Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 14

EXGSP140 – EXGSP149

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 10

EXGSP140 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010

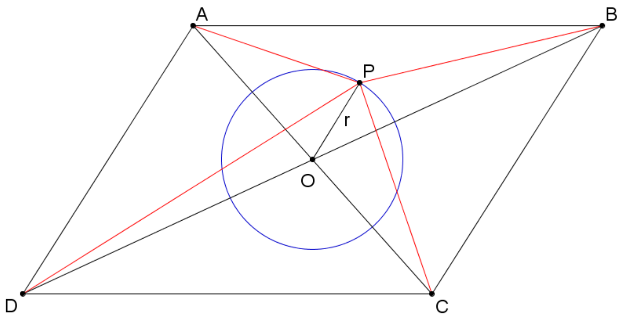
Le centre O d'un cercle de rayon r est situé à l'intersection des diagonales d'un parallélogramme $ABCD$. Un point P parcourt ce cercle.

1) Démontrer que la valeur de

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$$

où $|XY|$ représente la longueur du segment $[XY]$, ne dépend pas de la position de P sur le cercle.

2) Exprimer cette valeur en fonction de r des longueur $|AB|$ et $|BC|$ des côtés du parallèlogramme.



a) Soit $E=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PD}^2$

$$=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}^2$$

$$=4.\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}.\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}_{=0}\right)+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\underbrace{\overrightarrow{OC}^2}_{=\overrightarrow{OA}^2}+\underbrace{\overrightarrow{OD}^2}_{=\overrightarrow{OB}^2}$$

$$=4|PO|+2\left(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2\right)=4r^2+2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)$$

Cette dernière expression est indépendante de la position de P.

b) Nous avons donc :

$$E=4r^2+2\left(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2\right)=4r^2+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2\right)$$

$$=4r^2+\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)^2+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)^2\right]$$

$$=4r^2+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2+\underbrace{\overrightarrow{DC}^2}_{=\overrightarrow{AB}^2}+2\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{=\overrightarrow{AB}}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2\right)$$

$$=4r^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}.\underbrace{\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)}_{=0}$$

$$=4r^2+|AB|^2+|BC|^2$$

Le 30 septembre 2010.

EXGSP141 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010

Soit le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre AB. On nomme S_1 l'aire comprise entre le côté AC du triangle et l'arc de cercle AC et on appelle S_2 l'aire située entre le côté CB et l'arc CB.

Que vaut le rapport des aires S_2 / S_1 si l'angle $\widehat{ABC}$ vaut β ?

Solution proposée par Steve Tumson

Si on note $R = \dfrac{|AB|}{2}$ le rayon du cercle circonscrit.

Les informations suivantes sont déductibles :

* Triangle ABC inscrit à un cercle dont AB diamètre $\rightarrow$ ABC rectangle en C
* Si le centre du cercle est O, on a $|OB| = |OC| = R$
* Angles au centre et angles inscrits : $\widehat{AOC} = 2\beta$
* Angle supplémentaire : $\widehat{BOC} = \pi - \widehat{AOC} = \pi - 2\beta$
* Si h est la hauteur de ABC en H : $|CH| = |OC|\sin\left(\widehat{BOC}\right) = R\sin(\pi - 2\beta)$

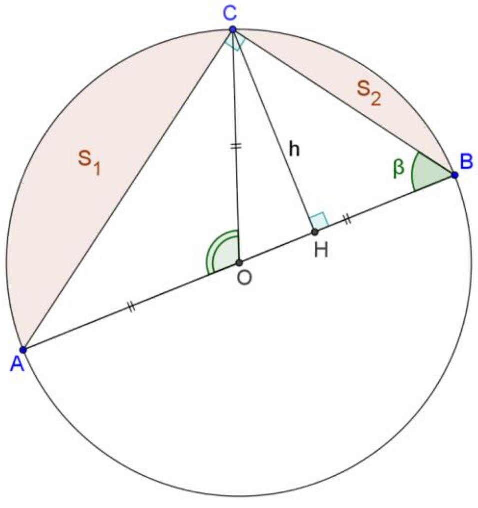
$$S_{AOC} = S_{COB} = \frac{1}{2}R|CH| = \frac{1}{2}R^2\sin(\pi - 2\beta) = \frac{1}{2}R^2\sin(2\beta)$$

