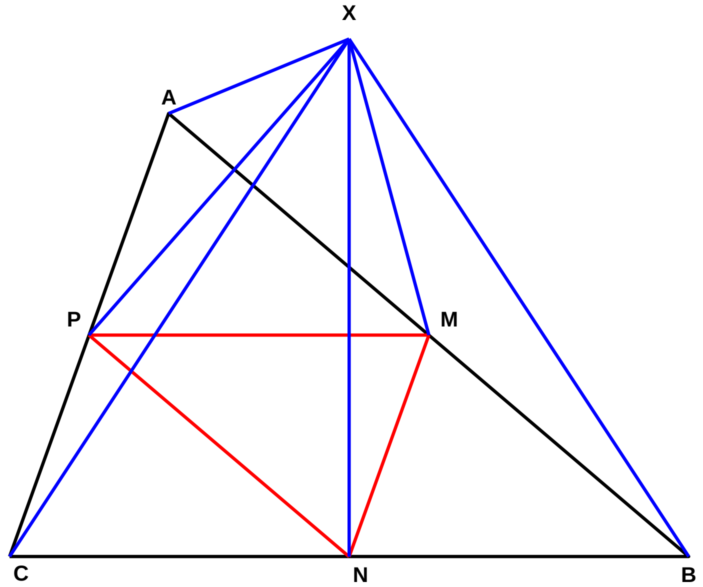
Jacques Collot

1 avril 03

EXGSP040 – Liège, juillet 1998.

Soient ABC un triangle et M, N, et P les milieux de | AB |, | BC |, et | CA |.
Démontrer que, quel que soit X :

$$\left(|\mathbf{XA}|^2+|\mathbf{XB}|^2+|\mathbf{XC}|^2\right)-\left(|\mathbf{XM}|^2+|\mathbf{XN}|^2+|\mathbf{XP}|^2\right)=|\mathbf{MN}|^2+|\mathbf{NP}|^2+|\mathbf{PM}|^2$$



On notera que

$$\begin{cases}\mathbf{PN}=\mathbf{CN}=\mathbf{NB}\\ \mathbf{MN}=\mathbf{AP}=\mathbf{PC}\\ \mathbf{PN}=\mathbf{AM}=\mathbf{MC}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases}\mathbf{XA}=\mathbf{XP}+\mathbf{PA} & \rightarrow\ \mathbf{XA}^2=\mathbf{XP}^2+2\,\mathbf{XP}.\mathbf{PA}+\mathbf{NM}^2\\ \mathbf{XB}=\mathbf{XM}+\mathbf{MB} & \rightarrow\ \mathbf{XB}^2=\mathbf{XM}^2+2\,\mathbf{XM}.\mathbf{MB}+\mathbf{PN}^2\\ \mathbf{XC}=\mathbf{XN}+\mathbf{NC} & \rightarrow\ \mathbf{XC}^2=\mathbf{XN}^2+2\,\mathbf{XN}.\mathbf{NC}+\mathbf{MP}^2\end{cases}$$

L'expression à démontrer se résume donc à vérifier que :

$$\mathbf{XP}.\mathbf{PA}+\mathbf{XM}.\mathbf{MP}+\mathbf{XN}.\mathbf{NC}=0$$

Or le premier membre peut s'écrire :

$$\left(\mathbf{XN}+\mathbf{NP}\right)\mathbf{NM}+\left(\mathbf{XN}+\mathbf{NM}\right).\mathbf{MP}+\mathbf{XN}.\mathbf{NC}$$

$$=\mathbf{XN}.\mathbf{NM}+\mathbf{NP}.\mathbf{NM}+\mathbf{XN}.\mathbf{PN}+\mathbf{NM}.\mathbf{PN}+\mathbf{XN}.\mathbf{MP}$$

$$=\mathbf{XN}\left(\mathbf{NM}+\mathbf{PN}+\mathbf{MP}\right)=\mathbf{XN}.\mathbf{0}=0 \quad \textit{CQFD}$$

