Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 9

EXGSP090 – EXGSP099

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

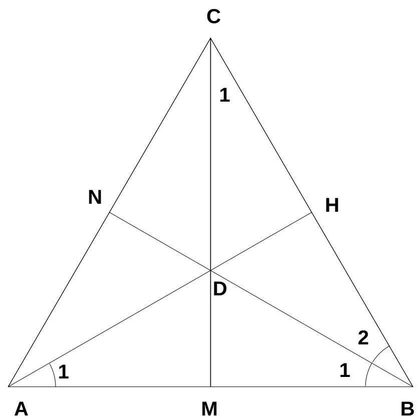
Août 05

EXGSP090 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2005

Soit ABC un triangle isocèle $\left(\left| \overrightarrow{CA} \right| = \left| \overrightarrow{CB} \right| \right)$.On note H le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[A,B]$ et N le pied de la bissectrice intérieure issue de B.

On suppose que les droites AH, CM et BN sont sécantes en un point D.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.



Le triangle ACB est isocèle par hypothèse, donc CM qui est une médiane est aussi une bissectrice de C et une hauteur issue de C.

Regardons alors les triangles rect an gles ADM et CDH.

D est situé sur la bissectrice issue de B, donc $|DH| = |DM|$

De plus, $\widehat{A_1 = C_1}$ puisque que ce sont deux angles à côtés perpendiculaires

Par conséquent, les triangles ADM et CDH sont égaux et $|AM| = |CH| \quad (1)$

Regardons maintenant les triangles rectangles BMD et BHD.

Ils sont aussi égaux puisque $\widehat{B_1 = B_2}$ et que DB est une hypotènuse commune.

Par conséquent, $|BM| = |BH| \quad (2)$

En faisant, $(1)+(2)$, on obtient $|AB| = |CB|$ et en conclusion le triangle ABC est équilatéral.

Le 5 août 2005

EXGSP091 – Liège, juillet 2005

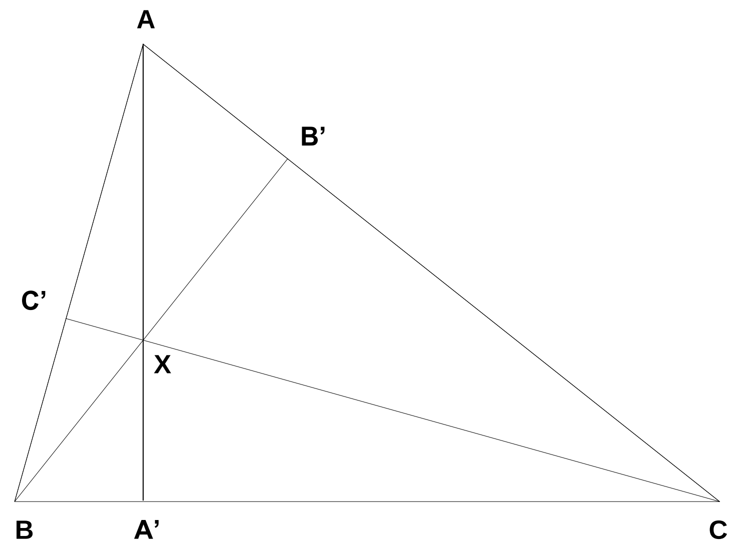
Soit *ABC* un triangle

a) Montrer qu'un point satisfait

$$\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).\overrightarrow{XC}=\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).\overrightarrow{XA}=\left(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA}\right).\overrightarrow{XB}$$

Si et seulement si *X* est l'orthocentre de *ABC*

b) Montrer que si les trois membres sont égaux à zéro, alors *ABC* est rectangle.



a) Considérons que X est l'orthocentre. Regardons si la relation est vérifiée

$$\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).\overrightarrow{XC}\overset{?}{=}\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).\overrightarrow{XA}\rightarrow\overrightarrow{XA}.\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}\overset{?}{=}\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}.\overrightarrow{XA}$$

$$\rightarrow\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}\overset{?}{=}\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XA}\quad(1)$$

Or B' est la projection orthogonale de A et C sur XB

$\rightarrow\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XB'}$ et $\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XB'}$ Ce qui vérifie la relation (1)

On recommence mutatis mutandis pour les autres relations.

Supposons maintenant que la relation est vérifiée et démontrons que X est l'orthocentre.

$$\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).\overrightarrow{XC}=\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).\overrightarrow{XA}\rightarrow\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XA}\rightarrow\overrightarrow{XB}.\left(\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}\right)=0$$

$\rightarrow\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{CA}=0$ Autrement dit XB est la hauteur issue de B

On recommence mutatis mutandis pour les autres relations et on déduit que X est l'orthocentre de ABC

b) On a donc : $\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).\overrightarrow{XC}=0\rightarrow\overrightarrow{XA}.\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}=0$

Or $\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).\overrightarrow{XA}=\left(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA}\right).\overrightarrow{XB}\rightarrow\overrightarrow{XC}.\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XC}.\overrightarrow{XB}$

En remplaçant, on a $2\overrightarrow{XB}.\overrightarrow{XC}=0\rightarrow XB\perp XC.$

Les hauteurs issues de B et de C étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en A.

Ou bien on pouvait en déduire que $2\overrightarrow{XA}.\overrightarrow{XC}=0\rightarrow XA\perp XC,$ et le triangle est alors rectangle en B.

