Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 17

EXGSP170 – EXGSP179

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Janvier 2015

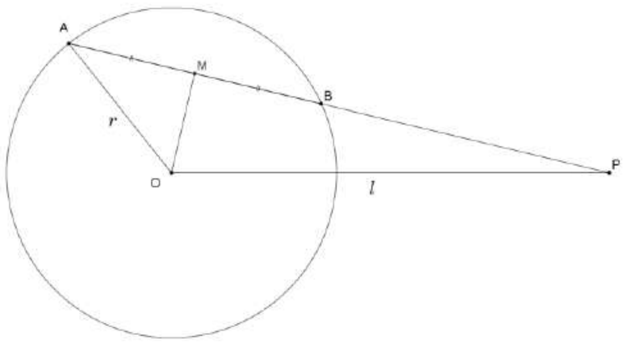
EXGSP170 FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

On considère deux points A et B appartenant à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et un point P situé que la droite AB. Démontrer l'égalité :

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = l^2 - r^2$$

où l et r désignent respectivement la longueur du segment $|PO|$ et r lr rayon de $\mathscr{C}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Notons M le milieu du segment $[AB]$. En appliquant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA})\end{aligned}$$

car on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Cette expression se développe en

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} \\ &= |PM|^2 - |MA|^2,\end{aligned}$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Dans les triangles rectangles PMO et AMO, le théorème de Pythagore fournit respectivement

$$|PM|^2 = |PO|^2 - |MO|^2$$

et

$$|MA|^2 = |OA|^2 - |MO|^2.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= |PO|^2 - |OA|^2 \\ &= \ell^2 - r^2.\end{aligned}$$

Note : C'est propriété définit la puissance d'un point par rapport à un cercle. Voir par exemple :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Puissance_d%27un_point_par_rapport_%C3%A0_un_cercle

---

Le 30 janvier 2015

EXGSP171 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1.

Un rectangle (A, B, C, D) est tel que la longueur du côté (AB) est $\frac{a}{2}$ et celle du côté a.

On considère un point E situé sur le côté (CD) à une distance x de C, et un autre point F sur le côté (DA) à une distance y de A. On cherche x et y tels que l'aire du rectangle (F, E, D) soit égale à la moitié de celle du polygone (A, B, C, E, F).

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Trouver la condition liant x, y et a.

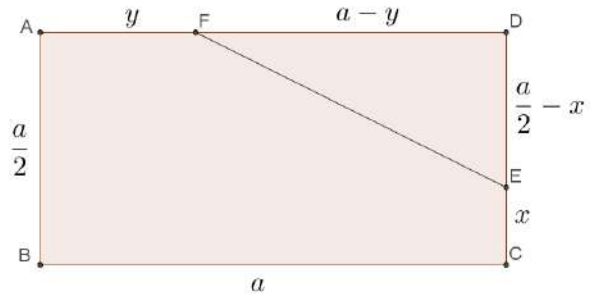
(3) Trouver l'ensemble des valeurs admissibles de (x, y).

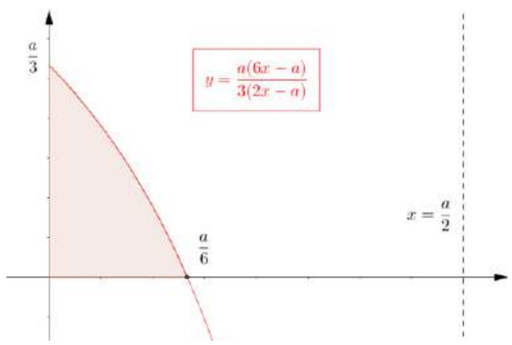
(4) Calculer - si elle existe - la valeur de y pour chacune des valeurs suivantes de x :

$0; \frac{a}{12}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}$

NB : des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans





$$S_{FED} = \frac{1}{2} S_{ABCEF} = \frac{1}{2}\left(S_{ABCD} - S_{FED}\right) \Rightarrow S_{FED} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$