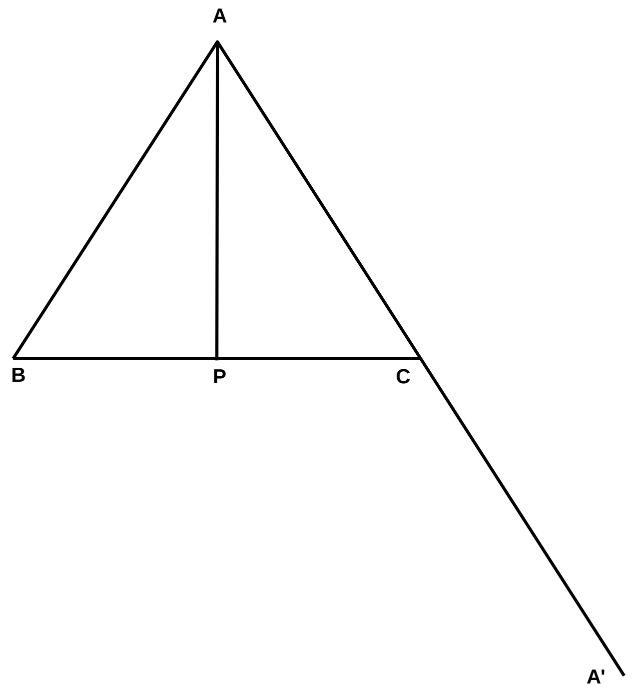
Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP041 – Liège, septembre 1998.

Soient ABC un triangle isocèle de base BC (| AB | = | AC |), et A' le point de AC tel que | A'C | = | AC | avec A' ≠A

Démontrer que si P est le milieu de BC

$$|\mathbf{A'P}|^2 = |\mathbf{AP}|^2 + 4\,|\mathbf{PC}|^2$$



$$\mathbf{A'P} = \mathbf{A'C} + \mathbf{CP}$$

$$\mathbf{A'P}^2 = \mathbf{A'C}^2 + 2\,\mathbf{A'C.CP} + \mathbf{CP}^2$$

$$= \mathbf{AC}^2 + 2\,\mathbf{CA.CP} + \mathbf{CP}^2$$

$$|\mathbf{A'P}|^2 = |\mathbf{AP}|^2 + |\mathbf{PC}|^2 + 2\,|\mathbf{PC}|^2 + |\mathbf{PC}|^2$$

Car $\mathbf{CA.CP} = |\mathbf{PC}|^2$ *et* $|\mathbf{AC}|^2 = |\mathbf{AP}|^2 + |\mathbf{PC}|^2$

Finalement: $\boxed{|\mathbf{A'P}|^2 = |\mathbf{AP}|^2 + 4\,|\mathbf{PC}|^2}$

EXGSP042 – Liège, septembre 1998.

Démontrer que si :

$$2\,\mathbf{AX} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD}$$

On a :

$$2\,\mathbf{BX} = \mathbf{BC} + \mathbf{AD} \qquad 2\,\mathbf{CX} = \mathbf{CD} + \mathbf{AB} \qquad 2\,\mathbf{DX} = \mathbf{DB} + \mathbf{AC}$$

et

$$|\,\mathbf{AX}\,|^2 + |\,\mathbf{BX}\,|^2 + |\,\mathbf{CX}\,|^2 + |\,\mathbf{DX}\,|^2 = |\,\mathbf{AB}\,|^2 + |\,\mathbf{AC}\,|^2 + |\,\mathbf{AD}\,|^2$$

On a

$$\begin{aligned} 2\,\mathbf{BX} &= 2\,\mathbf{BC} + 2\,\mathbf{CA} + 2\,\mathbf{AX} \\ &= 2\,\mathbf{BC} + 2\mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} \\ &= 2\,\mathbf{BC} + \mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{AD} \\ &= 2\,\mathbf{BC} + \mathbf{CB} + \mathbf{AD} \\ &= \mathbf{BC} + \mathbf{AD} \end{aligned}$$

De même pour les autres égalités.

Donc

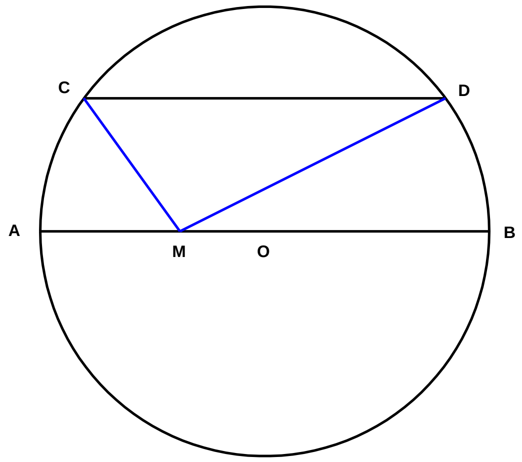
$$\begin{aligned} &\mathbf{AX}^2 + \mathbf{BX}^2 + \mathbf{CX}^2 + \mathbf{DX}^2 \\ &\quad = \mathbf{AX}^2 + (\mathbf{BA} + \mathbf{AX})^2 + (\mathbf{CA} + \mathbf{AX})^2 + (\mathbf{DA} + \mathbf{AX})^2 \\ &\quad = \mathbf{AX}^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AB})^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AC})^2 + (\mathbf{AX} - \mathbf{AD})^2 \\ &\quad = \mathbf{AX}^2 + \mathbf{AX}^2 - 2\,\mathbf{AX.AB} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AX}^2 - 2\,\mathbf{AX.AC} + \mathbf{AC}^2 \\ &\qquad\qquad + \mathbf{AX}^2 - 2\,\mathbf{AX.AD} + \mathbf{AD}^2 \\ &\quad = 4\,\mathbf{AX}^2 - 2\,\mathbf{AX}\,(\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD}) + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \\ &\quad = 4\,\mathbf{AX}^2 - 2\,\mathbf{AX.AX} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \\ &\quad = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 \end{aligned}$$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP043 – Liège, juillet 1997.