$$\rightarrow S_1 = \pi R^2\left(\frac{\widehat{AOC}}{2\pi}\right) - S_{AOC} = \pi R^2\left(\frac{2\beta}{2\pi}\right) - S_{AOC} = R^2\beta - \frac{1}{2}R^2\sin(2\beta)$$

$$\rightarrow S_2 = \pi R^2\left(\frac{\widehat{BOC}}{2\pi}\right) - S_{COB} = \pi R^2\left(\frac{\pi - 2\beta}{2\pi}\right) - S_{COB} = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\beta - \frac{1}{2}R^2\sin(2\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)}{\beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)} = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\beta + \beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)}{\beta - \frac{1}{2}\sin(2\beta)} = \boxed{1 + \frac{\pi - 4\beta}{2\beta - \sin(2\beta)}}$$

<u>N.B</u> : On retrouve bien un rapport unitaire pour $\beta = \pi / 4$



Le 20 janvier 2011.

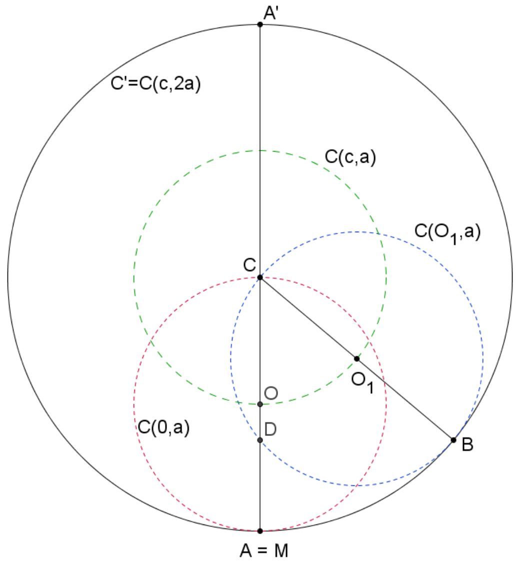
EXGSP142 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

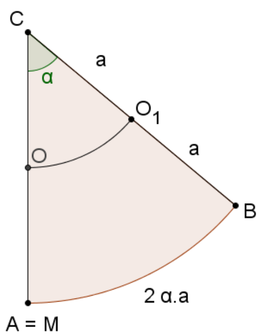
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon a et un point M sur ce cercle. Le cercle C roule sans glissement à l'intérieur d'un plus grand cercle $\mathcal{C}'$, fixe de rayon $2a$. On demande de :

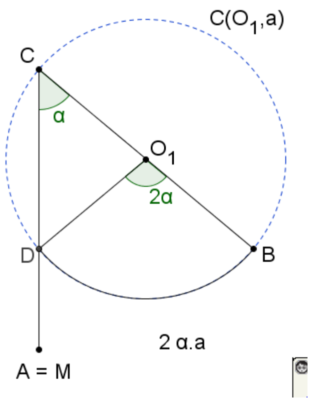
- Faire un dessin clair et précis des différents éléments du problème.
- Trouver le lieu du point M quand le cercle $\mathcal{C}$ roule sans glissement à l'intérieur de la circonférence $\mathcal{C}$ tout en restant constamment tangent à $\mathcal{C}'$.

Il est conseillé de commencer par déterminer graphiquement plusieurs points du lieu de M pour différentes positions du cercle $\mathcal{C}$.