On a alors : $\frac{1}{2}(a-y)\left(\frac{a}{2}-y\right) = \frac{1}{3}.a.\frac{a}{2} \Rightarrow 3(a-y)(a-2x) = 2a^2$

Ce qui donne finalement :

$$y = \frac{a(6x-a)}{3(2x-a)} \quad \text{avec} \quad x \in \left[0, \frac{a}{6}\right] \quad \text{et} \quad y \in \left[0, \frac{a}{3}\right]$$

Si $x = 0$ alors $y = \frac{a}{3}$

Si $x = \frac{a}{12}$ alors $y = \frac{a}{5}$

Si $x = \frac{a}{6}$ alors $y = 0$

Si $x = \frac{a}{3}$ alors c'est impossible.

Le 28 septembre 2015.

EXGSP172 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2.

Dans un plan euclidien, on considère une droite (d) et un point fixe A situé à une distance $t > 0$ de (d). (NB : l est la distance entre A et sa projection orthogonale sur (d). Un autre point M est tel que ses distances par rapport à (d) et A sont reliées par $MH = 2MA$, où H est la projection orthogonale de M sur (d). On note (Γ), le lieu des points décrit par M.

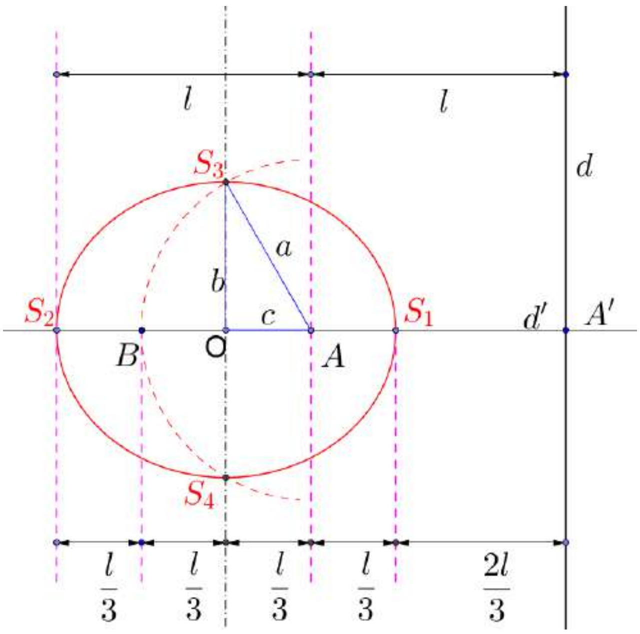
1. Illustrer par un dessin clair.
2. Montrer que (Γ) est une ellipse que l'on caractérisera en fonction de l uniquement.
3. Exprimer en fonction de l uniquement les valeurs maximale et minimale de la somme $(MA + MH)$.

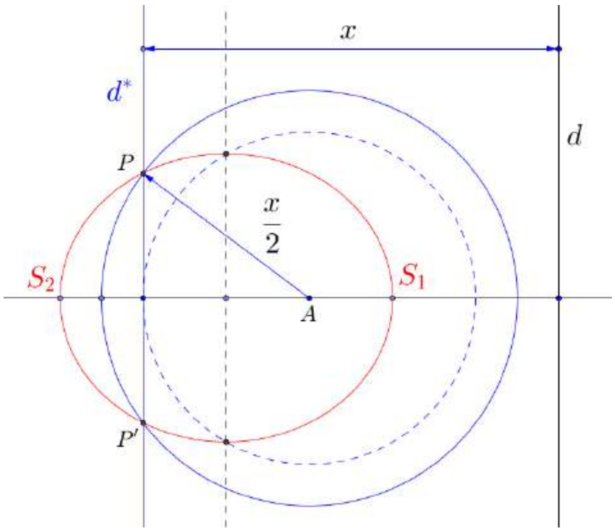
Solution proposée par Nicole Berckmans

Nous pouvons répondre à cette question de différentes façons.