Soient un cercle de diamètre AB et CD une corde parallèle à AB.
Démontrer que quel que soit M appartenant à | AB |, on a

$$|\mathbf{MC}|^2 + |\mathbf{MD}|^2 = |\mathbf{MA}|^2 + |\mathbf{MB}|^2|$$



$$\begin{aligned}\mathbf{MC}^2 + \mathbf{MD}^2 &= (\mathbf{MA} + \mathbf{AC})^2 + (\mathbf{MB} + \mathbf{BD})^2 \\ &= \mathbf{MA}^2 + 2\,\mathbf{MA}.\mathbf{AC} + \mathbf{AC}^2 + \mathbf{MB}^2 + 2\,\mathbf{MB}.\mathbf{BD} + \mathbf{BD}^2 \\ &= \mathbf{MA}^2 + 2(\mathbf{MO} + \mathbf{OA}).(\mathbf{AO} + \mathbf{OC}) + (\mathbf{AO} + \mathbf{OC})^2 \\ &\quad + \mathbf{MB}^2 + 2(\mathbf{MO} + \mathbf{OB}).(\mathbf{BO} + \mathbf{OD}) + (\mathbf{BO} + \mathbf{OD})^2 \\ &= \mathbf{MA}^2 + 2\,\mathbf{MO}.\mathbf{AO} + 2\,\mathbf{MO}.\mathbf{OC} + 2\,\mathbf{OA}.\mathbf{AO} + 2\,\mathbf{OA}.\mathbf{OC} + \mathbf{AO}^2 + 2\,\mathbf{AO}.\mathbf{OC} + \mathbf{OC}^2 \\ &\quad + \mathbf{MB}^2 + 2\,\mathbf{MO}.\mathbf{BO} + 2\,\mathbf{MO}.\mathbf{OD} + 2\,\mathbf{OB}.\mathbf{BO} + 2\,\mathbf{OB}.\mathbf{OD} + \mathbf{BO}^2 + 2\,\mathbf{BO}.\mathbf{OD} + \mathbf{OD}^2\end{aligned}$$

En tenant compte que

$2\,\mathbf{MO}.\mathbf{AO} = -2\,\mathbf{MO}.\mathbf{BO}$

$2\,\mathbf{MO}.\mathbf{OC} = -2\,\mathbf{MO}.\mathbf{OD}$

$2\,\mathbf{OA}.\mathbf{OC} = -2\,\mathbf{OB}.\mathbf{OD}$

$2\,\mathbf{AO}.\mathbf{OC} = -2\,\mathbf{BO}.\mathbf{OD}$

$2\,\mathbf{OA}.\mathbf{AO} = -2\,\mathbf{AO}^2$

$2\,\mathbf{OB}.\mathbf{BO} = -2\,\mathbf{BO}^2$

$\mathbf{OC}^2 = \mathbf{AO}^2$

$\mathbf{OD}^2 = \mathbf{BO}^2$

L'expression se simplifie pour donner

$\mathbf{MC}^2 + \mathbf{MD}^2 = \mathbf{MA}^2 + \mathbf{MB}^2$

Donc

$$\boxed{|\mathbf{MC}|^2 + |\mathbf{MD}|^2 = |\mathbf{MA}|^2 + |\mathbf{MB}|^2}$$

Note : Ce théorème est aussi valide dans l'espace.

