Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 6

EXGSP060 – EXGSP069

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 04

EXGSP060 – Bruxelles, septembre 2002.

Quel est le petit nombre d'angles obtus que peut avoir un polygone convexe de n côtés avec n > 5.

Soient : x le nombre d'angles obtus et y le nombre d'angles aigus.

On peut supposer que tous les angles obtus sont égaux entre eux, soit α;

et les angles aigus également égaux, soit β.

Somme des angles d'un polygone : $S = 180(n-2) = x\alpha + y\beta$

Avec la condition : $90 < \alpha < 180 \rightarrow 90 < \dfrac{180(n-2) - y\beta}{x} < 180$

Puique x doit être le plus petit possible, il suffit d'étudier la condition :

$\dfrac{180(n-2) - y\beta}{x} < 180 \rightarrow 180(n-2) - y\beta < 180x$

Or $x + y = n \rightarrow 180(n-2) - (n-x)\beta < 180x \rightarrow x > n - \dfrac{360}{180 - \beta}$

Pour que n soit le plus petit possible, il faut que $\dfrac{360}{180\text{-}\beta}$ soit grand

$\rightarrow 180 - \beta$ soit petit $\rightarrow \beta$ soit grand.

Or β est au maximum égal à 90°.

Par conséquent, n est le nombre immédiatement supérieur à $n - 4$

$\rightarrow \boxed{x = n - 3}$

Exemples :

Nombre de côtés	Nombre d'angles obtus
6	3
7	4
8	5

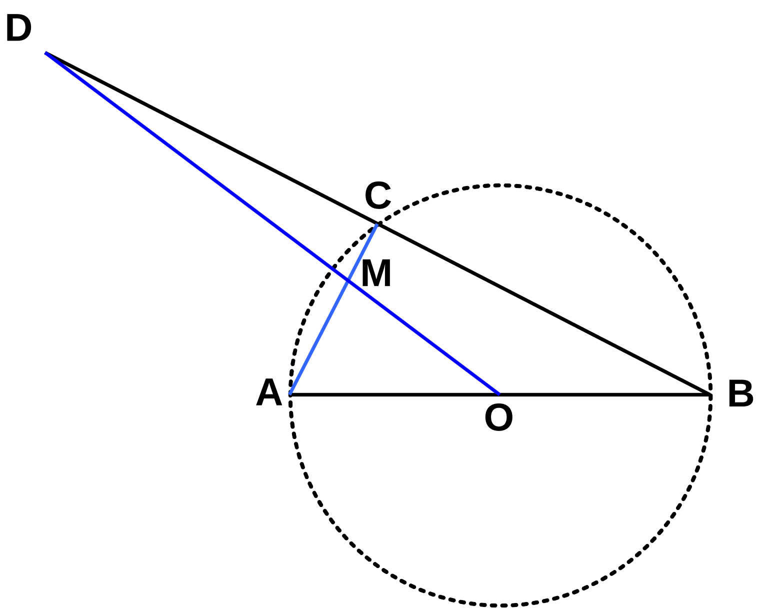
EXGSP061 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2000, série1.

On considère un diamètre fixe AB d'un cercle de entre O et un point C mobile sur la circonférence de ce cercle. On construit D sur BC tel que $DC = BC$.

On vous demande :

- de trouver le lieu du point D ;
- de trouver le lieu du point M situé à l'intersection des droites AC et OD ;

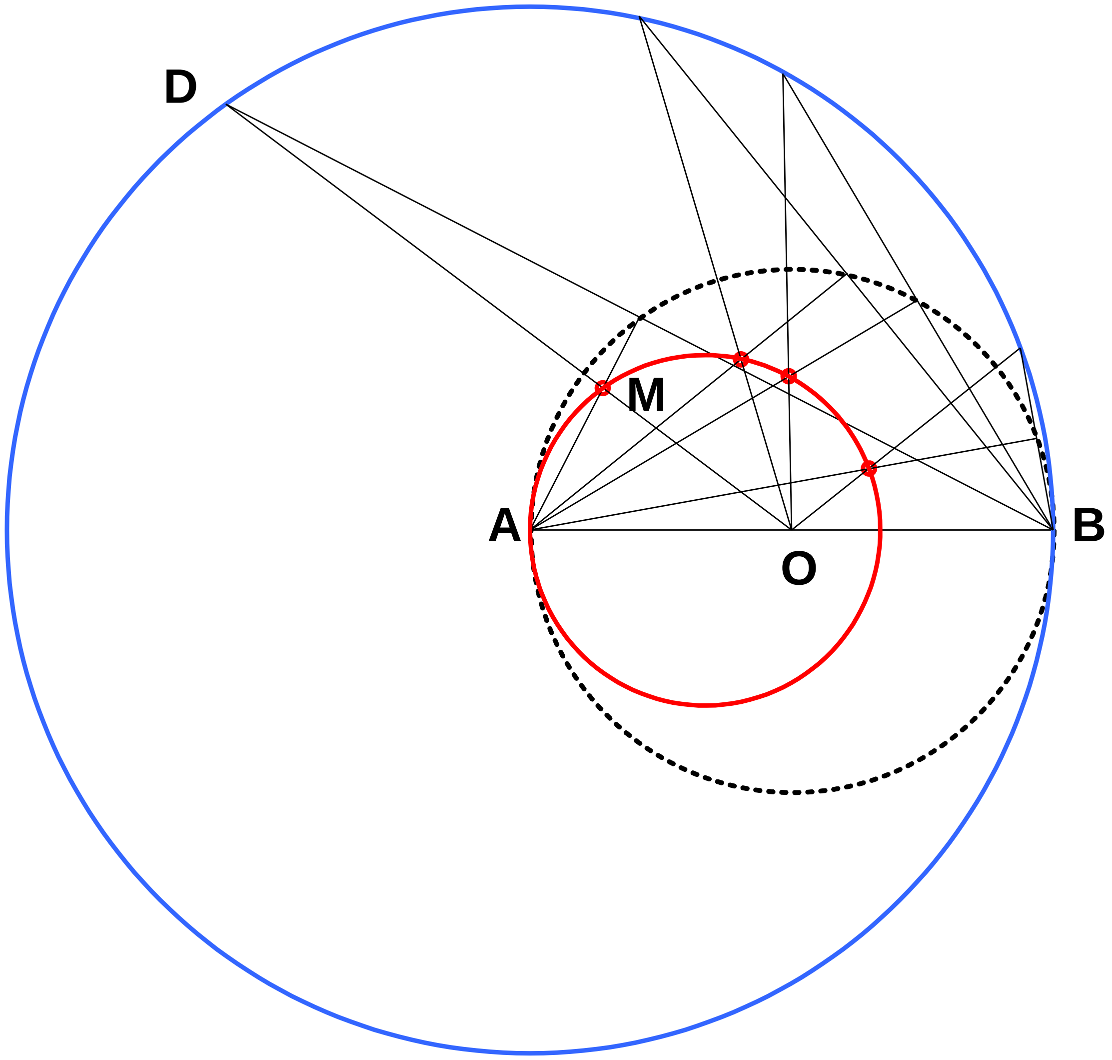
de justifier votre réponse et de représenter les lieux sur un dessin clair et précis.