1ère méthode : à l'aide d'un dessin.

2ème méthode : par la géométrie analytique





Par dessin

- Par A traçons la droite d' perpendiculaire à d.
- Sur cette droite nous trouvons déjà 2 points S_1 et S_2 du lieu cherché Γ.

$$\overline{S_1A} = \frac{l}{3} \qquad \text{et} \qquad \overline{S_1A'} = \frac{2l}{3}$$

$$\overline{S_2A} = l \text{ et} \qquad \overline{S_2A'} = 2l$$

- On peut trouver d'autres points du lieu. Il suffit de tracer une droite d^* parallèle à d et à distance x de d.

  Par A, on mène un arc de cercle de rayon $\frac{x}{2}$ qui coupe d^* en deux points P et P' du lieu de Γ.
- On voit apparaitre une ellipse de sommets S_1 et S_2 et de centre O milieu de S_1S_2.

$$\overline{S_1S_2} = \overline{S_2A} + \overline{AS_1} = l + \frac{l}{3} = \frac{4l}{3}$$

$$\overline{S_1O} = \overline{S_2O} = \frac{1}{2}\overline{S_1S_2} = \frac{2l}{3} = \frac{1}{2} \text{ grand axe } (= a)$$

- Par O menons une parallèle à d. Puisque $\overline{OA'} = \frac{4l}{3}$, par A menons un arc de cercle de rayon $\frac{2l}{3} = a$ qui coupe cette droite en S_3 et S_4 deux autres sommets.
- Nous en déduisons que A et B sont les foyers de cette ellipse :

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ où } a = \frac{2l}{3}, c = \frac{l}{3} \text{ et } b = \frac{\sqrt{3}l}{3}$$

EXGSP173 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Soient 4 points coplanaires P, Q, R, S tels que P, Q, R ne sont pas allignés.

On va prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QS} \qquad (2)$$

Les segments $[PS]$ et $[QR]$ ont le même milieu $\quad (3)$

Pour ce faire, prouvez indépendamment les implications suivantes :

a) La propriété (1) implique la propriété (2);

b) La propriété (2) implique la propriété (3);

c) La propriété (3) implique la propriété (1);

Solution proposée par Dominique Druez

a)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$

Ajouter $\overrightarrow{QR}$ de chaque côté de l'égalité
Commutativité de l'addition vectorielle
Appliquer la relation de Chasles

b)

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$

Soit M le milieu du segment [PS] : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{SM}$

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SM}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QM} \rightarrow M \text{ est le milieu de } [PQ]$

Additionner les égalités membre à membre
Commutativité de l'addition vectorielle
Appliquer la relation de Chasles

c)

Soit M le milieu du segment [PS] : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS}$

et le milieu du segment [QR] : $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{RM}$

$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MS}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Additionner les égalités membre à membre
Commutativité de l'addition vectorielle
Appliquer la relation de Chasles

Le 10 octobre 2015.

EXGSP174 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Soient $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ trois cercles coplanaires de même rayon a et de centres respectifs P, Q, R passant tous trois par un point commun S. Soient T, U, V trois autres points où les cercles se coupent deux à deux ($\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupant en T, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupant en U, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ se coupant en V).

On va montrer que les points T, U, V sont sur un même cercle de rayon A. Pour ce faire on va utiliser les propriétés suivantes:

Propriété 1. Un quadrilatère $ABCD$ est un losange si et seuelement si

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$$

Propriété 2. Si $ABCD$ est un losange, alors

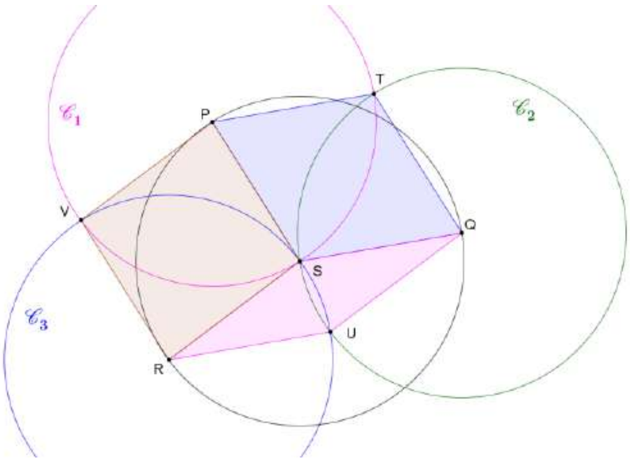
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

a) Montrez que $PTQS, QURS$ et $RVPS$ sont des losanges.

b) Montrez que $PTWV$ est un losange de côté a, où W est le points tel que $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{VW}$.

c) Montrez que $QTWU$ est un losange de côté a.

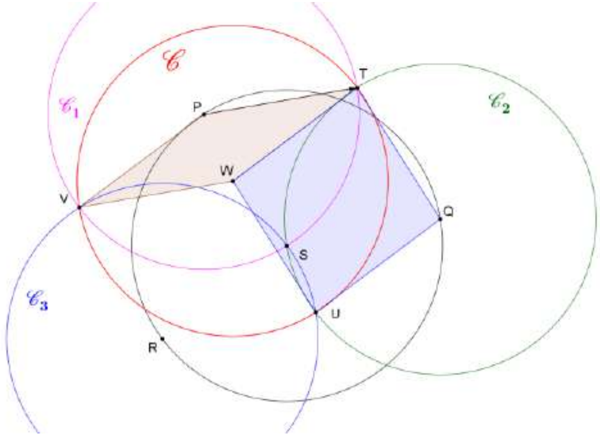
d) Déduisez des points b) et c) que les points T,U,V sur un même cercle de rayon a, et identifiez le centre de ce cercle.



a) S est situé à une distance a des trois centres P, Q et R. Les trois cercles ont donc un même rayon a. On en déduit que :

$$|PT| = |TQ| = |QS| = |SP| = |SR| = |RV| = |VP| = |RU| = |UQ|$$

En vertu de la propriété 1, les quadrilatères $PTQS, QURS$ et $RVPS$ sont des losanges.



b) $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{VW}$ par construction. En développant $\overrightarrow{PT}$, on a

$\overrightarrow{PV} + \cancel{\overrightarrow{VW}} + \overrightarrow{WT} = \cancel{\overrightarrow{VW}} \Rightarrow \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{WT}$

En vertu de la propriété 2, $PTWV$ est donc un losange de côté a.

c) De a), on déduit que : $\overrightarrow{VP} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UQ}$ et de b) que : $\overrightarrow{UQ} = \overrightarrow{WT}$.

$QTWU$ est donc un losange de côté a.

d) On a alors : $|WV| = |WU| = |WT| = a$.

Les points $V, U\ T$ sont donc équidistants de W et sont donc situé sur un cercle de centre W et de rayon a.

Le 5 octobre 2015.

EXGSP175 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2008.

Pour cette question, les méthodes de la géométrie synthétique seront à appliquer.

1. Dans le système de référence orthonormé OXY, on considère la circonférence (γ_1) de rayon R et de centre C_1 dont les coordonnées (x, y) sont $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$.

   Soit t la tangente à cette circonférence qui passe par un point B quelconque de cette circonférence (pour que la figure soit claire, il est conseillé de choisir ce point B au voisinage du milieu de l'arc formé des points dont les abscisses et les coordonnées sont positives). cette tangente t coupe l'axe OY en un point J.

   Soit une circonférence (γ_2) de centre C_2 qui passe par les 3 points O, B et J.

   Soit J l'une des extrémités d'un diamètre de (γ_2) : **on demande de déterminer quelle est l'autre extrémité de ce diamètre**.