EXGSP044 – Théorème de la médiane.
FACS – ULB – Bruxelles, septembre 07

Soit un triangle ABC, et AM une médiane.
Démontrer

$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + 2\,|\mathbf{BM}|^2$$

Ou bien

$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{BC}|^2$$

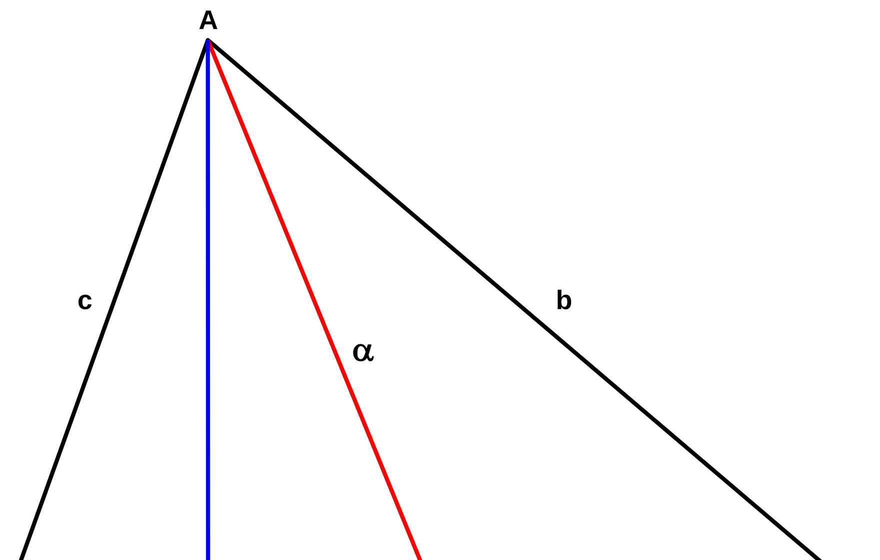
Si a, b et c désignent les longueurs des côtés et α, β, δ, les longueurs des médianes correspondantes, démontrer que

$$\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$$

Enoncé ULB (Sep 07)

On donne un triangle de sommets *A*, *B* et *C*. Soit *M* le milieu du segment [*A*, *B*]. Calculer la longueur de la médiane [*C*, *M*] en fonction, uniquement, des longueurs des côtés du triangle

---



Première égalité.

Soit AH la hauteur :

$$|\mathbf{AC}|^2 = |\mathbf{MC}|^2 + |\mathbf{AM}|^2 + 2\,|\mathbf{MC}|.|\mathbf{MH}|$$

$$|\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{BM}|^2 + |\mathbf{AM}|^2 - 2\,|\mathbf{MB}|.|\mathbf{MH}|$$

$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + 2\,|\mathbf{BM}|^2$$

Deuxième égalité.

$$\begin{aligned}\mathbf{AC}^2 + \mathbf{AB}^2 &= (\mathbf{AM} + \mathbf{MC})^2 + (\mathbf{AM} + \mathbf{MB})^2 \\ &= \mathbf{AM}^2 + 2\mathbf{AM}.\mathbf{MC} + \mathbf{MC}^2 + \mathbf{AM}^2 + 2\mathbf{AM}.\mathbf{MB} + \mathbf{MB}^2 \\ &= 2\,\mathbf{AM}^2 + 2\,\mathbf{MB}^2\end{aligned}$$

$$|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + 2\,|\mathbf{BM}|^2 = 2\,|\mathbf{AM}|^2 + \frac{1}{2}\,|\mathbf{BC}|^2$$

Appliquons l'égalité obtenue :

$$b^2 + c^2 = 2\,\alpha^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$b^2 + a^2 = 2\,\delta^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + c^2 = 2\,\beta^2 + \frac{b^2}{2}$$

Additionnons membre à membre :

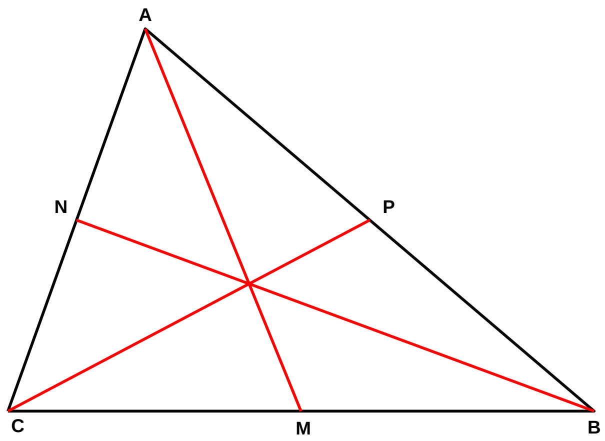
$$b^2 + c^2 + b^2 + a^2 + a^2 + c^2 = 2\,\alpha^2 + \frac{a^2}{2} + 2\,\delta^2 + \frac{c^2}{2} + 2\,\beta^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}$$

EXGSP045 – Liège, juillet 1997.