$DC = BC$ Par conséquent, D est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport 2.
C se déplace sur une circonférence, or l'homothétie d'une circonférence est une circonférence.
$\Rightarrow$ Le lieu de D est un cercle de centre A et de rayon AB.

AC et DO sont médianes du triangle ADB $\Rightarrow$ M est le centre de gravité du triangle ADB.
M est donc l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 2/3.

$\Rightarrow$ Le lieu de M est un cercle dont le centre O' est situé sur AB, et dont le rayon $AO' = \dfrac{AB}{3}$



Modifié le 9 février 2014 (Jean Perbal)

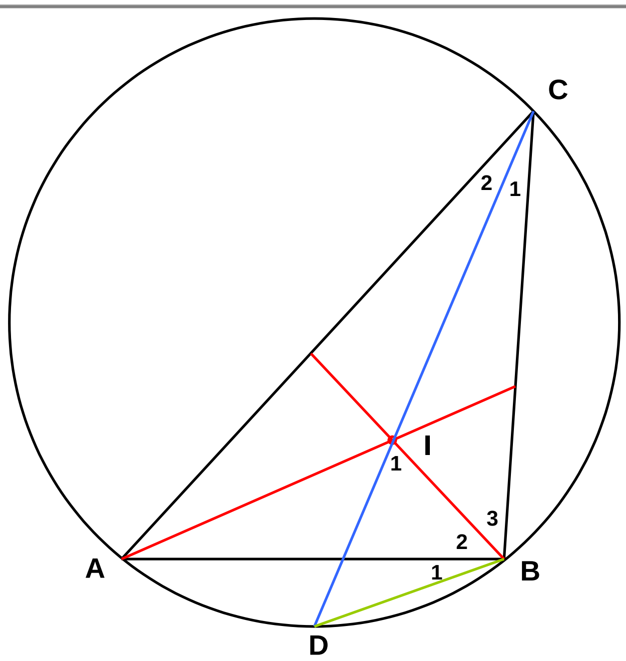
EXGSP062 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2001, série 1 ; EPL, UCL, Louvain, septembre 2009 ; EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, série 1.

Soit un triangle *ABC*, on vous demande :

1) De déterminer le lieu du point d'intersection des bissectrices intérieures aux angles *A* et *B* si le côté *AB* est fixe et l'angle *C* constant;
2) D'expliquer votre raisonnement ;
3) De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.

Enoncé 2010

On considère un triangle *ABC* dont le côté *AB* et l'angle *C* sont fixés. Trouvez le lieu du centre du cercle inscrit à *ABC*. Expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Si l'angle C est constant, alors le sommet C se déplace sur un arc de cercle "au-dessus" et "au-dessous" de AB. Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle et AB est une corde

Traitons le cas où C est "au-dessus" de AB. NON Il existera une solution symétrique dans le cas où C est "en-dessous".

Soit I le point d'intersection des bissectrices.

On a:

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \rightarrow$ car CD est bissectrice $\rightarrow arc\ AD = arc\ DB \rightarrow$ Le point D est fixe.

$\widehat{B_2} = \widehat{B_3}$ BI est bissectrice

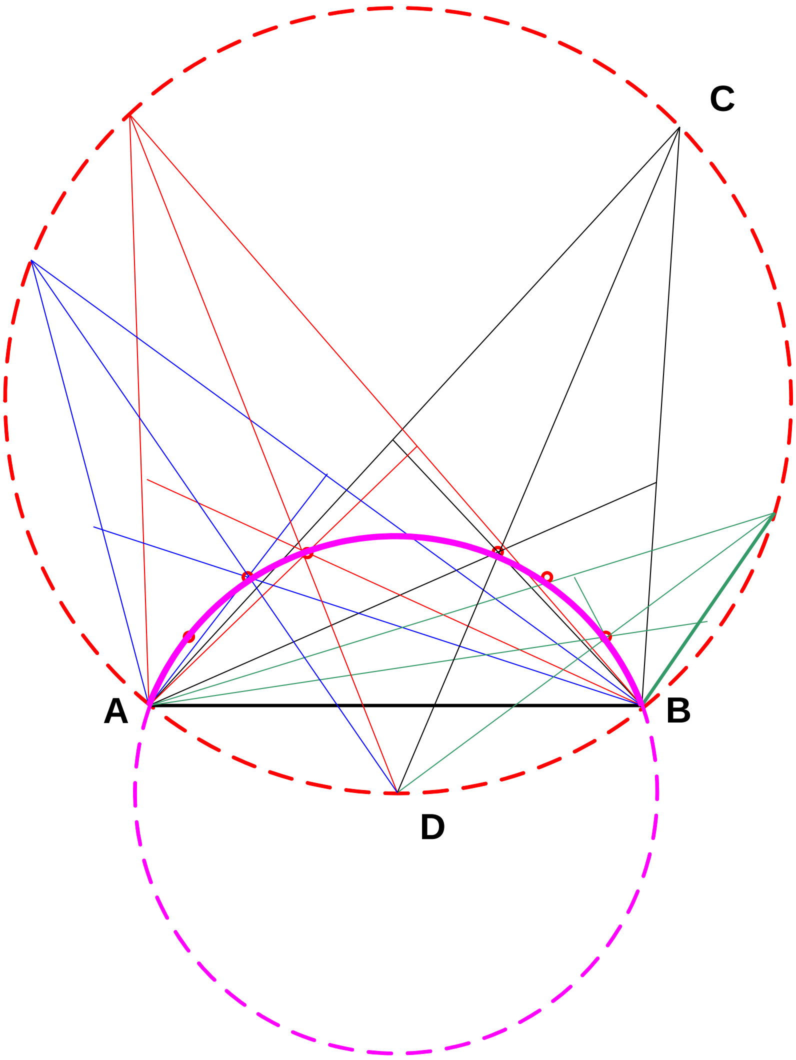
$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ CI est bissectrice

$\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ interceptent le même arc.