De même, on peut démontrer que le triangle peut être rectangle en C

Le 5 août 2005

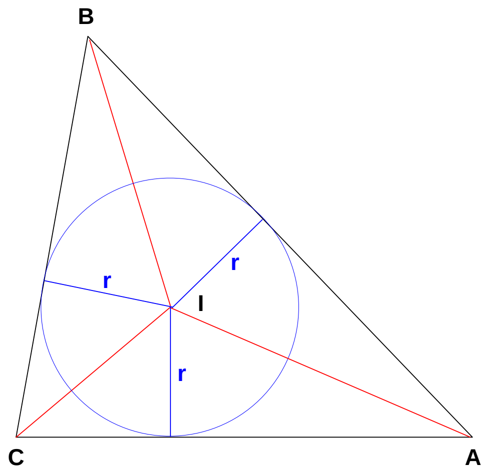
EXGSP092 – Compléments

Soit ABC un triangle quelconque. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = CA$. Soit r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est donnée par

$$A = p.r \text{ où } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Note : Ce théorème est utilisé à l'exercice EXGSE065



Le centre du cercle inscrit I est définit par le point de rencontre des bissectrices intérieures du triangle. De par la propriété des bissectrices, I est équidistant des côtés du triangle d'une distance r, rayon du cercle inscrit.

L'aire du triangle ABC est la somme des aires de trois triangles :

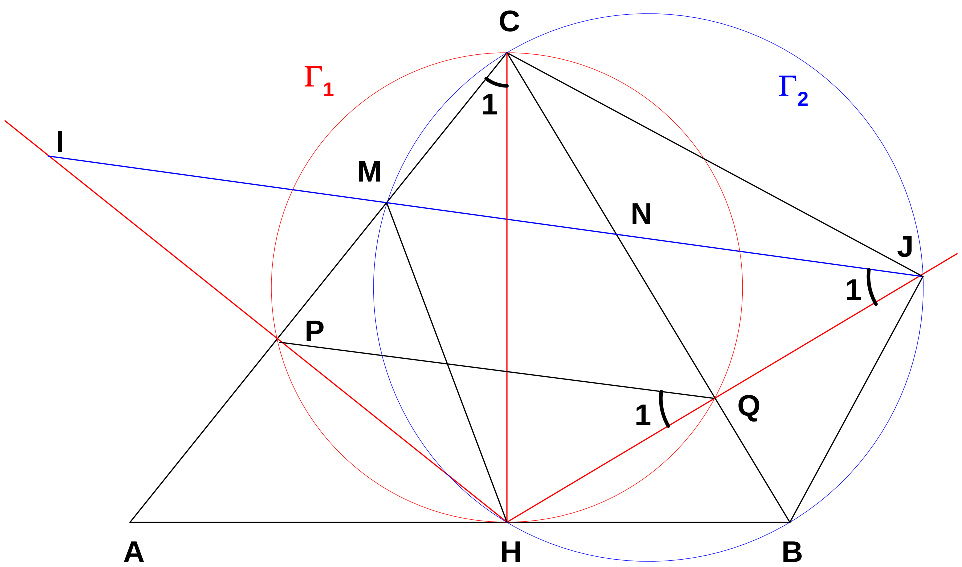
$$A_{ABC} = A_{AIB} + A_{BIC} + A_{CIA} = \frac{c.r}{2} + \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} = r\frac{a+b+c}{2} = r.p$$

Le 15 août 2005

EXGSP093 – Mons, juillet 2005

Soit *ABC* un triangle. Appelons *H* le pied, sur *AB*, de la hauteur issue de *C*. Construisons alors le *I* symétrique du point *H* par rapport à *AC* et le point *J*, symétrique de *H* par rapport à *BC*. La droite *IH* coupe *AC* en *P* et la droite *JH* coupe *BC* en *Q* et traçons le segment *PQ*.
Traçons aussi le segment *IJ* qui coupe *AC* en *M* et *BC* en *N*.
Démontrez que les points *C*, *J*, *B*, *H* et *M* sont sur une même circonférence (On démontrerait de la même façon que *C*, *I*, *A*, *H* et *N* sont sur une même circonférence, différente toutefois de la précédente)

Note : Cet exercice est couplé avec EXGAP083



Puisque $\begin{cases} IH \perp AC \\ HP \perp CB \end{cases} \rightarrow CPH = HQC = \dfrac{\pi}{2}$, et donc le quadrilatère $CPHQ$ est inscriptible dans un cercle Γ_1 de diamètre CH.

D'autre part J étant le symétrique de H selon l'axe CB, nous avons

$J = S_{CB}(H)$ or $\begin{cases} C = S_{CB}(C) \\ B = S_{CB}(B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} CJ = S_{CB}(CH) \\ JB = S_{CB}(BH) \end{cases}$ et comme les symétries orthogonales conservent les angles, nous déduisons $\widehat{CJB = \dfrac{\pi}{2}}$. Ce qui signifie que le quadrilatère $CHBJ$ est inscriptible dans un cercle Γ_2 de diamètre $CB \rightarrow CHBJ$ sont cocycliques (1)

Remarquons aussi que $\begin{cases} P \text{ milieu de } IH \\ Q \text{ milieu de } HJ \end{cases} \rightarrow PQ \,//\, IJ$

Nous avons alors :

$\begin{cases} \widehat{C_1 = Q_1} \quad \text{Interceptent le même arc} \\ \widehat{Q_1 = J_1} \quad \text{Angles correspondants} \end{cases} \rightarrow \widehat{C_1 = J_1} \rightarrow$ Les points C et J se trouvent sur l'arc capable du segment $MH \rightarrow M$ est situé sur le cercle passant par C, J et H c'est-à-dire sur le cercle $\Gamma_2 \rightarrow CMHJ$ sont cocycliques (2)

De (1) et (2), nous concluons $CMHBJ$ sont cocycliques.