Soient ABC trois points et M, N, P les milieux de BC, CA et AB.
Démontrer

$$\left|\mathbf{AM}\right|^2+\left|\mathbf{BN}\right|^2+\left|\mathbf{CP}\right|^2=\frac{3}{4}\left(\left|\mathbf{AB}\right|^2+\left|\mathbf{BC}\right|^2+\left|\mathbf{CA}\right|^2\right)$$



Première méthode.

Il suffit d'appliquer directement le théorème de la médiane.

Voir EXGSP044.

Deuxième méthode.

La relation s'écrit :

$$4\left|\mathbf{AM}\right|^2+4\left|\mathbf{BN}\right|^2+4\left|\mathbf{CP}\right|^2=3\left|\mathbf{AB}\right|^2+3\ \left|\mathbf{BC}\right|^2+3\left|\mathbf{CA}\right|^2$$

On a pour le premier membre:

$$\begin{aligned}4\,\mathbf{AM}^2+4\,\mathbf{BN}^2+4\,\mathbf{CP}^2&=4\left(\mathbf{AB}+\mathbf{BM}\right)^2+4\left(\mathbf{BC}+\mathbf{CN}\right)^2+4\left(\mathbf{CA}+\mathbf{AP}\right)^2\\&=4\,\mathbf{AB}^2+8\,\mathbf{AB.BM}+4\,\mathbf{BM}^2\\&\quad+4\,\mathbf{BC}^2+8\,\mathbf{BC.CN}+4\,\mathbf{CN}^2\\&\quad+4\,\mathbf{CA}^2+8\,\mathbf{CA.AP}+4\,\mathbf{AP}^2\end{aligned}$$

En ramenant tout dans le premier membre, la relation devient :

$$\mathbf{AB}^2+8\,\mathbf{AB}.\frac{\mathbf{BC}}{2}+\mathbf{BC}^2+\mathbf{BC}^2+8\,\mathbf{BC}\frac{\mathbf{CA}}{2}+\mathbf{CA}^2+\mathbf{CA}^2+8\,\mathbf{CA}\frac{\mathbf{AB}}{2}+\mathbf{AB}^2$$

$$=2\,\mathbf{AB}^2+2\,\mathbf{BC}^2+2\,\mathbf{CA}^2+4\,\mathbf{AB.BC}+4\,\mathbf{BC.CA}+4\,\mathbf{CA.AB}$$

$$=2\,\mathbf{AB}^2+2\,\mathbf{BC}^2+2\,\mathbf{CA}^2+4\,\mathbf{AB}.\left(\mathbf{BA}+\mathbf{AC}\right)+4\,\mathbf{BC}.\left(\mathbf{CA}+\mathbf{BA}\right)+4\,\mathbf{CA}.\left(\mathbf{AC}+\mathbf{CB}\right)$$

$$=2\,\mathbf{AB}^2+2\,\mathbf{BC}^2+2\,\mathbf{CA}^2-4\,\mathbf{AB}^2+4\,\mathbf{AB.AC}-4\,\mathbf{BC}^2+4\,\mathbf{BC.BA}-4\,\mathbf{CA}^2+4\,\mathbf{CA.CB}$$

$$=-2\,\mathbf{AB}^2+4\,\mathbf{AB.AC}-2\,\mathbf{BC}^2+4\,\mathbf{BC.BA}-2\,\mathbf{CA}^2+4\,\mathbf{CA.CB}$$

$$=2\,\mathbf{AB.AC}+2\,\mathbf{AB}\left(\mathbf{AC}-\mathbf{AB}\right)+2\,\mathbf{BC.BA}+2\,\mathbf{BC}\left(\mathbf{BA}-\mathbf{BC}\right)+2\,\mathbf{CA.CB}+2\,\mathbf{CA}\left(\mathbf{CB}-\mathbf{CA}\right)$$