2. Dans la même figure, joignons ensuite O à B par un segment et traçons le diamètre d'extrémités U et V de (γ_2), parallèle à ce segment OB et passant par C_2.

   Appelons K et L les projections orthogonales de C_1 respectivement sur OB et sur UV.

   Appelons M et N les projections orthogonales de J respectivement sur OB et sur UV.

   On demande de démontrer que OK = BM.

3. Supposons à présent que B soit un point variable sur la circonférence (γ_1).

   Déterminer alors pour quelle valeur particulière de OJ l'aire de la circonférence (γ_2) vaut le quadruple de l'aire de la circonférence (γ_1).

   [Rappelons qu'il est imposé que $OC_1 = \frac{R}{2}$]

   Dans ce cas, considérons une ellipse dont l'un des axes est OJ et dont l'aire est égale à celle de (γ_2). **Quelle est la grandeur de l'autre axe de cette ellipse** (à exprimer en fonction du rayon R de (γ_1)?

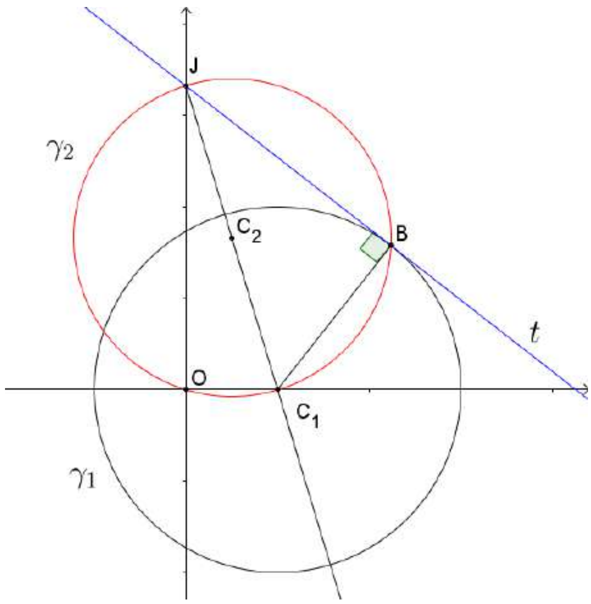
4. Supposons que B soit un point variable sur la circonférence de centre C_1 et de rayon R. Ses variations seront toutefois limitées de telle sorte que les abscisses de ce point B soient ≥ 0. En ce cas, le point d'intersection J de la tangente en B à cette circonférence avec l'axe OY est aussi un point variable et le triangle OC_1J est, par conséquent, un triangle variable. **On demande d'établir quels sont les lieux :**

   1°. du centre de gravité du triangle variable OC_1J;

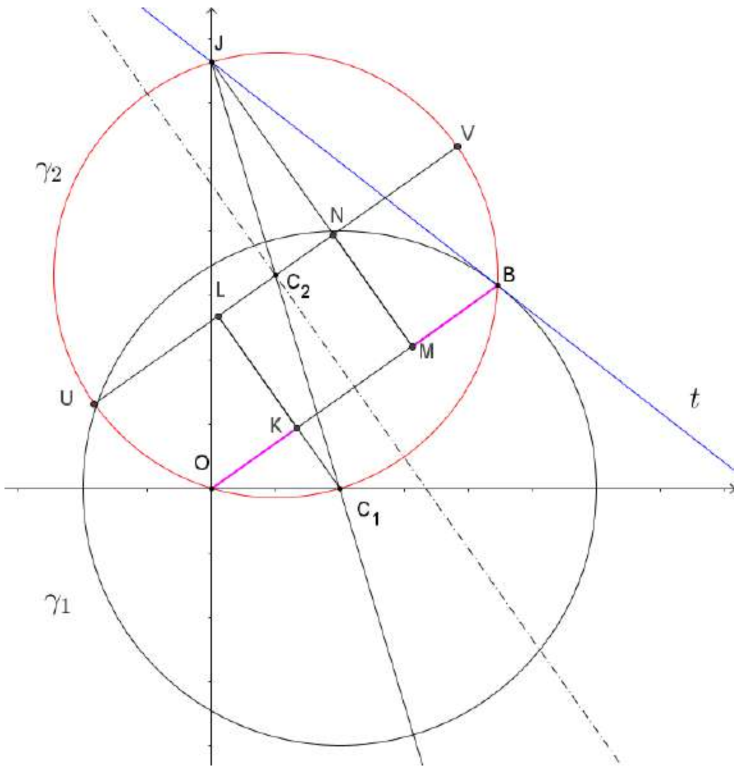
   2°. du centre de la circonférence circonscrite au triangle variable OC_1J;