Or $\widehat{C_1} + \widehat{B_3} = \widehat{I_1} \rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{I_1}$

Donc le triangle DIB est isocèle et $DI = DB =$ constante

Le lieu est donc un arc de cercle AB de centre D et de rayon DB.



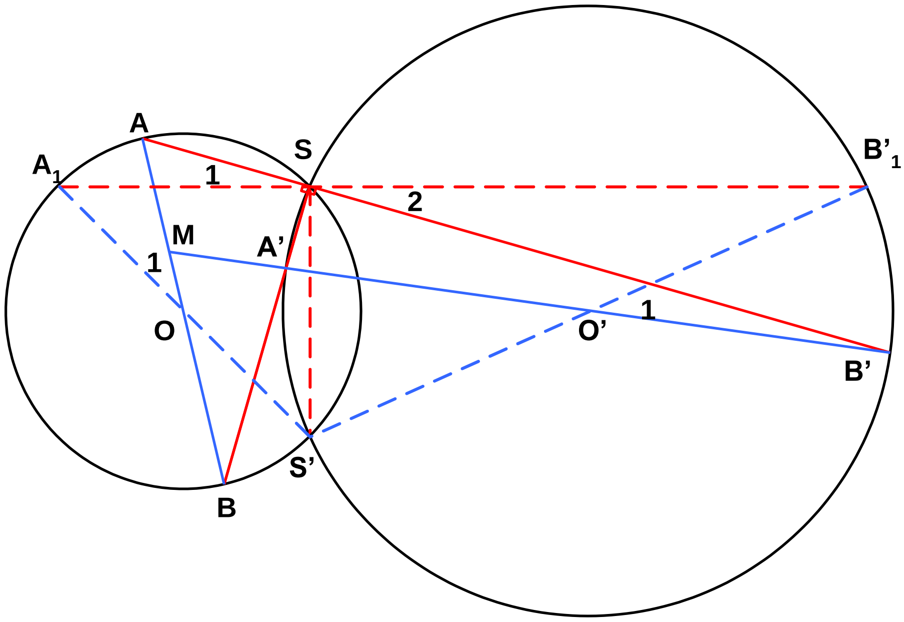
Note :
Pour le cas des médianes voir : EXGSP006
Pour le cas des hauteurs voir : EXGSP064

Résolu le 23 septembre 2003. Modifié le 21 août 2004

EXGSP063 – Louvain, juillet 2001, série 2.

On donne deux circonférences sécantes. Par l'un des points d'intersection *S*, on trace deux perpendiculaires quelconques qui rencontrent la première circonférence aux points *A* et *B*, et la seconde aux points *A'* et *B'*.
On vous demande :

- De déterminer le lieu du point *M* qui se situe à l'intersection de *AB* et *A'B'*
- D'expliquer votre raisonnement
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.



Il est évident que AB et $A'B'$ sont diamêtre de leur cercle respectif.
Considérons les perpendiculaires dans la position horizontale-verticale $\left(A_1B'_1 \text{ et } SS'\right)$. Dans ce cas le point M, dont nous cherchons le lieu se trouve en S'.

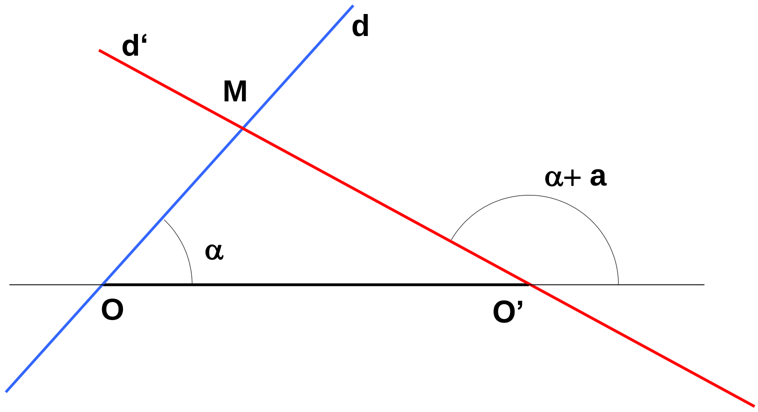
Faisons pivoter autour de S, les perpendiculaires d'un angle $\widehat{S_1}$.

On remarque que A_1 se déplace en A. Or $\widehat{O_1}$ étant un angle au centre, la droite OA_1 a donc pivoter autour de O d'un angle $2\widehat{S_1}$.

De même, on montre $\widehat{O'_1} = 2\widehat{S_2}$; or $\widehat{S_1} = \widehat{S_1}$ car angles opposés par le sommet.
Par conséquent, <u>les droites AB et $A'B'$ pivotent d'un même angle.</u>

On peut donc modifier l'énoncé comme suit :

Chercher le lieu du point d'ntersection de deux droites, l'une pivotant autour d'un point O et l'autre pivotant <u>d'un même</u> angle autour d'un point O'.



Première méthode

Soit $c,$ la distance entre les deux pivots.

$$\begin{cases} d \equiv y = \tan\alpha \,.\, x \\ d' \equiv \tan(a+\alpha).(x-c) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \tan\alpha \,.\, x \\ y = \dfrac{\tan a + \tan\alpha}{1-\tan a \tan\alpha}(x-c) \end{cases}$$

On élimine $\tan\alpha,$ on réarrange et on obtient :

$\tan a \; x^2 + \tan a \; y^2 - c.\tan a.x - cy = 0$

C'est l'équation d'un cercle qui passe par O et O'.