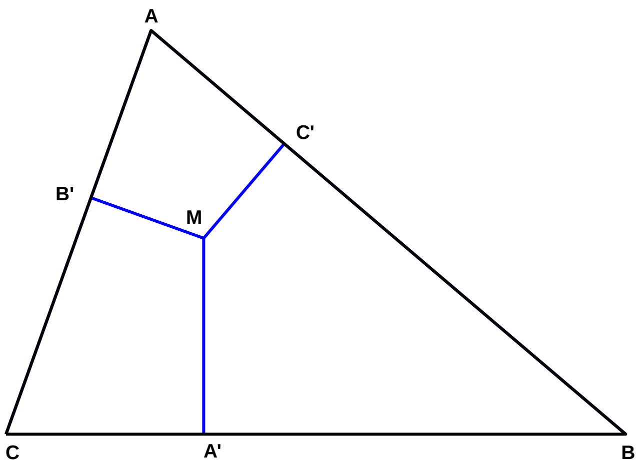
$$=2\,\underline{\mathbf{AB.AC}}+2\,\underline{\underline{\mathbf{AB.BC}}}+2\,\underline{\underline{\mathbf{BC.BA}}}+2\,\underline{\underline{\underline{\mathbf{BC.CA}}}}+2\,\underline{\underline{\underline{\mathbf{CA.CB}}}}+2\,\underline{\mathbf{CA.AB}}$$

$=0$ *CQFD*

EXGSP046 – Liège, septembre 1997.

Soit ABC un triangle. Les projections orthogonales d'un point M intérieur sur le côtés AB, BC et CA sont respectivement C', A' et B' .
Démontrer

$$|\mathbf{AC'}|^2 + |\mathbf{BA'}|^2 + |\mathbf{CB'}|^2 = |\mathbf{A'C}|^2 + |\mathbf{B'A}|^2 + |\mathbf{C'B}|^2$$



L'expression peut s'écrire :

$$(\mathbf{AM}+\mathbf{MC'})^2 + (\mathbf{BM}+\mathbf{MA'})^2 + (\mathbf{CM}+\mathbf{MB'})^2$$
$$= (\mathbf{A'M}+\mathbf{MC})^2 + (\mathbf{B'M}+\mathbf{MA})^2 + (\mathbf{C'M}+\mathbf{MB})^2$$

donc

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{AM}^2 + 2\,\mathbf{AM}.\mathbf{MC'} + \mathbf{MC'}^2 & & \mathbf{A'M}^2 + 2\,\mathbf{A'M}.\mathbf{MC} + \mathbf{MC}^2 \\ +\mathbf{BM}^2 + 2\,\mathbf{BM}.\mathbf{MA'} + \mathbf{MA'}^2 & = & +\mathbf{B'M}^2 + 2\,\mathbf{B'M}.\mathbf{MA} + \mathbf{MA}^2 \\ +\mathbf{CM}^2 + 2\,\mathbf{CM}.\mathbf{MB'} + \mathbf{MB'}^2 & & +\mathbf{C'M}^2 + 2\,\mathbf{C'M}.\mathbf{MB} + \mathbf{MB}^2 \end{array}$$

Après élimination des termes semblables :

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{AC'} + \mathbf{C'M}).\mathbf{MC'} & & (\mathbf{MA'} + \mathbf{A'C}).\mathbf{A'M} \\ +(\mathbf{BA'} + \mathbf{A'M}).\mathbf{MA'} & = & +(\mathbf{MB'} + \mathbf{B'A}).\mathbf{BM'} \\ +(\mathbf{CB'} + \mathbf{B'M}).\mathbf{MB'} & & +(\mathbf{MC'} + \mathbf{C'B}).\mathbf{C'M} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{MC'}^2 + \mathbf{MA'}^2 + \mathbf{MB'}^2 = \mathbf{MA'}^2 + \mathbf{MB'}^2 + \mathbf{MC'}^2 \qquad \textit{CQFD}$$

EXGSP047 – Liège, juillet 1996.

Soient ABCDX cinq points distincts.
Sachant que $\mathbf{AB}.\mathbf{CD} = \mathbf{BC}.\mathbf{DA} = 0$, , démontrer que $\mathbf{AC}.\mathbf{BD} = 0$
Sachant en outre que

$$\mathbf{AX}.\mathbf{AB} = \mathbf{AX}.\mathbf{AC} = \mathbf{AX}.\mathbf{AD} = \mathbf{AB}.\mathbf{AC}$$

Démontrer

$$\mathbf{BX}.\mathbf{BC} = \mathbf{BX}.\mathbf{BD} = \mathbf{BX}.\mathbf{BA} = \mathbf{BC}.\mathbf{BD}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB}.\mathbf{CD} &= \left(\mathbf{AC} + \mathbf{CB}\right)\mathbf{CD} = \mathbf{AC}.\mathbf{CD} + \mathbf{CB}.\mathbf{CD} \\
&= \mathbf{AC}\left(\mathbf{CB} + \mathbf{BD}\right) + \mathbf{CB}\left(\mathbf{CA} + \mathbf{AD}\right) \\
&= \mathbf{AC}.\mathbf{CB} + \mathbf{AC}.\mathbf{BD} + \mathbf{CB}.\mathbf{CA} + \mathbf{CB}.\mathbf{AD} \\
&= \mathbf{AC}.\mathbf{BD} = 0
\end{aligned}$$