   3°. du centre de la circonférence inscrite au triangle variable OC_1J;

   4°. de l'orthocentre du trianle variable OC_1J.



1) Je dis que C_1 est l'extrémité du diamètre de γ_2 issu de J. En effet, C_1B est un rayon de γ_1. Le triangle JC_1B est donc rectangle et JC_1 est un diamètre de γ_2.

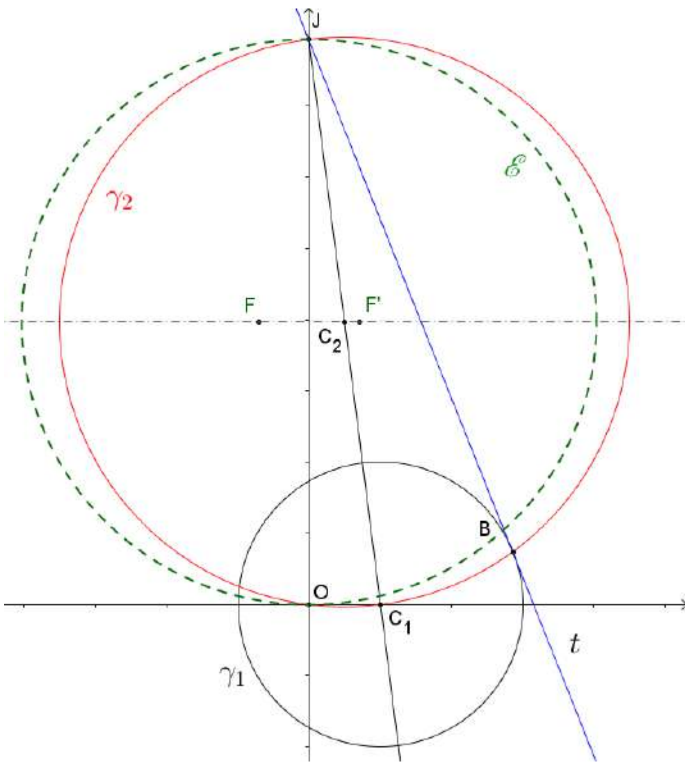


2) C_2 est le milieu de LN car les triangles rectangles C_2LC_1 et C_2NJ sont égaux.

$$\text{car}\begin{cases}\overline{C_2J}=\overline{C_1C_2} & \text{rayons de } \gamma_2\\ JN\,//\,LC_1 & \text{par construction}\\ JC_2N=LC_2C_1 & \text{angles opposés par le sommet}\end{cases}$$

Par C_2 traçons la perpendicualire p à UV. p coupe OB en son milieu car OB est une corde de γ_2 et $p \perp OB$.

Par conséquent, K est l'image de M selon la symétrie orthogonale d'axe p. De même O est l'image de B. L'image du segment MB est donc OK et comme la symétrie orthogonale conserve les longueurs, on a : $\overline{OK}=\overline{BM}$



3) Si l'aire de γ_2 est égale à 4 aires de γ_1, alors $\overline{C_2C_1}=2R$.