Deuxième méthode

Plutôt que d'utiliser la grosse artillerie de la géométrie analytique,

il suffit de remarquer que : $\widehat{OO'M} = \pi - \alpha - a$

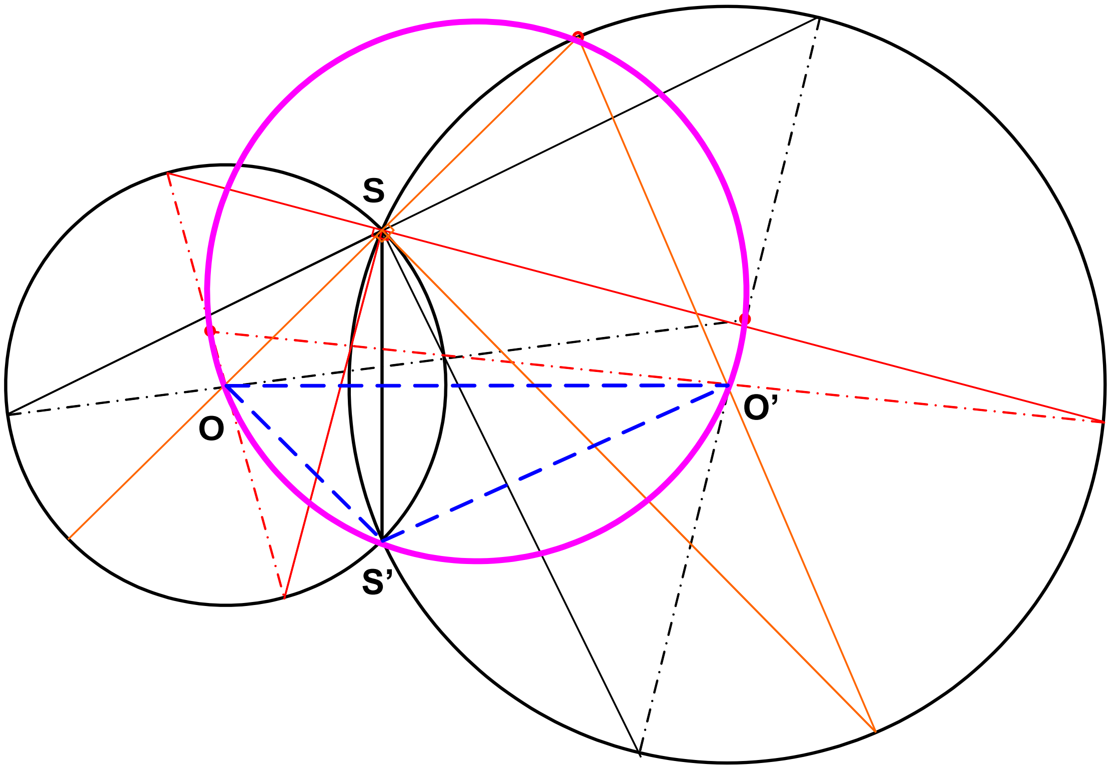
$\rightarrow \;\widehat{OMO'} = \pi - \alpha - \pi + \alpha + a = a$

Par conséquent, M se déplace en regardant le segment OO'

selon un angle constant $\rightarrow$ M se déplace sur un cercle.

Or nous savons aussi que S' appartient au lieu de M,

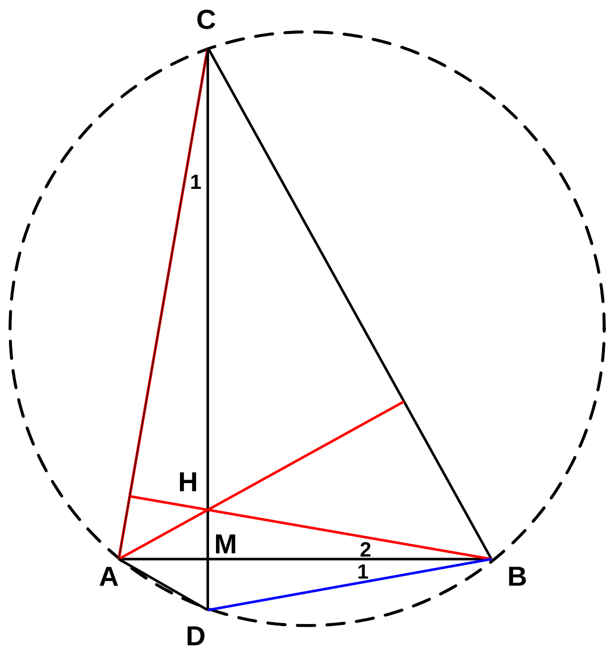
$\rightarrow$ Le lieu est le cercle circonscrit au triangle $OS'O'$


S
O
O'
S'

EXGSP064 – Louvain, juillet 2001, série 1.

Soit un triangle ABC dans lequel AB est fixe et l'angle C constant, on vous demande :

- De déterminer le lieu du point d'intersection des hauteurs relatives aux côtés BC et AC.
- D'expliquer votre raisonnement ;
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.



Si l'angle C est constant, alors le sommet C se déplace sur un arc de cercle "au-dessus" et "au-dessous" de AB. Ce cercle Γ est le cercle circonscrit au triangle et AB est une corde Traitons le cas où C est "au-dessus" de AB. Il existera une solution symétrique dans le cas où C est "en-dessous".

Soit H le point d'intersection des hauteurs, M le pied de la hauteur issue de C, et D son intersection avec le cercle.