Solution proposée par Nicole Berckmans







Les cercles en présence sont :

$\mathcal{C}' = \mathcal{C}(c, 2a)$: cercle de centre c et de rayon $2a$

$\mathcal{C}(O, a); \mathcal{C}(O_1, a); \mathcal{C}(c, a)$

<u>Théorème</u> : La longueur d'un arc de cercle est égal au rayon multiplié l'angle au centre exprimé en radian.

En vertu de ce théorème, la longueur de $\overset{\frown}{AB} =$ la longueur de $\overset{\frown}{DB} = 2\alpha a$

Imaginons qu'au départ le point M soit situé en A, point de tangence entre les cercles $\mathcal{C}(x, 2a)$. Le centre O se déplaçant sur $\mathcal{C}(c, a)$, après un certain temps, il se retrouve en O_1. Le cercle $\mathcal{C}(O_1, a)$ est tangent en B au cercle $\mathcal{C}(c, 2a)$.

Où se trouve le point M, sur le cercle $\mathcal{C}(O_1, a)$?

Puisque $\overset{\frown}{MB} = 2\alpha a$, M est donc un point X du cercle $\mathcal{C}(O_1, a)$ tel que $\overset{\frown}{XB} = 2\alpha a$.

On en déduit que M est situé en D.

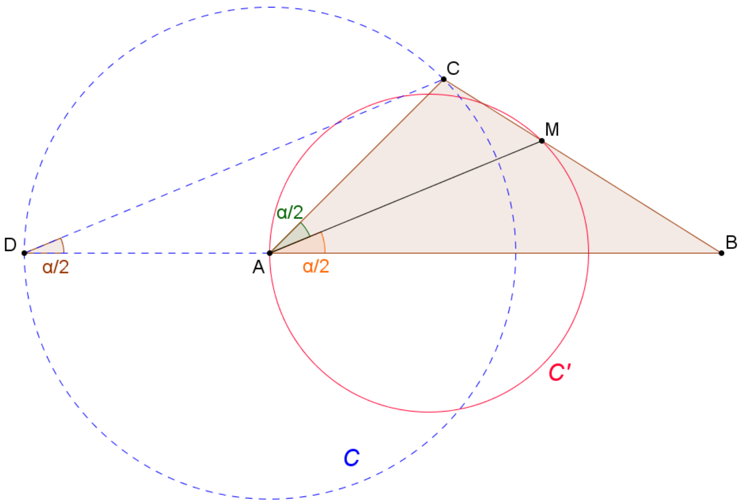
Par conséquent, le lieu du point M est le diamètre AA' du grand cercle $\mathcal{C}(c, 2a)$

Le 16 aout 2009.

EXGSP143 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 2.

Trouver le lieu du pied de la bissectrice de l'angle variable A d'un triangle ayant un côté fixe AB et un côté AC de longueur constante

---



C parcourt un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et de centre A. Par C, on mène CD parallèle à AM. CD coupe en D.

D est sur le cercle C. En effet,

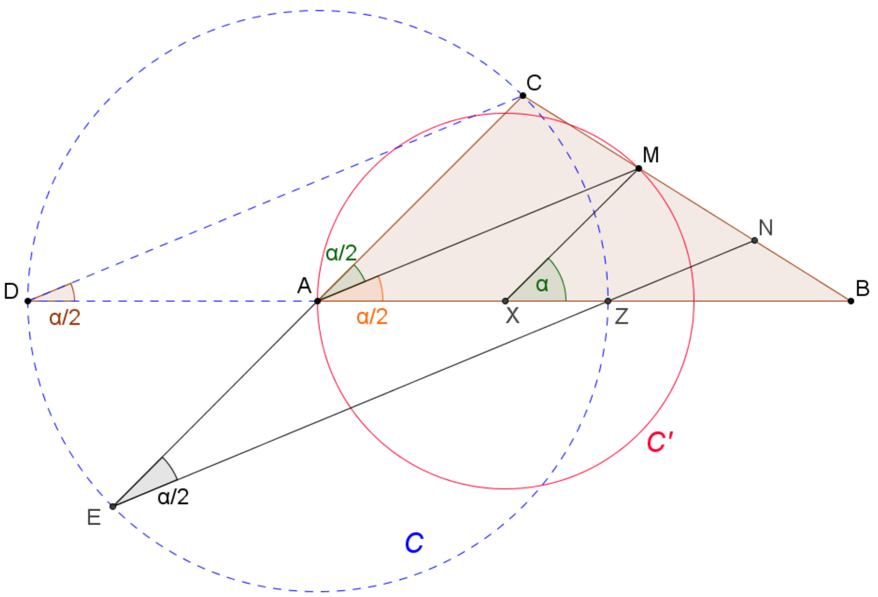
$$\begin{cases} DCA = CAM & \text{angles alternes-internes} \\ CDA = MAB & \text{angles correspondants} \\ CAM = MAB & AM \text{ est bissectrice} \\ \text{Donc } DCA = CDA \text{ et le triangle } DAC \text{ est isocèle} \\ \text{Dès lors } \overline{DA} = \overline{AC} = R \end{cases}$$