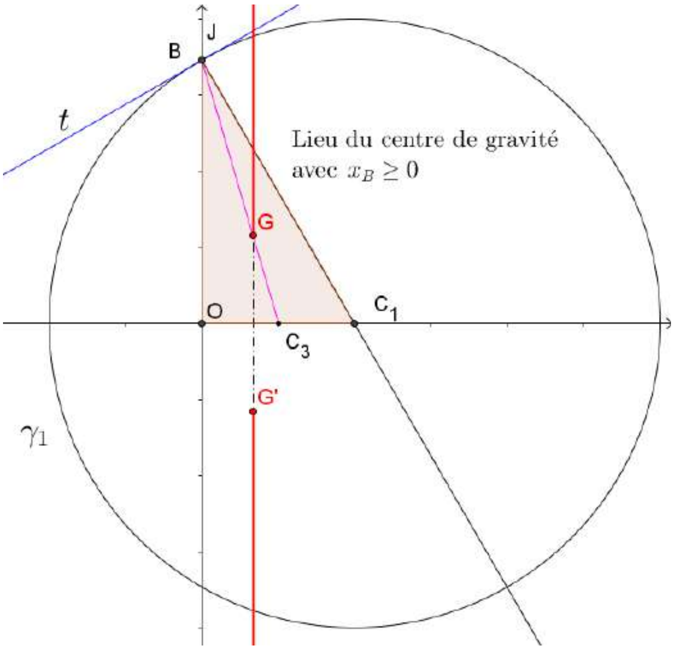
Dans le triangle rectangle JOC_1, on a alors $\overline{OC_1}^{\,2}+\overline{OJ}^{\,2}=\overline{JC_1}^{\,2}$

$$\Rightarrow \overline{OJ}^{\,2}=4R^2-\frac{R^2}{4}\Rightarrow \boxed{\overline{OJ}=\frac{3R\sqrt{7}}{2}\approx 3.9686R}$$

Si l'aire de l'ellipse $\mathscr{E}$ est égale à l'aire de γ_2, on a : $\pi.a.b=4\pi R^2$,

où a et b sont les demi-grands axes de l'ellipse et avec $a=\dfrac{\overline{OJ}}{2}$

$$\Rightarrow b=\frac{4\pi R^2}{\pi\dfrac{3R\sqrt{7}}{4}}=\boxed{\frac{16\sqrt{7}}{21}R\approx 2.0158R}$$



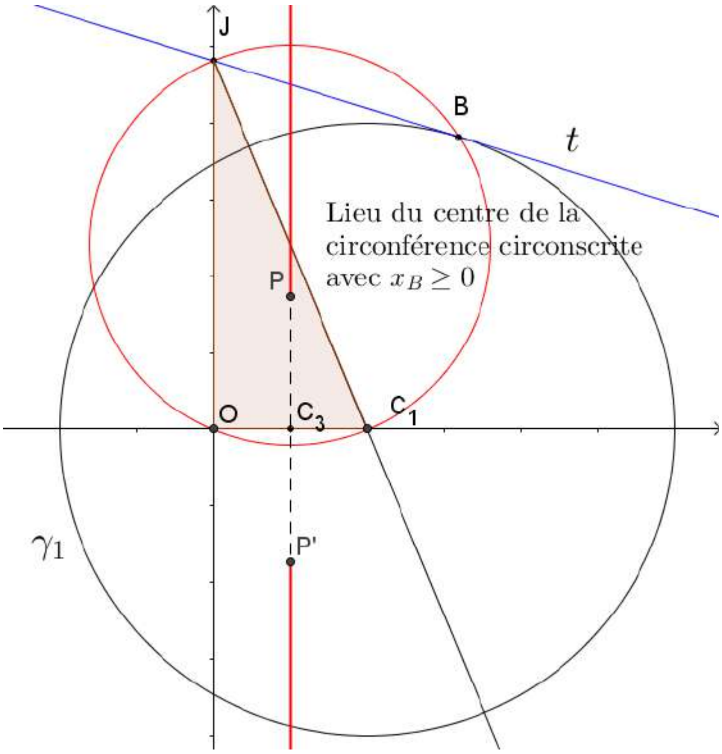
4.1) <u>Lieu du centre de gravité</u>

G est le point d'intersection des médiane. G est donc l'image de J selon l'homothètie de centre C_3, milieu de OC_1, et de rapport 1/3. Le lieu de J étant l'axe de y, le lieu de G est une droite parallèle à l'axe des y et d'équation : $x = R/6$.