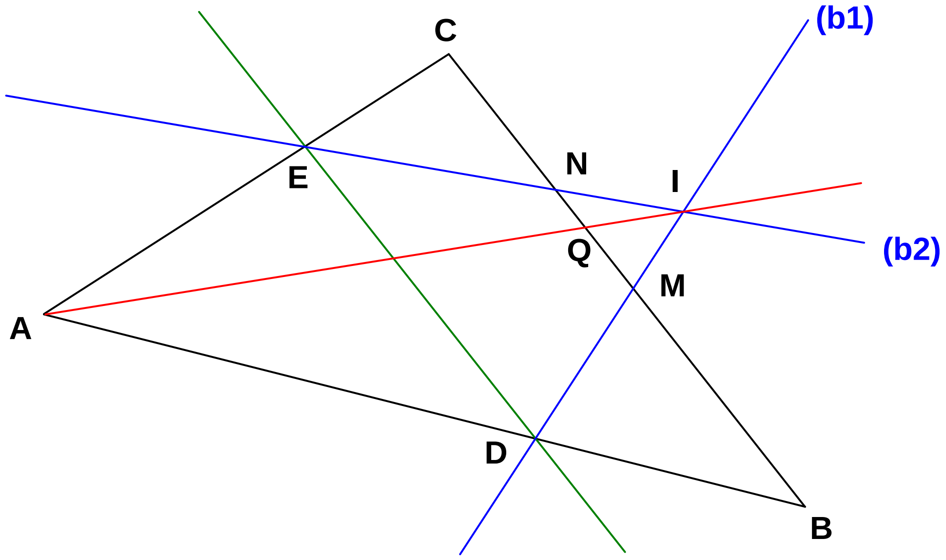
Note : Le triangle *HMN* est le triangle orthique du triangle *ABC*. *IJ* est égale au périmètre du triangle orthique. Pour rappel, on démontre que les hauteurs de *ABC* sont les bissectrices du triangle orthique, et que le triangle orthique est le triangle inscrit au triangle *ABC* dont le périmètre est minimal.

Le 5 août 2005

EXGSP094 – Mons, juillet 2001

Considérons un triangle *ABC*. Soit *D* un point mobile sur le côté *AB* ; Par ce point *D*, on mène la parallèle à *BC* qui rencontre *AC* en *E*. On trace les bissectrices des angles *BDE* et *CED*, dénommés b_1 et b_2, respectivement.

a. Quel est le lieu des intersections de b_1 et de b_2 lorsque le point *D* se déplace sur le côté *AB* ?
b. Comment choisir *DE* parallèle au côté *BC* pour que *BD* + *CE* = *BC* ?
c. Par *D*, on définit la droite p_1 perpendiculaire à *AB*, et par *E* (*DE* || *BC*), la droite p_2 perpendiculaire à *AC*. Quel est le lieu des intersections de p_1 et p_2, lorsque le point *D* se déplace sur le côté *AB* ?

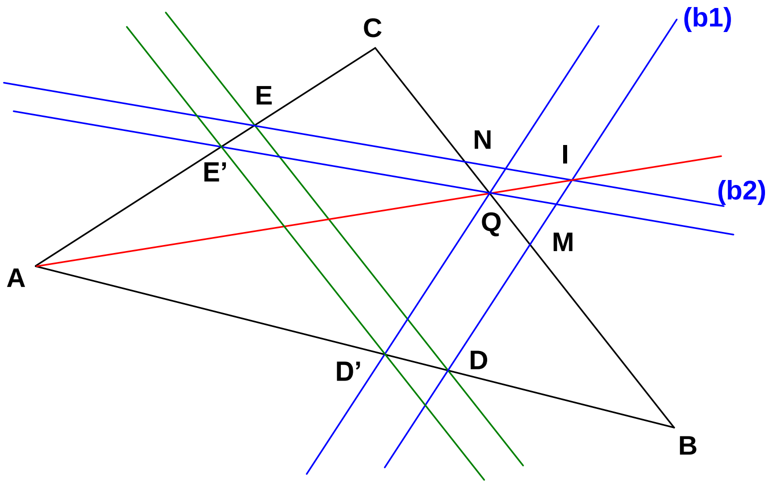


Par définition, si b_1 est bissectrice de l'angle *BDE*, alors tous les points de b_1 sont équidistants de la droite *BD* et de la droite *DE*.

De même, si b_2 est bissectrice de l'angle *CED*, alors tous les points de b_2 sont équidistants de la droite *CE* et de la droite *DE*.

Par transitivité, on déduit : $\begin{cases} d_{BD} = d_{DE} \\ d_{CE} = d_{DE} \end{cases} \rightarrow d_{BD} = d_{CE}$

Ce qui signifie que le lieu recherché est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$



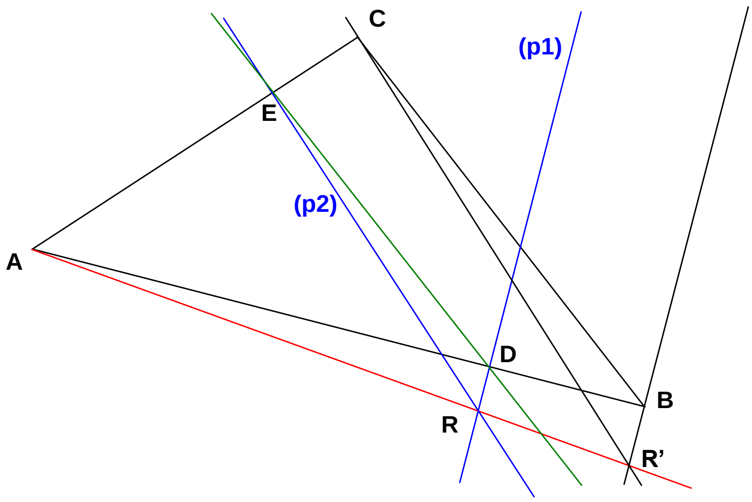
$b)$ Soit $\begin{cases} N = b_1 \cap BC \\ Q = AI \cap BC \\ M = b_2 \cap BC \end{cases}$. Considérons alors le triangle DBN

$$\left.\begin{array}{ll} BND = EDN & \text{Angles alternes internes} \\ NDE = NDB & b_1 \text{ bissectrice} \end{array}\right\} \rightarrow BND = NDB$$

$\rightarrow$ Le triangle DBN est isocèle et $BD = BN$

On démontre de la même façon que le triangle EMC est isocèle et que $CE = CM$

Autrement dit : $BD + CE = BN + CM$. Cette somme sera égale à BC quand les M, N et Q seront confondus.