Vérifions par exemple : $\mathbf{BX}.\mathbf{BC} = \mathbf{BX}.\mathbf{BD}$

$$\left(\mathbf{BA} + \mathbf{AX}\right)\left(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}\right) = \left(\mathbf{BA} + \mathbf{AX}\right)\left(\mathbf{BA} + \mathbf{AD}\right)$$

$$\mathbf{BA}^2 + \mathbf{BA}.\mathbf{AC} + \mathbf{AX}.\mathbf{BA} + \mathbf{AX}.\mathbf{AC} = \mathbf{BA}^2 + \mathbf{BA}.\mathbf{AD} + \mathbf{AX}.\mathbf{AD} + \mathbf{AX}.\mathbf{BA}$$

$$\mathbf{BA}.\mathbf{AC} = \mathbf{BA}.\mathbf{AD}$$

$$\mathbf{AB}.\mathbf{AC} = \mathbf{AB}\left(\mathbf{AC} + \mathbf{CD}\right)$$

$$\mathbf{AB}.\mathbf{AC} = \mathbf{AB}.\mathbf{AC} + \mathbf{AB}.\mathbf{CD}$$

$$\mathbf{AB}.\mathbf{AC} = \mathbf{AB}.\mathbf{AC} \qquad \mathit{CQFD}$$

*M*ême chose pour $\mathbf{BX}.\mathbf{BA}$

Pour $\mathbf{BX}.\mathbf{BC} = \mathbf{BC}.\mathbf{BD}$ on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathbf{BX}.\mathbf{BC} &= \left(\mathbf{BD} + \mathbf{DX}\right)\mathbf{BC} = \mathbf{BD}.\mathbf{BC} + \mathbf{DX}.\mathbf{BC} = \mathbf{BD}.\mathbf{BC} + \left(\mathbf{DA} + \mathbf{AX}\right)\mathbf{BC} \\
&= \mathbf{BD}.\mathbf{BC} + \mathbf{DA}.\mathbf{BC} + \mathbf{AX}.\mathbf{BC} = \mathbf{BD}.\mathbf{BC} + \mathbf{AX}\left(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}\right) \\
&= \mathbf{BD}.\mathbf{BC} + \mathbf{AX}.\mathbf{BA} + \mathbf{AX}.\mathbf{AC} = \mathbf{BD}.\mathbf{BC}
\end{aligned}$$

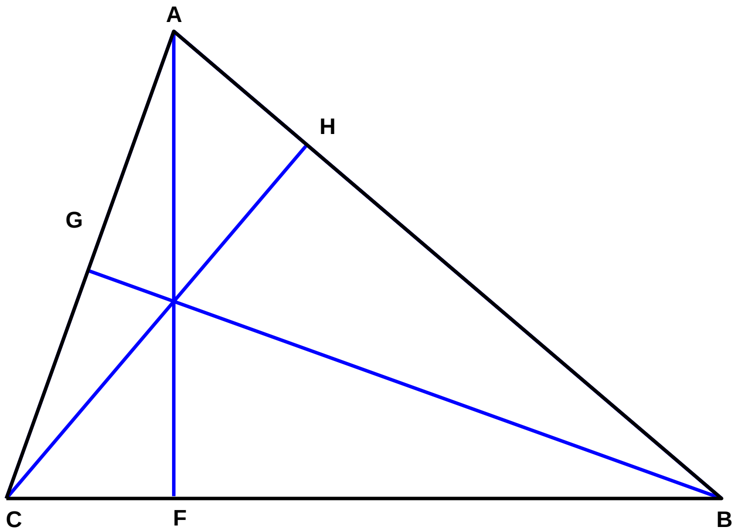
EXGSP048 – Liège, septembre 1996.

Soit un triangle ABC et soient F, G et H les pieds des hauteurs issues de A, B et C.