On a:

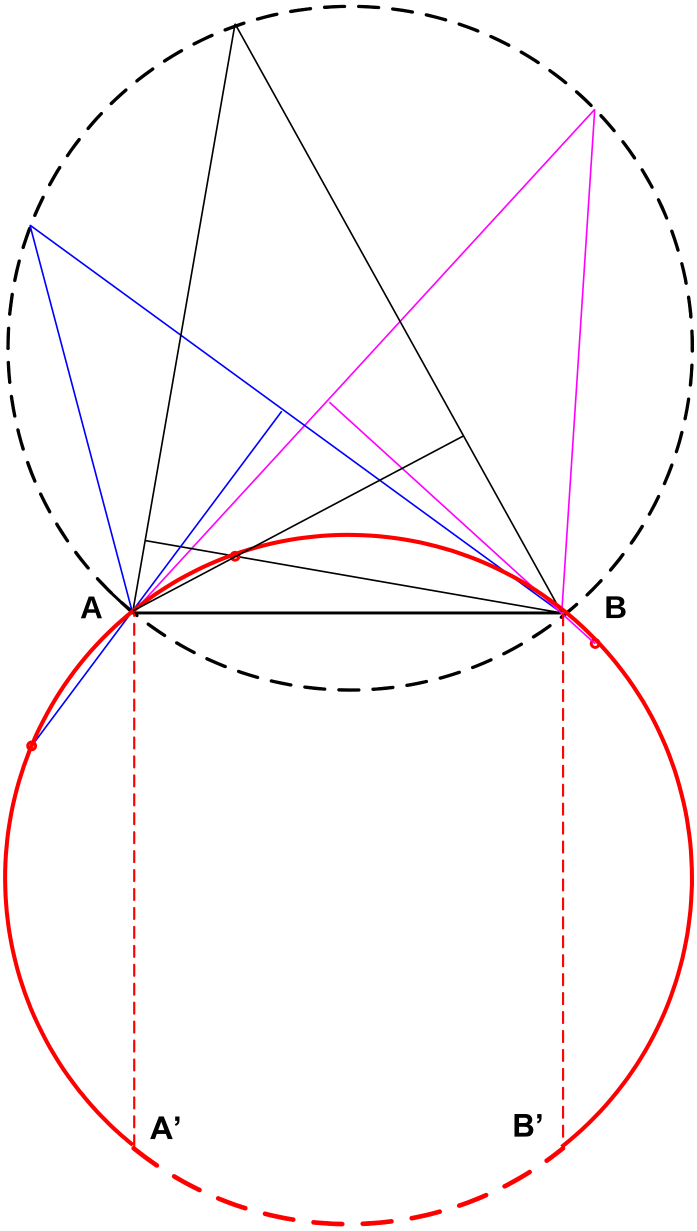
$\widehat{C_1 = B_1}$ interceptent le même arc.

$\widehat{C_1 = B_2}$ angles à côtés perpendiculaires

$\rightarrow \widehat{B_1 = B_2} \rightarrow$ Les triangles rectangles MHB et MDB sont égaux

$\rightarrow MH = MD$

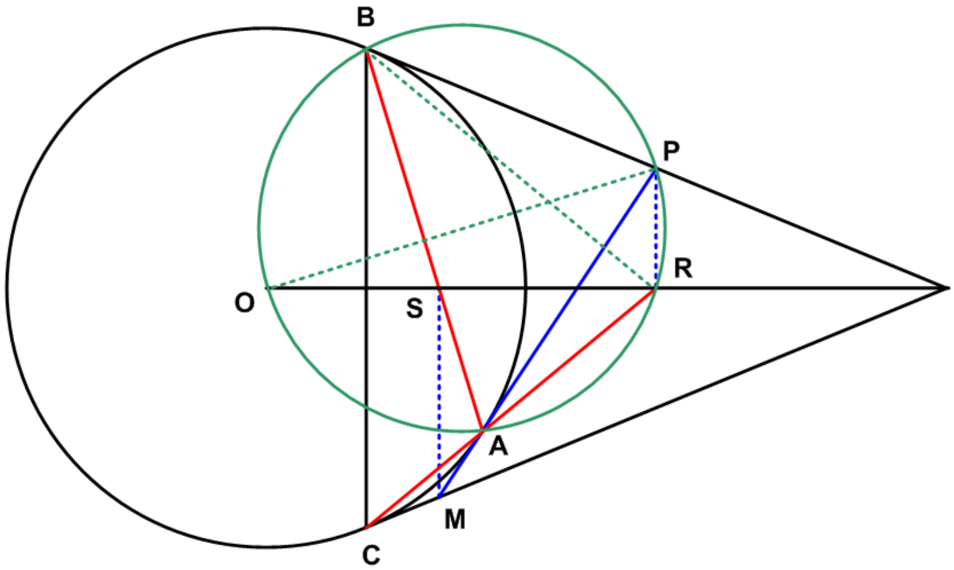
le lieu est donc un arc du cercle symétrique du cercle Γ avec AB comme axe de symétrie. Cette arc est $A'B'$ (avec A' à la verticale de A et B' à la verticale de B).



Note :
Pour le cas des médianes, voir : EXGSP006
Pour le cas des bissectrices, voir : EXGSP062

EXGSP065 – Exemple.

Soit un cercle de centre O et trois points de la circonférence, B et C qui sont fixes et A qui est quelconque. La tangente en A coupe les tangentes en B et C respectivement aux points P et M dont les projections sur la médiatrice de BC sont R et S.
Quel est le lieu de l'intersection des droites BS et CR quand A parcourt la circonférence ?



Un dessin soigné montre immédiatement que le lieu est la cironférence elle-même, cependant un dessin n'est pas une démonstration.

Le cercle de diamêtre OP passe par les points B, R et A car de chacun de ces points, on voit le diamêtre OP selon un angle droit. Comme OP est bissectrice de l'angle $\widehat{BAP}$, les arc $\widehat{OB}$ et $\widehat{OA}$ sont égaux, et donc les angles $\widehat{BRO}$ et $\widehat{ORA}$ sont égaux.

D'autre part, R étant qur la médiatrice de BC, les angles $\widehat{BRO}$ et $\widehat{ORC}$ sont égaux
On en déduit que $\widehat{ORA} = \widehat{ORC}$. Les points C, A et R sont donc alignés et la droite CR passe par A.