$c)$ Si le point D est en A, alors A est un point du lieu.

Si le point D est en B, alors R' est un point du lieu.

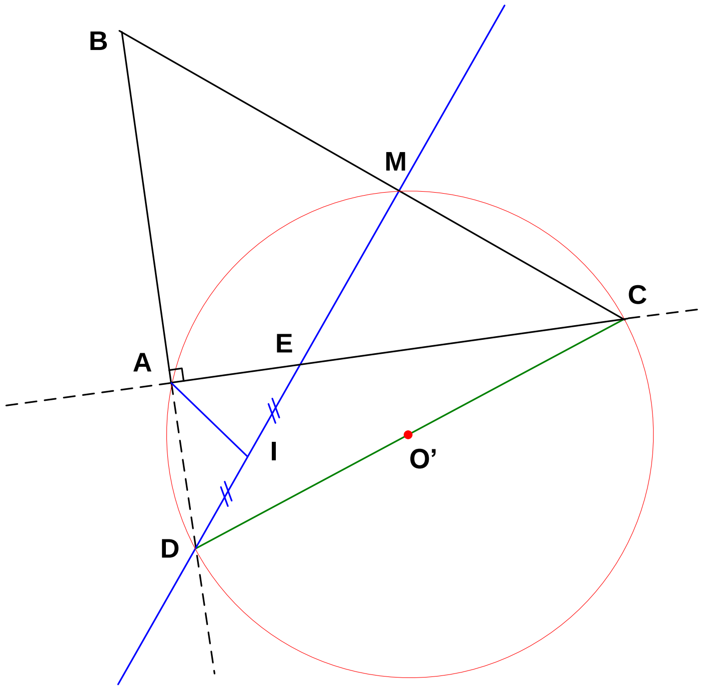
Les triangles ERD et $CR'B$ sont semblables car ils ont leurs côtés parallèles.

Le triangle ERD l'image homothétique de $CR'B$ par une homothétie de centre A. Par conséquent, le point R se déplace sur le segment AR'.

EXGSP095 – Mons, juillet 2001

Par un point *M* variable de l’hypoténuse *BC* d’une triangle *ABC*, on mène la perpendiculaire à l’hypoténuse coupant *AB* (ou son prolongement) en *D* et *AC* (ou son prolongement) en *E*. Soit *I* le point milieu de *DE*.

a. *M* occupant une position quelconque sur *BC*, démontrer que les 4 points *A, D, M, C* sont situés sur un même cercle dont on précisera la position du centre
b. Démontrer que les angles *IAE* et *ABC* sont égaux
c. Trouver le lieu de *I* lorsque *M* parcourt *BC*
d. Démontrer que $|MB|.|MC| = |MD|.|ME|$



a) La figure formée par les 3 points *A*, *D* et *C* est un triangle rectangle (trivial).
Pour qu'un triangle rectangle soit inscriptible dans un cercle, il faut que le cercle soit centré au milieu de l'hypoténuse (en *P* sur la figure) de ce triangle et de rayon égal à la mi-longueur de l'hypoténuse.

Ces trois points se situent donc sur un tel cercle, il reste à vérifier que *M* l'est aussi.
Par le même raisonnement, avec le triangle droit *DMC*, on vérifié que *M* appartient bien au cercle décrit précédemment

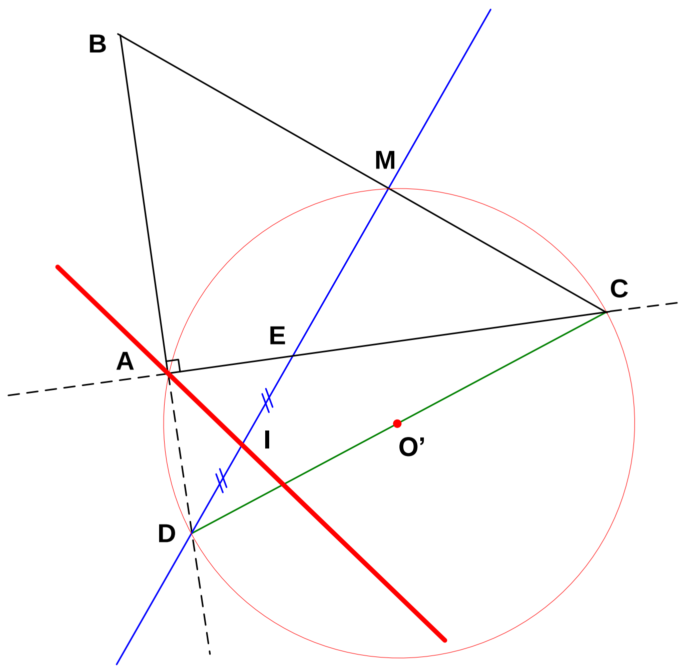
b) BMD et ABC sont deux triangles rectangles et ont un angle en commun, ils sont donc semblables.

On tire de l'information précédente que $\widehat{BCA} = \widehat{BDM}$. (1)

On sait aussi que

- $\widehat{ABC} = 90° - \widehat{BCA}$ (sommes des angles dans un triangle = 180°)
- $\widehat{IAE} = 90° - \widehat{BDM}$ (angle droit et triangle isocèle)

De (1) , on déduit donc que $\widehat{ABC} = \widehat{IAE}$.