Par le théorème de Thalès dans le triangle BCA, on a

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{k}{k+R} \qquad \text{si } k = \overline{AB}$$

D'où $$\overline{BM} = \frac{k}{k+R}\overline{BC}$$

M est l'image de C par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{k}{k+R}$



Alternative 1

Méthode utilisant le théorème des bissectrices.

Dans le triangle ABC :

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{R}{k} \qquad \text{et} \qquad \overline{MC} = \overline{BC} - \overline{BM}$$

D'où $\quad \overline{BC} - \overline{BM} = \dfrac{R}{k}\overline{BM}$; $\quad \overline{BC} = \left(\dfrac{R}{k} + 1\right)\overline{BM}$

$$\overline{BM} = \frac{k}{k+R}\overline{BC}$$

Et donc le lieu de M est un cercle image de B par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{k}{k+R}$

Alternative 2

Méthode utilisant la projection de M sur la droite AB parallèlement à AC.

Traçons $MX \,//\, AC$

1) Le triangle AMX est isocèle $MXB = \alpha$. D'où $\overline{MX} = \overline{AX}$

2) Thalès dans le triangle ABC coupé par $MX \,//\, AC$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = \frac{R}{\overline{MX}} \Rightarrow \frac{k}{k - \overline{AX}} = \frac{R}{\overline{AX}} \Rightarrow k\overline{AX} = R\left(k - \overline{AX}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{AX} = \frac{Rk}{k+R}$$

Le point X est fixe sur AB et donc $\overline{AX} = \dfrac{Rk}{k+R}$

M décrit un cercle de centre X passant par A

Alternative 3

Méthode utilisant le point E.

1) Le triangle CEN est coupé par AM. Puisque A est milieu de EC, on en déduit que M est le milieu de CN.

2) Thalès dans le triangle AMB coupé par $ZN\,//\,AM$.

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BZ}} \text{ or } \frac{\overline{AB}}{\overline{BZ}} = \frac{k}{k-R}$$

d'où $$\overline{BN} = \frac{k-R}{k}\overline{BM}$$

$$\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MN} = 2\overline{BM} - \overline{NB} = 2\overline{BM} - \frac{k-R}{k}\overline{BM} = \frac{k+R}{k}\overline{BM}$$

Dès lors $$\overline{BM} = \frac{k}{k+R}\overline{BC}$$

La même question a été posée à l'oral mais dans le cas particulier où $\overline{AB} = \overline{AC}$ c'est-à-dire $k = R$.

Le 16 aout 2009.

EXGSP144 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

Soient deux cercles concentriques $\mathcal{C}$ (intérieur) et $\mathcal{C}'$ (extérieur). Un point P fixe est situé sur $\mathcal{C}$. Une droite mobile d issue de P rencontre $\mathcal{C}'$ en deux points notés A et B.

La droite perpendiculaire à d issue de P rencontre $\mathcal{C}$ et P et en un autre point noté C.