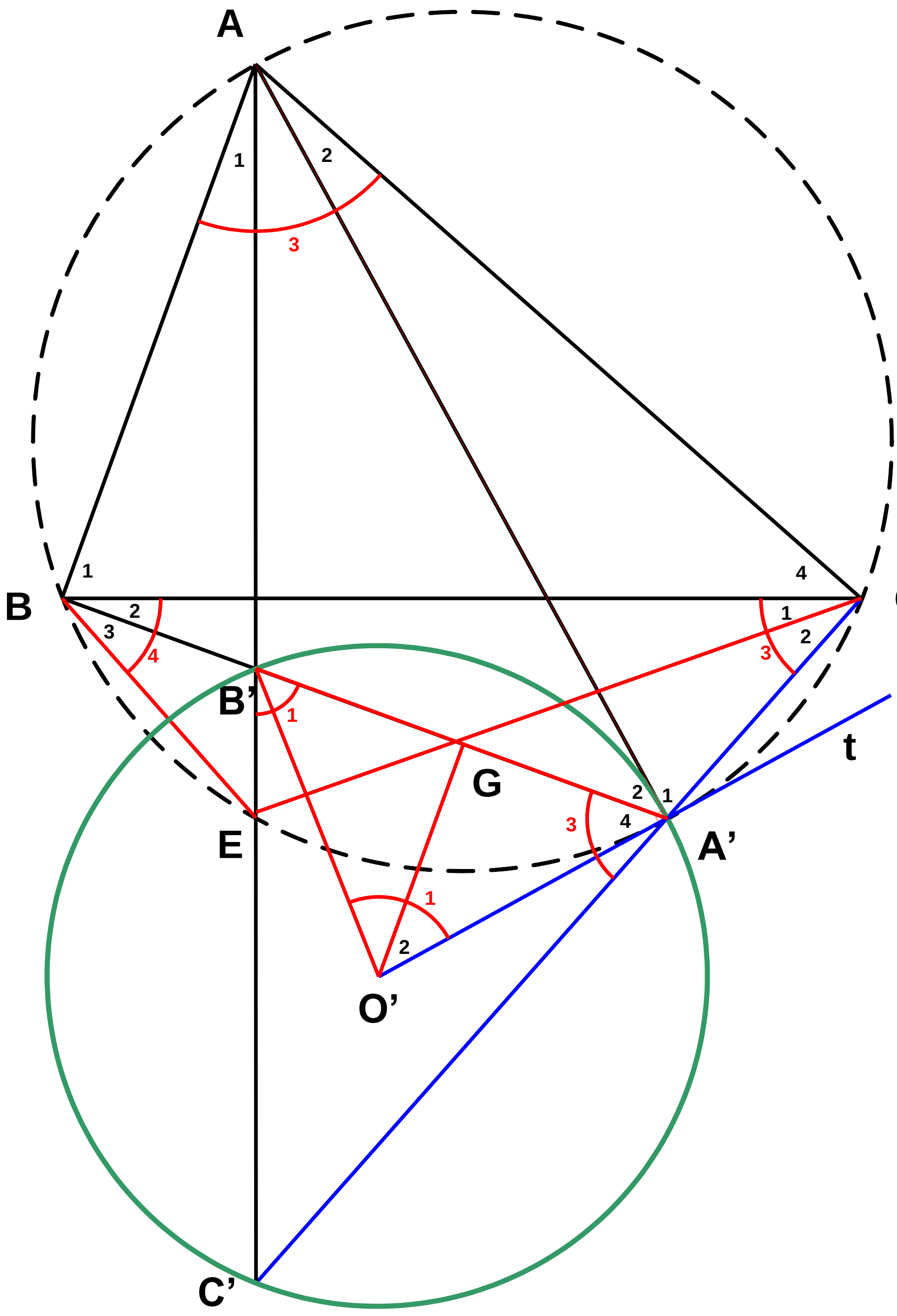
On démontre mutatis mutandis que BS passe aussi par A.

Le lieu est donc bien la circonférence.

EXGSP066 – Liège, juillet 2002.

Soit *ABC* un triangle non rectangle. ***C*** son cercle circonscrit et *A'* le point de ***C*** diamétralement opposé à *A*. La hauteur issue de *A* coupe *A'B* en *B'* , *A'C* en *C'* et ***C*** en *A* et *E*

1. Montrer que le triangle *A'B'C'* est semblable au triangle *ABC*
2. Prouver que les segments [*A',C*] et [*B,E*] ont même longueur
3. Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle *A'B'C'* est sur la tangente à ***C*** menée par *A'*.



1) $B_1 = B'_1$ Angles à côtés $\perp$ (1)

$B_1 = A'_1$ Interceptent le même arc

$C_4 = A'_2$ Interceptent le même arc

$\rightarrow B_1 + C_4 + A_3 = 180° = A'_1 + A'_2 + A'_3 \quad \rightarrow \quad A_3 = A'_3 \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables

2) B_1 et A_1 sont complémentaires car AC' est une hauteur

$\widehat{B_1} = \widehat{A'_1}$ Interceptent le même arc

$\widehat{A_2}$ et $\widehat{A'_2}$ sont complémentaire car AA' est un diamètre

Donc $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \rightarrow$ les arcs BE et $A'C$ sont égaux

$\rightarrow$ les cordes BE et $A'C$ sont égales

3) Soit O' le centre du cercle circonscrit aà $A'B'C'$.

Soit $O'G$ perpendiculaire à $B'A'$. Le triangle $O'B'A'$ étant isocèle

$O'G$ est la médiatrice de $B'A' \rightarrow \widehat{O'_1} = 2\widehat{O'_2}$

$\widehat{O'_1} = 2\widehat{C'}$ Angle au centre et angle inscrit $\rightarrow \widehat{O'_2} = \widehat{C'}$

$\widehat{O'_2}$ et $\widehat{A'_4}$ Sont complémentaires car $\Delta O'GA'$ est rectangle

Or $\widehat{C_4} = \widehat{A'_2}$ Interceptent le même arc

Et comme on a établit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables,

on a $\widehat{C_4} = \widehat{C'} = \widehat{O'_2} = \widehat{A'_2}$

Finalement, on a donc que $\widehat{A'_2}$ et $\widehat{A'_4}$ sont complémentaires