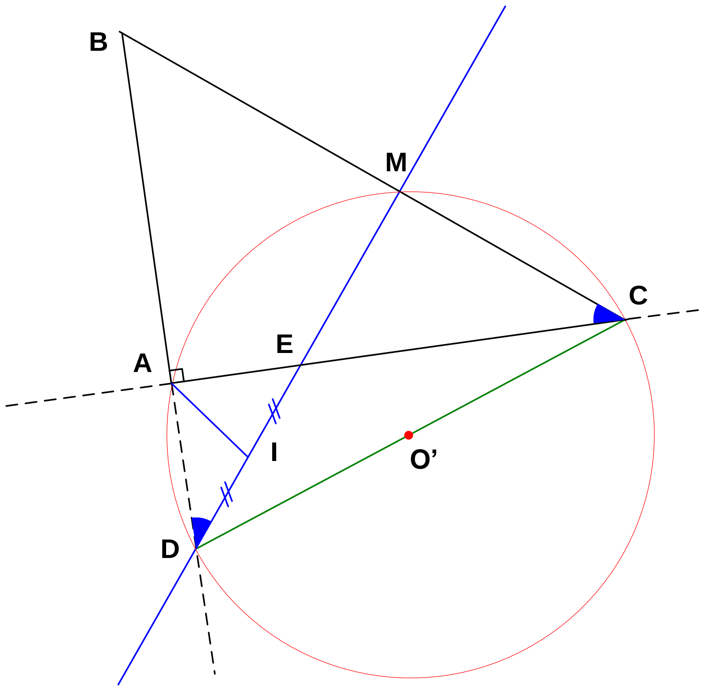


c) Le lieu des points est la droite AI car $\widehat{IAE}$ reste toujours fixe ($= \widehat{ABC}$)

d) $\widehat{ADM} = \widehat{ECM}$ car angles à côtés perpendiculaires

$\rightarrow$ Les triangles rectangles BMD et EMC sont semblables

$$\rightarrow \frac{|BM|}{|EM|} = \frac{|MD|}{|MC|} \rightarrow |BM|.|MC| = |EM|.|MD|$$

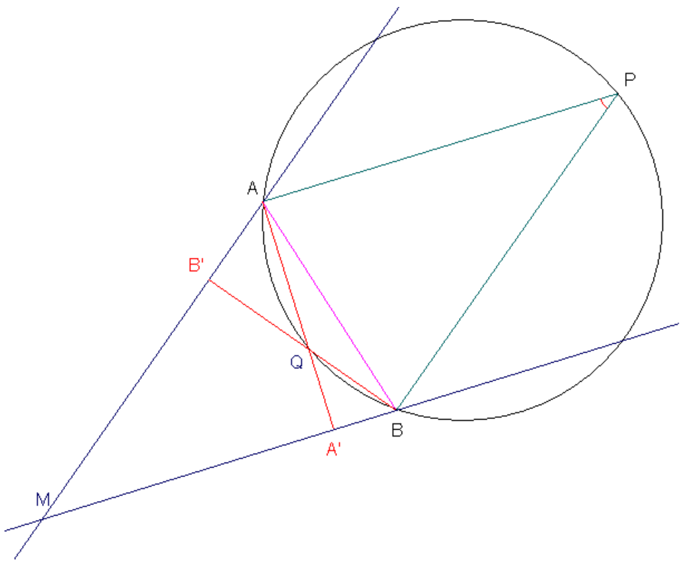


Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP092 EXGSP096 – Mons, juillet 2002

On donne un point fixe P sur un cercle C. Autours de P pivote un angle constant α interceptant l'arc AB.

a. On construit un parallélogramme $APBM$. Démontrer que les hauteurs du triangle ABM se coupent sur C en un point fixe Q.
b. Le point H étant l'orthocentre du triangle PAB et I le milieu de la corde AB, prouver que H, I et Q sont alignés.
c. Prouver que $|OI|$ est constant. Trouver le lieu de I.
d. Prouver que $|PH| = 2\,|OI|$



a) Pour vérifier que Q est bien sur le cercle, il faudrait démontrer que $\alpha + AQB = 180°$ (rappelons que pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle, la somme des angles opposés vaut toujours 180°).

On sait que $\alpha = \widehat{AMB}$ (angles opposés dans un parallélogramme) et $\widehat{AQB} = \widehat{B'QA'}$ (1)

Or $MB'QA'$ est un quadrilatère à 2 angles droits $\rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{B'QA'} = 180° \rightarrow \alpha + \widehat{AQB} = 180$ (vu (1))

Il reste à démontrer que ce point Q est fixe !

$|MA|$ sera toujours parallèle à $|PB|$ et donc $|BB'|$ toujours perpendiculaire à $|AM|$ ou encore $|BB'| \perp |PB|$.

Le triangle QBP est droit et donc toujours inscrit au cercle.

Son hypoténuse $|QP|$ restera donc toujours fixe vu que P est fixé.

Q sera donc toujours sur le cercle, fixé et diamétralement opposé à P.

b) Première méthode

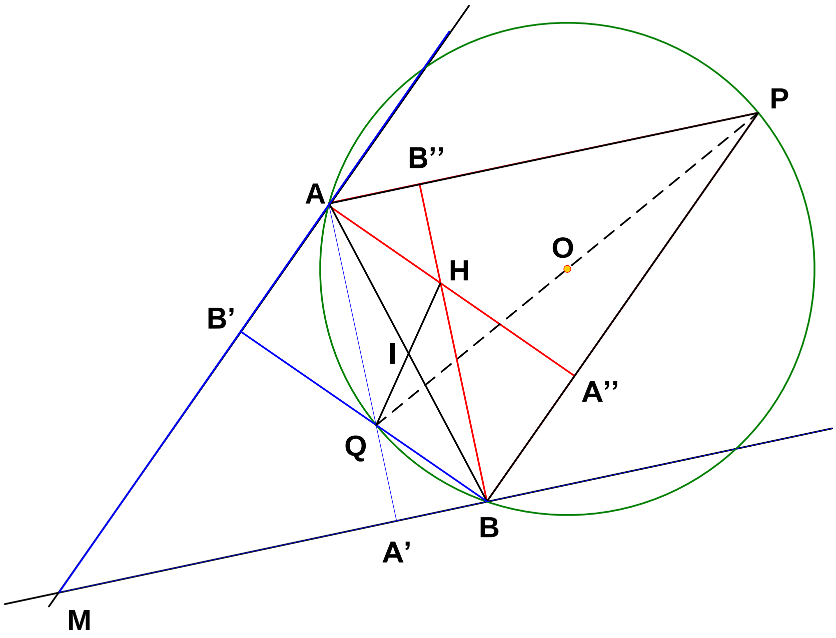
I milieu de $|AB|$ Intersection des diagonales du parallélogramme $AMBP$.