Démontrer que la position du centre de gravité G du triangle ABC est indépendante du choix de d.

Suggestion : Calculer le vecteur $\overrightarrow{OG}$, où O est le centre de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Le centre de gravité G du triangle ABC est le barycentre des points A, B et C, ce qui donne

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Notons M le milieu du segment $[AB]$ et N le milieu du segment $[PC]$. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ par définition de M. On obtient donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$. $[AB]$ étant une corde du cercle $\mathcal{C}'$, on a $OM \perp AB$ et donc $OM \perp PM$. De même, $[PC]$ étant une corde de $\mathcal{C}$, on a $ON \perp PC$ et donc $ON \perp PN$. On en déduit que le quadrilatère $PMOC$ est un rectangle, et donc

$$\overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{OM},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{OM}$$

et

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OM}.$$

L'expression de $\overrightarrow{OG}$ devient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Cette expression reste constante lorsque d varie. Le centre O des cercles étant fixe, on en déduit que la position de G reste également constante.

Le 22 juin 2010.

EXGSP145 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

On considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{CA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Démontrer que l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut les sept tiers de celle du triangle ABC.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

En notant $\mathcal{A}(XYZ)$ l'aire d'un triangle XYZ, on a

$$\mathcal{A}(A'B'C') = \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(AA'B') + \mathcal{A}(BB'C') + \mathcal{A}(CC'A').$$

Considérons le triangle $AA'B'$. Par hypothèse, sa base $|AB'|$ vaut le tiers de la base $|AB|$ du triangle ABC. Notons H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, et H' le pied de la hauteur issue de A' du triangle $AA'B'$.

Les triangles CHA et $A'H'A$ sont rectangles et partagent le même angle $\widehat{A}$. Ils possèdent donc trois angles égaux deux à deux et sont dès lors semblables. Par conséquent, on a

$$\frac{|A'H'|}{|CH|} = \frac{|A'A|}{|CA|} = 1 + \frac{|A'C|}{|CA|} = \frac{4}{3}.$$

On a donc établi que la base $|AB'|$ du triangle $AA'B'$ et la hauteur correspondante $|A'H'|$ sont respectivement égales au tiers de la base $|AB|$ du triangle ABC et aux quatre tiers de la hauteur correspondante $|CH|$. On obtient donc

$$\mathcal{A}(AA'B') = \frac{1}{2}|AB'|.|A'H'| = \frac{2}{9}|AB|.|CH| = \frac{4}{9}\mathcal{A}(ABC).$$

Par un raisonnement similaire, on obtient également

$$\mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(CC'A') = \frac{4}{9}\mathcal{A}(ABC),$$

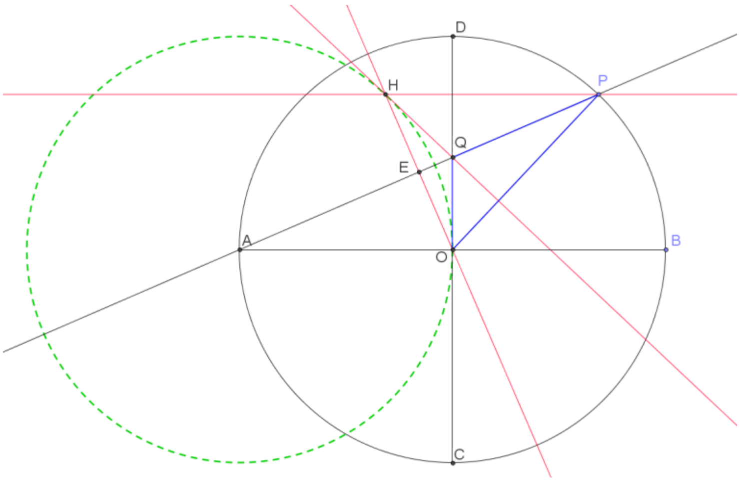
ce qui donne finalement

$$\mathcal{A}(A'B'C') = \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)\mathcal{A}(ABC) = \frac{7}{3}\mathcal{A}(ABC).$$

Le 20 avril 2012.