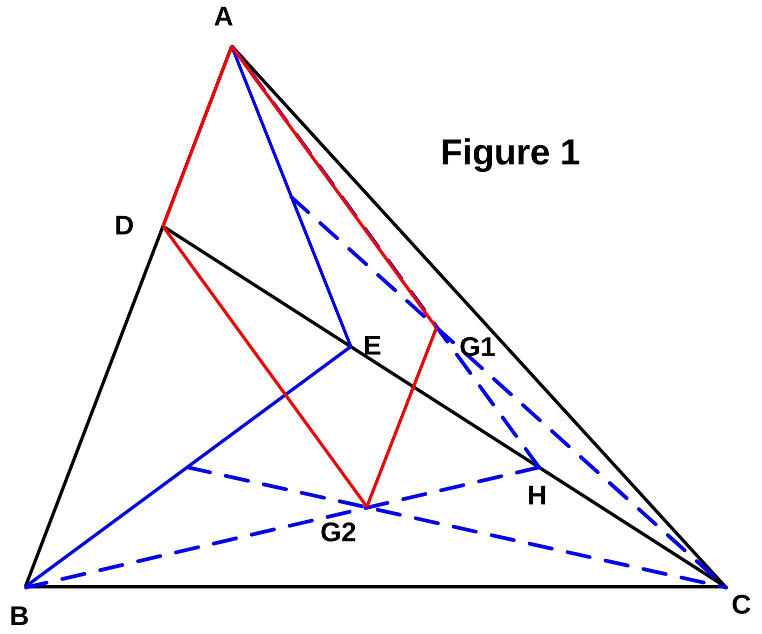
En d'autres termes, $t \equiv O'A'$ est perpendiculaire au diamètre AA'

et t est une tangente

EXGSP067 – Liège, juillet 2002.

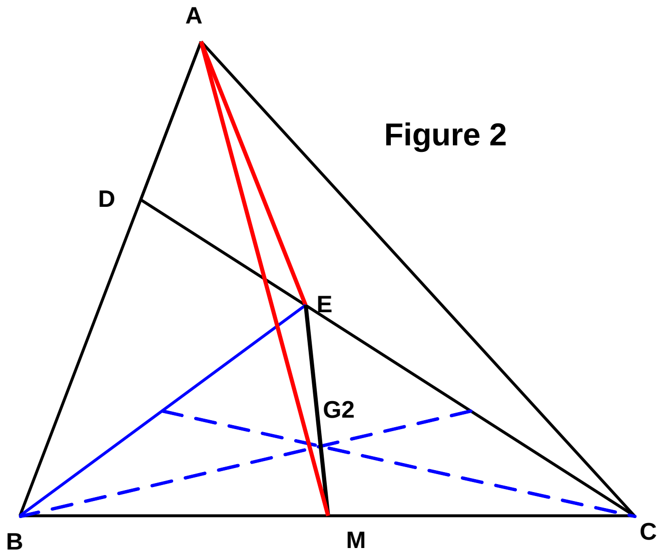
Soit ABC un triangle, D le point du segment [A,B] situés au tiers à partir de A et E le point du segment [C, D] situé au tiers à partir de D. On note G_1 le centre de gravité du triangle AEC et G_2 celui du triangle BEC.

1. Prouver que ADG_1G_2 est un parallélogramme
2. Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.



1) ΔAHB

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}HG_1 = \frac{1}{3}AH \\ HG_2 = \frac{1}{3}HB\end{array}\right. \rightarrow \quad G_1G_2 \,//\, AD \\ \left\{\begin{array}{l}DA = \frac{1}{3}AB \\ HG_2 = \frac{1}{3}HB\end{array}\right. \rightarrow \quad G_2D \,//\, AG_1\end{array}\right\} \rightarrow ADG_1G_2 \quad \text{parallélogramme}$$



2) Figure 2 : Si $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ sont multiples l'un de l'autre, alors A, E et G_2 sont colinéaires. Or AM est médiane du triangle ABC, cela revient à dire que E est situé sur la médiane du $\triangle ABC$

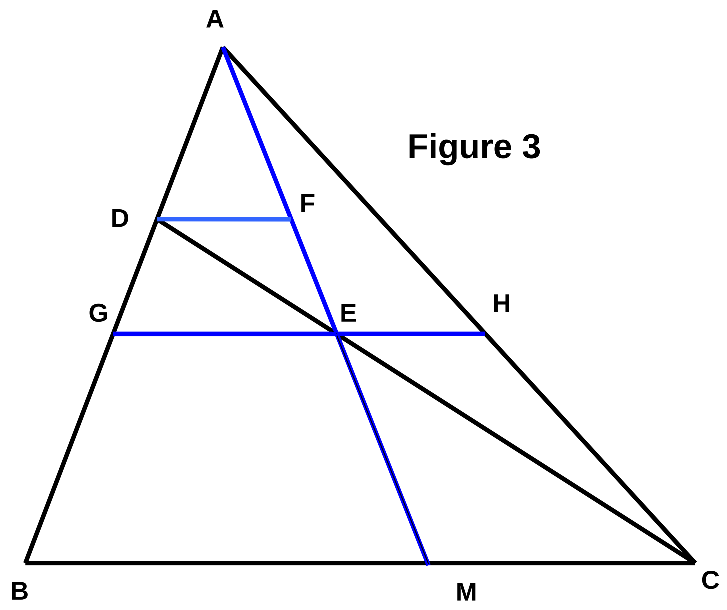


Figure 3 : Montrons que E ne peut pas se situer sur la médiane AM.

Par E traçons la parallèle à BC qui coupe AB en G et AC en H

Par D traçons la parallèle à BC qui coupe EA en F.

Les triangles ABC et AGH sont semblables

$\triangle DBC \rightarrow |GE| = \dfrac{1}{3}|BC|$

$\triangle ABC \rightarrow |AF| = \dfrac{1}{3}|AM| \rightarrow |FE| = \dfrac{2}{3}|FM| = \dfrac{2}{9}|AM|$

$\rightarrow |AE| = |AF| + |FE| = \dfrac{5}{9}|AM|$

$\rightarrow |AG| = \dfrac{5}{9}|AB| \rightarrow |GH| = \dfrac{5}{9}|BC|$

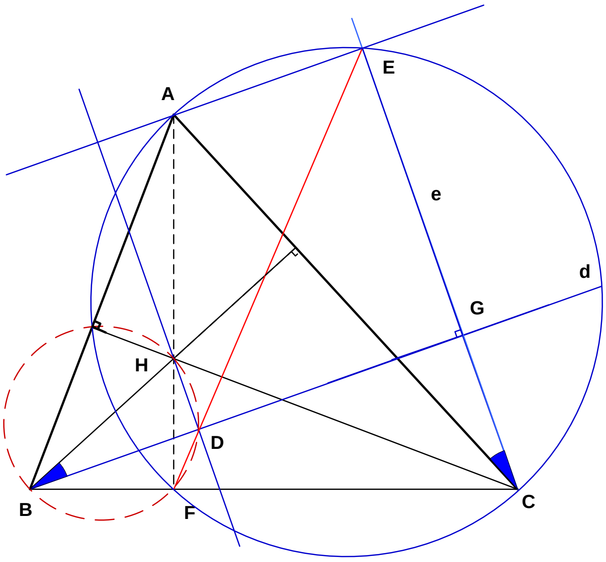
Donc $|EH| = |GH| - |GE| = \left(\dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{3}\right)|BC| = \dfrac{2}{9}|BC|$

$\rightarrow |GE| > |EH| \rightarrow$ E n'est pas sur la médiane AM

EXGSP068 – Liège, septembre 2002.