On remarque qu'une homothétie envoie ABM sur PAB. Son centre est I et sont rapport -1.

Ainsi, cette transformation envoie les hauteurs de ABM sur les hauteurs de PAB.

Autrement dit, elle envoie l'orthocentre de ABM (point Q) sur celui de PAB (point H)

H et Q sont donc aligné avec I. On peut donc même dire que I est le milieu de $|HC|$.

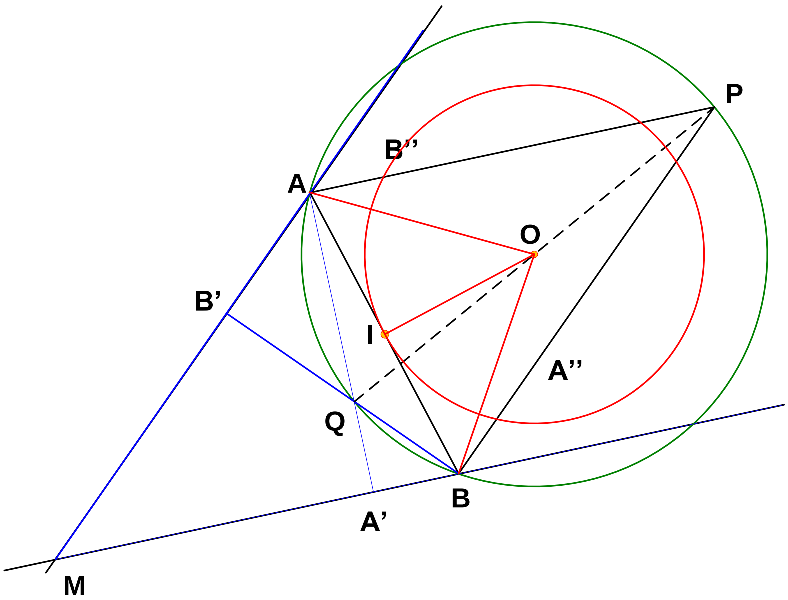


Deuxième méthode

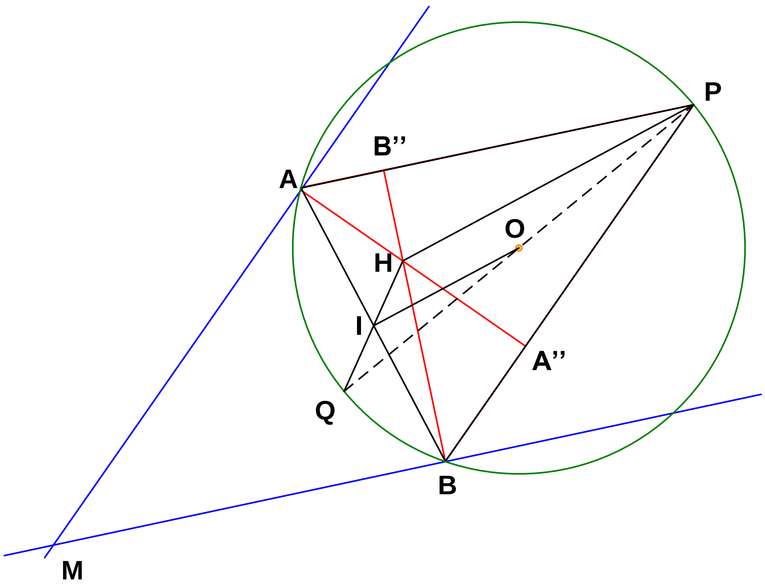
$$\left.\begin{array}{l} AA'' // BB' \\ AA' // BB'' \end{array}\right\} \rightarrow AQBM$$ est un parallélogramme dont I est le milieu de la diagonale

AB. Or I se trouve aussi sur l'autre diagonale $QH \rightarrow Q, I$ et H sont alignés

et I est le milieu de QH



c) Dans le triangle OAB, $|OA|$ et $|OB|$ sont toujours égaux (rayons du cercle)
L'angle AOB est constant ($= 2\alpha$) $\rightarrow$ tous les triangles engendrés par A, O et B sont isométriques. La médiane $|OI|$ est constante.
Par conséquent, le lieu de I est bien sur le cercle de centre IO et de rayon $|OI|$

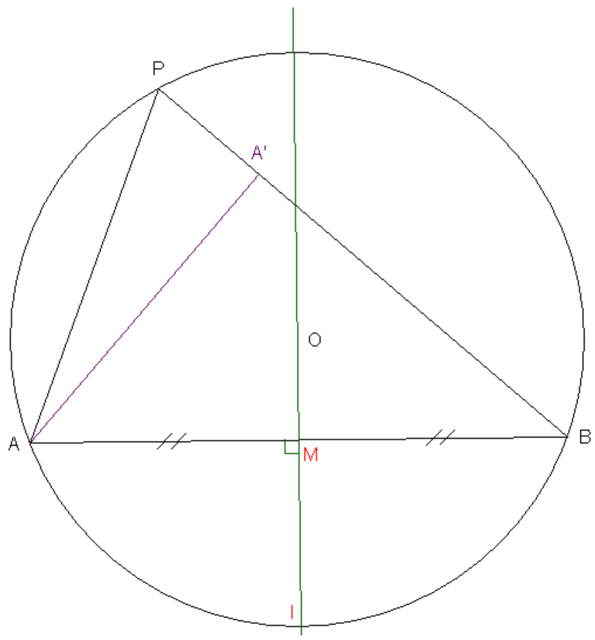


d) Traçons le triangle PQH. O est le milieu de PQ, et $|OI| \; // \; |PH|$.
Les triangles OIQ et PHQ sont donc semblables et leur rapport de similitudes est 2 $\rightarrow$ $|OI| = 2 \; |PH|$