EXGSP146 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

On donne un cercle Γ de centre O et de deux diamètres perpendiculaires $[A,B]$ et $[C,D]$.
Un point variable P parcourt Γ. On appelle Q l'intersection des droites AP
et CD. Déterminer le lieu de l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs)
du triangle OPQ.



HP étant perpendiculaire à OD est parallèle à AB.

Soit $E = HD \cap AP$. E est le milieu de AP car ED est un diamètre perpendiculaire la corde AP.

Les triangles HPE et AEO sont donc égaux (un côté égal compris entre deux angles égaux).

$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{PH}$. H est donc l'image de P obtenu par une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Par translation, l'image d'un cercle est un cercle égal.

Le lieu de H est un cercle de rayon $\overline{OA}$ et de centre A.

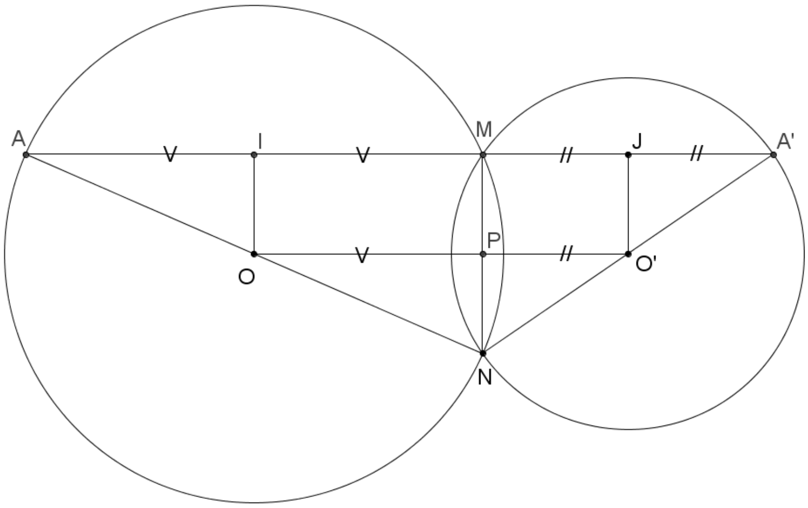
Le 22 aout 2009.

EXGSP147 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 1.

Deux cercles de centres respectifs O et O' ont deux points d'intersection : M et N, qui ne sont pas alignés ni avec O, ni avec O'. A partir du point M, on trace une droite parallèle à (OO') et qui coupe les deux cercles aux points A et A', respectivement.

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2. Calculer le rapport des longueurs OO'/AA'.
3. Calculer le rapport des aires du triangle (N, O, O') par celle du triangle (N, A, A')

Solution proposée par Nicole Berckmans



2) $\overline{OO'} = \frac{1}{2}\overline{AA'}$

1er dém : $\widehat{A'MN} = 1$ droit, d'où $A'O'N$ est diamètre.

Idem AON est diamètre. D'après le théorème de Thalès dans le triangle ANA': $\frac{\overline{OO'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{MN}} = \frac{1}{2}$

2ème dém : Par O on mène une perpendiculaire à la corde AM; J est le milieu de cette corde. Dans le triangle $IMPO$, $\overline{IM} = \overline{OP}$.

De même $\overline{PO'} = \overline{MJ}$; d'où $\overline{AA'} = 2\overline{OO'}$

3) Les deux triangles sont homothétiques, de rapport $1/2$. Dès lors, le rapport des aires$=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Le 5 juillet 2012.