Démontrer

$$\left|\mathbf{BC}\right|^{2} = \mathbf{BA}.\mathbf{BH} + \mathbf{CA}.\mathbf{CG}$$

$$\left|\mathbf{BC}\right|^{2} + \left|\mathbf{CA}\right|^{2} - \left|\mathbf{AB}\right|^{2} = \mathbf{CA}.\mathbf{CG} + \mathbf{CB}.\mathbf{CF}$$



$$\begin{aligned}
\textit{1)}\ \mathbf{BC}^{2} &= \mathbf{BC}\left(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}\right) = \mathbf{BA}.\mathbf{BC} + \mathbf{CA}.\mathbf{CB} \\
&= \mathbf{BA}\left(\mathbf{BC} + \mathbf{CH}\right) + \mathbf{CA}\left(\mathbf{CB} + \mathbf{BG}\right) \\
&= \mathbf{BA}.\mathbf{BH} + \mathbf{CA}.\mathbf{CG}
\end{aligned}$$

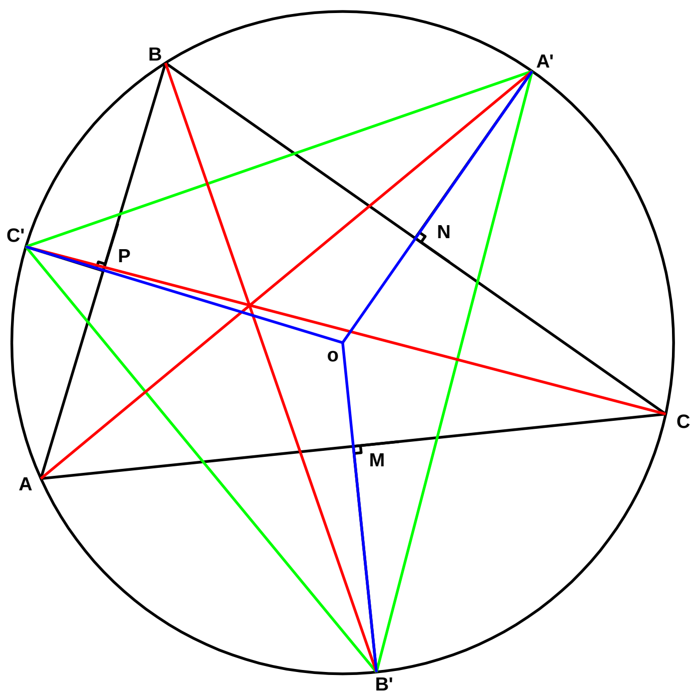
$$\rightarrow\ \left|\mathbf{BC}\right|^{2} = \mathbf{BA}.\mathbf{BH} + \mathbf{CA}.\mathbf{CG}$$

$$\begin{aligned}
2)\ \mathbf{CA}.\mathbf{CG} + \mathbf{CB}.\mathbf{CF} &= \mathbf{CA}\left(\mathbf{CB} + \mathbf{BG}\right) + \mathbf{CB}\left(\mathbf{CA} + \mathbf{AF}\right) \\
&= \mathbf{CA}.\mathbf{CB} + \mathbf{CB}.\mathbf{CA} \\
&= \mathbf{CA}\left(\mathbf{CA} + \mathbf{AB}\right) + \mathbf{CB}\left(\mathbf{CB} + \mathbf{BA}\right) \\
&= \mathbf{CA}^{2} + \mathbf{CA}.\mathbf{AB} + \mathbf{CB}^{2} + \mathbf{CB}.\mathbf{BA} \\
&= \mathbf{CA}^{2} + \mathbf{CB}^{2} + \mathbf{AB}.\left(\mathbf{CA} - \mathbf{CB}\right) \\
&= \mathbf{CA}^{2} + \mathbf{CB}^{2} - \mathbf{AB}^{2}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow\ \left|\mathbf{CA}\right|^{2} + \left|\mathbf{CB}\right|^{2} - \left|\mathbf{AB}\right|^{2} = \mathbf{CA}.\mathbf{CG} + \mathbf{CB}.\mathbf{CF}$$

EXGSP049 – Liège, juillet 2001.

Soit ABC un triangle et son cercle circonscrit (c'est-à-dire le cercle passant par A, B et C).
On note A' le point d'intersection du cercle avec la médiatrice du segment [B, C] qui est tel que A et A' soient situés de part et d'autre de la droite BC.
Les points B' et C' sont définis de façon analogue : B' sur le cercle et la médiatrice du segment [A, C], C' sur le cercle et la médiatrice du segment [A, B], B et B' de part et d'autre de AC, C et C' de part et d'autre de AB.
Prouver que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.



A' est sur la médiatrice de BC, donc L'arc BA' est égal à l'arc $A'C$.

Par conséquent, on à l'égalité suivantes entre les angles :

$A'C'C = A'AC = BB'A' = BAA'$.

Donc, AA' est la bissectrice de l'angle BAC.

Même raisonnement pour BB' et CC'.

Or les bissectrices d'un triangle de coupent en un même point.

AA', BB' *et* CC' sont concourantes.