EXGSP097 – Mons, juillet 2003

Soit un triangle *PAB* inscrit dans un cercle de centre *O* et de rayon *R*. Soir le milieu *M* de *AB*. Appelons *I* le point d'intersection de la droite *OM* et de l'arc *AB*. Soit *A'*, la projection de *A* sur *PB*.

a. Exprimer la longueur du segment *AA'* en fonction des longueurs des côtés du triangle *PAB* et du rayon *R*.
b. Supposons que le point *P* soit mobile sur la circonférence de centre *O* et de rayon *R*, les points *A* et *B* étant fixes. Quel est le lieu de la projection orthogonale *A''* du point *A* sur la bissectrice de l'angle *APB* ?



a) AA' est côté du triangle $PA'A$ rectangle en A'.

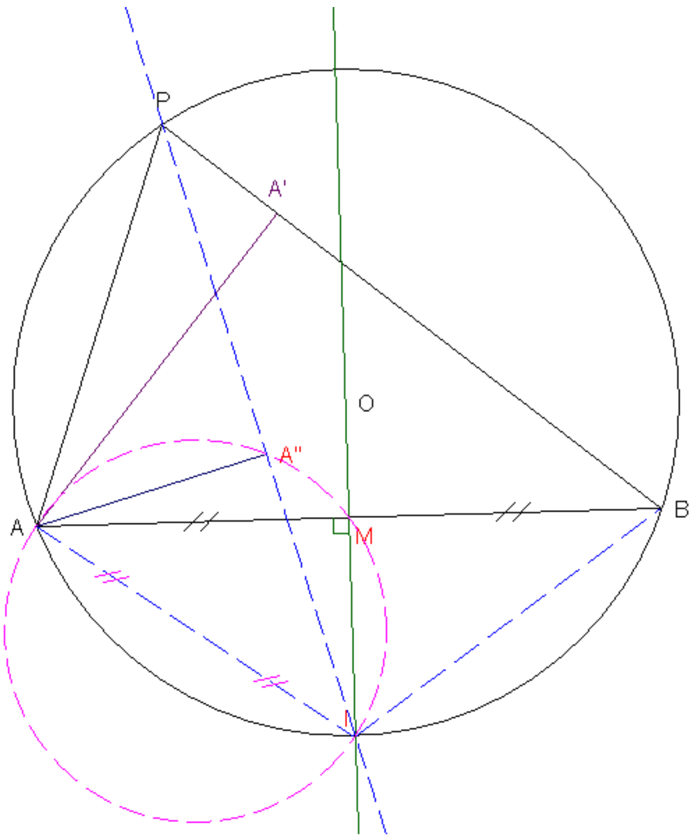
On cherche un triangle semblable à $PA'A$ qui intègre des éléments de longueur connue.

Le triangle convient puisque :

- OMA et $PA'A$ sont rectangles $(OM$ est médiatrice de $AB)$
- Les angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{AOM}$ sont égaux. En effet, $\widehat{APB}$ vaut la moitiè de $\widehat{AOB}$ (Angle au centre et angle inscrit interceptant le même arc) et $\widehat{AOM}$ vaut la moitié de $\widehat{AOB}$ puisque OM est médiatrice de AB

Les triangles $PA'A$ et OMA étant semblables, on peut écrire $\frac{AA'}{AM} = \frac{AP}{AO} = \frac{AP}{R}$

Et donc $\rightarrow AA' = \frac{AP.AM}{R} = \frac{AP.AB}{2R}$



b) On observe d'abord que I fait partie de la bissectrice. En effet, le segment AI étant égal au segment BI (OM médiatrice de AB), l'angle API est égal à l'angle BPI puisqu'ils interceptent des arcs égaux.

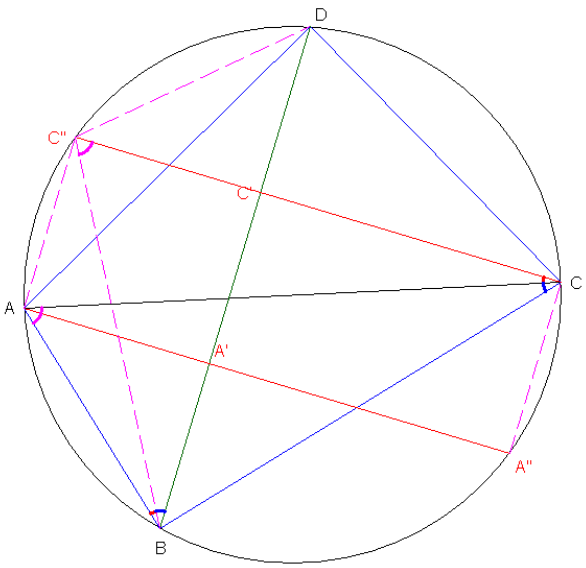
Le point $A"$ est donc le lieu des points interceptant l'arc AI sous un angle droit, c'est-à-dire un cercle de diamètre AI.

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP098 – Mons, juillet 2003

Soit une circonférence de diamètre *AC* sur laquelle *B* et *D* sont les points donnés tels qu'*ABCD* forme un quadrilatère convexe. On projette les sommets *A* et *C* sur l'autre diagonale *BD*, respectivement *A'* et *C'*. *AA'* et *CC'* coupent la circonférence respectivement et *A''* et *C''*. On demande de

1. Démontrer que les triangles *ABC* et *BC'C''* sont semblables
2. Démontrer que *BA'* est la même longueur que *C'D*



a) Ils ont tous les deux un angle droit. De plus, l'angle $CC"B$ est égal à l'angle CAB puisqu'ils interceptent le même arc BC.

b) Du point précédent, on en déduit que le troisième angle des triangles semblables est égal lui aussi, soit . Par conséquent, les segments $|AB|$ et $|C"D|$ (1) sont égaux, puisque interceptés par un même angle.