On considère un triangle *ABC*. On note *H* son orthocentre et *F* le pied de la hauteur issue de *A*. Par *B* on mène une droite *d* ; par *C* on mène une droite *e* perpendiculaire à *d*. La parallèle à *d* passant par *A* coupe *e* en *E* ; la parallèle à *e* passant par *H* coupe *d* en *D*

a) Montrer que les points *A*, *E*, *F* et *C* sont cocycliques et en déduire que les angles *AFE* et *ACE* sont égaux ou supplémentaires
b) Montrer que les points *H*, *D*, *F* et *B* sont cocycliques et que les angles *DBH* et *DFH* sont égaux ou supplémentaires
c) Montrer que les angles *ACE* et *DBH* sont égaux ou supplémentaires
d) En déduire que les points *D*, *E* et *F* sont alignés.



$$1)\begin{Bmatrix} \Delta AFC \text{ Rectangle avec } AC \text{ comme hypoténuse} \\ \Delta AEC \text{ Rectangle avec } AC \text{ comme hypoténuse} \end{Bmatrix} \rightarrow AECF \text{ cocycliques}$$

$\rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACE}$ car interceptent le même arc

$$2)\begin{Bmatrix} \Delta BFH \text{ Rectangle avec } BH \text{ comme hypoténuse} \\ \Delta BDH \text{ Rectangle avec } BH \text{ comme hypoténuse} \end{Bmatrix} \rightarrow HDFB \text{ cocycliques}$$

$\rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$ car interceptent le même arc

3) $\widehat{ACE} = \widehat{DBH}$ Car ce sont des angles à côtés perpendiculaires

(Des angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires)

4) Des points précédents, on tire $\widehat{AFE} = \widehat{HFD}$. Ce sont deux angles ayant le sommet et un côté commun, on en déduit que l'autre côté est aussi commun

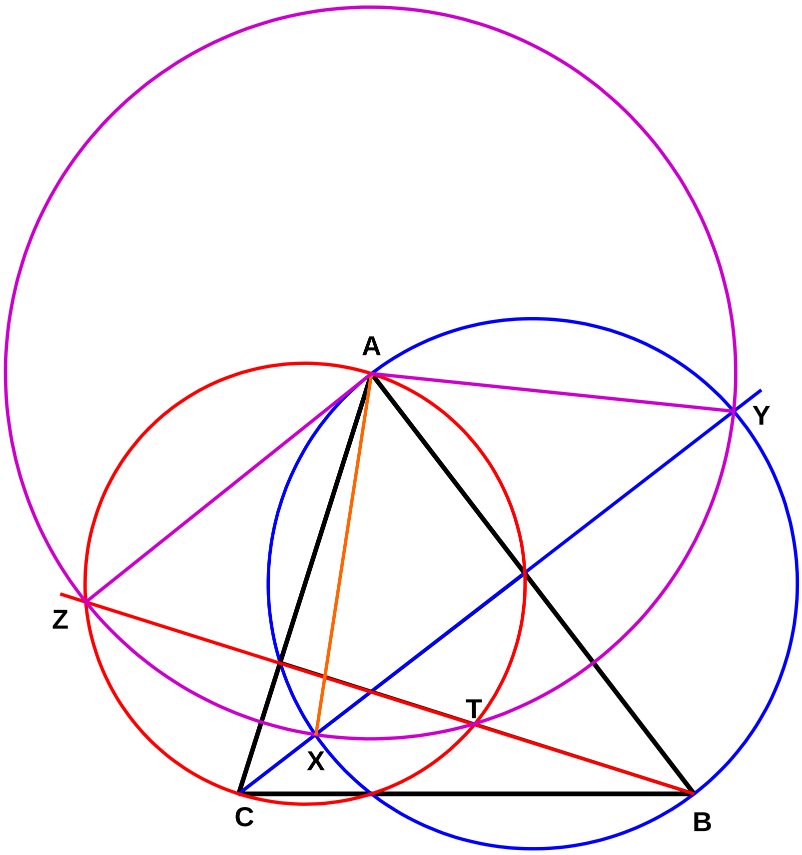
$\rightarrow$ F, D et E sont des points alignés.

Modifié le 29 avril 2005

EXGSP069 – Liège, septembre 2002.

Soit ABC un triangle dont l'angle A est aigu. Le cercle de diamètre AB coupe la hauteur issue de C en des points X et Y ; le cercle de diamètre AC coupe la hauteur issue de B en des points Z et T

1. Montrer que $\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points X, Y, Z et T sont sur un même cercle, dont on déterminera le centre.



1) $\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right)$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX}.\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX}\right).\overrightarrow{BX}$$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BX}$$

Or CX est perpendiculaire à AB, car CX est une hauteur $\rightarrow \overrightarrow{CX}.\overrightarrow{AB} = 0$

Et $\triangle AXB$ est rectangle puisque AB est un diamètre $\rightarrow \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BX} = 0$

Finalement : $\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Appliquons la relation trouvée au point T : $\left|\overrightarrow{AT}\right|^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Par conséquent, $|AT| = |AX|$

D'autre part, Y est le symétrique de X par rapport à $AB \rightarrow |AX| = |AY|$

Et, Z est le symétrique de T par rapport à $AC \rightarrow |AT| = |AZ|$

Donc : $|AX| = |AY| = |AT| = |AZ|$

Les points X, Y, Z et T sont donc sur un même cercle de centre A