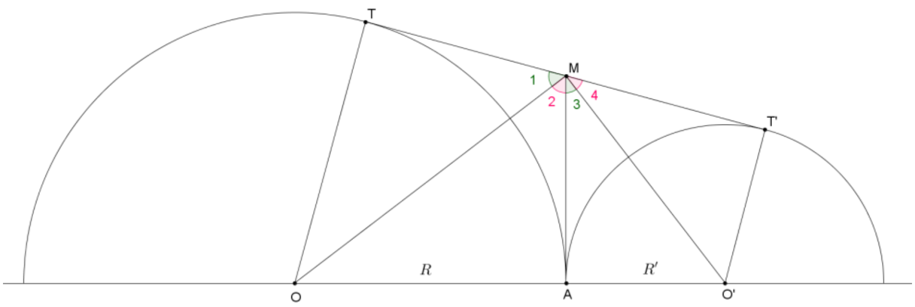
EXGSP148 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 1.

Deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R', respectivement, sont tangents extérieurement en un point A. on suppose que $R' < R$. On trace une droite (TT') qui est tangente commune extérieure aux deux cercles aux points T et T', respectivement. Soit un point M de (TT'), situé entre T et T', et tel que (MA) soit la tangente interne des deux cercles.

1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.
2) Calculer le rapport de distance MT / MT'.
3) Exprimer la distance MT en fonction de R et R' uniquement.

N.B. Pour les points 2 et 3, justifier les réponses en toute généralité. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



2) $\left.\begin{matrix} MT = MA \\ MT' = MA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{MT}{MT'} = 1$ car si d'un point on mène deux tangentes à un cercle elles ont la même longueur.

3) $M_1 = M_2$ et $M_3 = M_4 \Rightarrow M_2 + M_3 = 90°$.

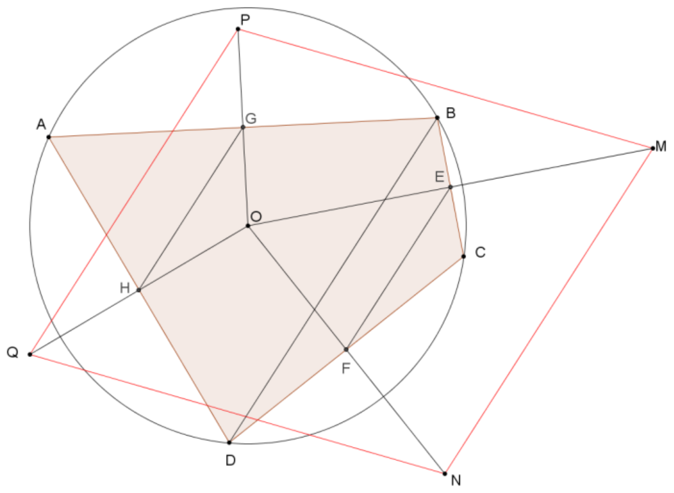
Dans le triangle rectangle MOO', MA est la hauteur issue de M sur l'hypothénuse d'où $\overline{MA}^2 = R.R'$. Cette relation se démontre en remarquant que les triangles AOM et AMO' sont semblables.

Finalement : $\overline{MT} = \overline{MT'} = \sqrt{R.R'}$

Le 16 aout 2009.

EXGSP149 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

On considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O. On note P, Q, R et S les points symétriques à O par rapport aux côtés respectifs de ce quadrilatère. Démontrer que $PQRS$ est un parallélogramme.



G est le milieu de OP puisque P est le symétrique de O et comme OP est perpendiculaire à la corde AB, G est aussi le milieu de AB. De même pour les points E, F et H.

Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Triangle } QOP : HG\,//\,QP \\ \text{Triangle } ABD : HG\,//\,DB \end{array}\right\} \Rightarrow QP\,//\,DB \\ \left.\begin{array}{l} \text{Triangle } MON : EF\,//\,NM \\ \text{Triangle } CDB : EF\,//\,DB \end{array}\right\} \Rightarrow EF\,//\,DB \end{array}\right\} \Rightarrow QP\,//\,EF$$

De même, on démontre, *mutatis mutandis*, que $QN/:PM$.

Dès lors le quadrilatère $PMNQ$ est un parallélogramme.

Le 30 aout 2012.