Par ailleurs, les angles $\widehat{ABC"}$ et $\widehat{ACC"}$ sont égaux puisqu'ils interceptent le même arc $AC"$. Ceci induit que les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC"}$ (2) sont égaux puisqu'ils sont la somme de deux angles égaux.

Par conséquent : $\left.\begin{array}{l} |C'D| = |C"D| \cos \widehat{BDC"} \\ |BA'| = |AB| \cos \widehat{ABD} \end{array}\right\}$

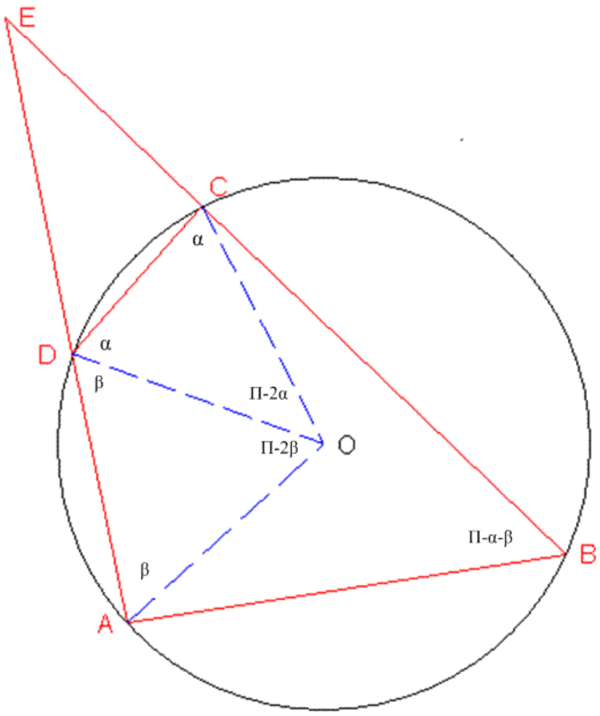
$\rightarrow$ compte tenu de (1) et (2): $|C'D| = |BA'|$

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson

EXGSP099 – Mons, juillet 2003

Soit *ABCD*, un quadrilatère inscrit dans un cercle. Les prolongements des côtés *AD* et *BC* se coupent en *E*. Les diagonales de *BD* et *AC* se coupent en *I*.

a. Démontrer que la somme des angles *ABC* et *ADC* vaut un angle plat.
b. Démontrer que la bissectrice de *AIB* et de *AEB* fait un même angle avec *AD*. On appellera *J*, le point de rencontre de la bissectrice de *AIB* avec *AD* ou son prolongement et *F*, l'intersection de la bissectrice de *AEB* avec *AB*.

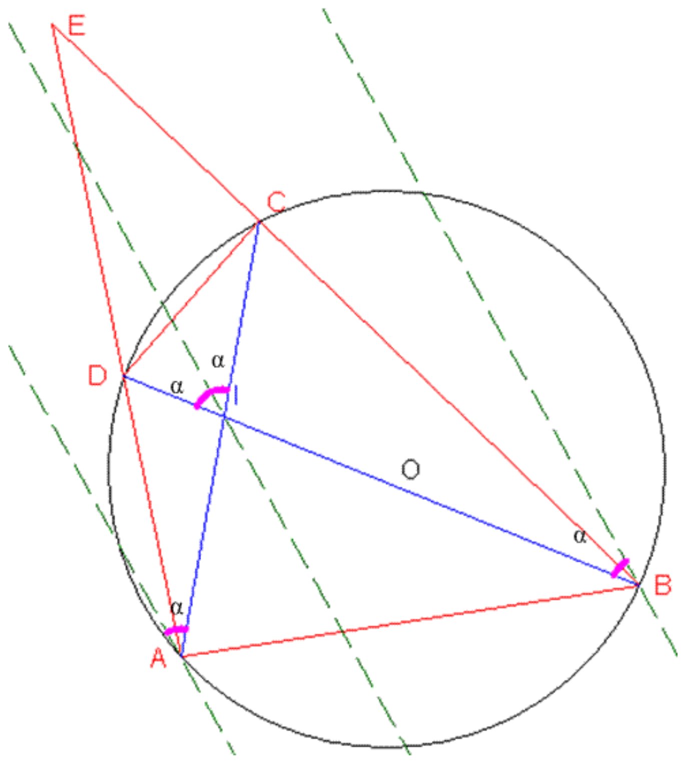


a) Ensemble les angles ABC et ADC interceptent l'entiéreté du cercle.
Leur somme vaut donc π soit un angle plat.

On peut par exemple le démontrer en traçant le segment *DO* et en divisant l'angle ADC $\alpha + \beta$. Le triangle *DOC* étant isocèle (*OD* = *OC* = *R*), l'angle vaut $\pi - 2\alpha$.

De même dans le triangle *DOA*, l'angle $\widehat{DOA}$ vaut $\pi - 2\beta$.

Par ailleurs, l'angle $\widehat{ABC}$ est inscrit et intercepte le même arc AC que l'angle au centre $\widehat{AOC}$. On déduit $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \pi - \alpha - \beta = \pi - \widehat{ADC}$



b) Il suffit de démontrer que la bissectrice de AIB fait un même angle avec les côtés AD et BC.

Soit α l'angle que fait cette bissectrice avec les segments AC et BD.

En reportant en A une parallèle à la bissectrice, on constate que l'angle entre la bissectrice et le côté AD vaut $\alpha - \widehat{DAC}$.

En reportant en B une parallèle à la bissectrice, on constate que l'angle entre la bissectrice et le côté B vaut $\alpha - \widehat{DBC}$.

Or on sait que $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ puisqu'ils interceptent le même arc DC.

On en déduit que les angles que fait la bissectrice en I avec les côtés AD et BC sont égaux et qu'elle ne peut donc qu'être parallèle à la bissectrice des segments AE et BE.

Le 12 septembre 2005. Steve Tumson