Les positions extrèmes de G sont obtenues quand B et J sont confondus.

Si y_B est positif, on a $\overline{OJ} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_G = \frac{R\sqrt{3}}{6}$

Si y_B est négatif, alors $y_G = -\frac{R\sqrt{3}}{6}$



4.2) <u>Lieu du centre des cercles circonscrits</u>

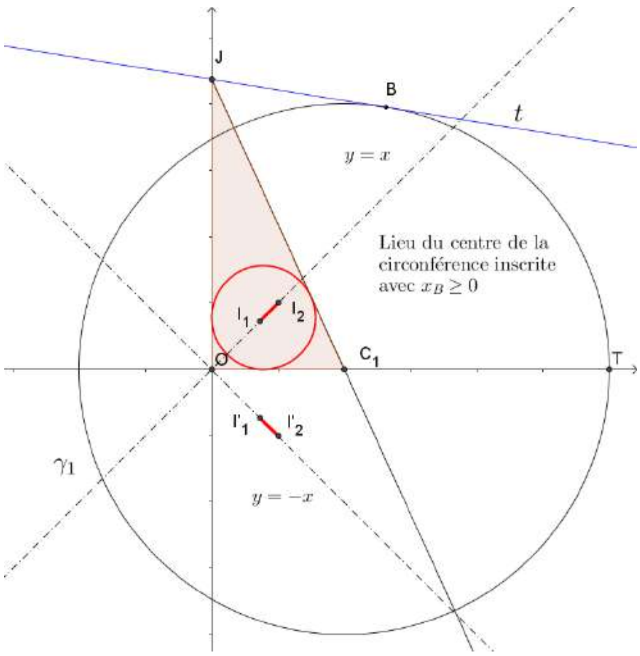
Le centre du cercle circonscrit au triangle est le point de rencontre des médiatrices.

Le lieu du centre P des cercles est donc la médiatrice de OC_1 d'équation $y = R/4$.

En effet, cette médiatrice est indépendante de la position de B sur le cercle γ_1.

Les positions extrèmes de P obtenues pour $B \equiv J$ sont $y_B = \dfrac{\overline{OJ}}{2}$ avec

$$\overline{OJ} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{R}{4}, \frac{R\sqrt{3}}{4}\right) \text{ et } P'P = \left(\frac{R}{4}, -\frac{R\sqrt{3}}{4}\right)$$



4.3) <u>Lieu du centre du cercle inscrit</u>

Le centre du cercle inscrit est le point de rencontre des bissectrices.

Le lieu est donc les bissectrices d'équation $y = x$ $(\text{si } x_B > 0)$ et $y = -x$ $(\text{si } x_B < 0)$ qui sont indépendantes de la position de B sur γ_1.

Cherchons les positions extrêmes du centre I.

Si $y_B > 0$

$*$ Si $B \equiv J$, le rayon du cercle inscrit au triangle rectangle OC_1J est donné par

$$r = \frac{\overline{OJ} + \overline{OC_1} - \overline{JC_1}}{2} = R\frac{\sqrt{3}/2 + 1/2 - 1}{2} = R\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

(Voir référence ci-dessous pour la justification de la formule)

On déduit les coordonnées de $I_1 = \left(R\frac{\sqrt{3}-1}{4}, R\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$

$*$ Si $B \equiv T$, alors J est envoyé à l'infini $\Rightarrow I_2 = \left(\frac{R}{4}, \frac{R}{4}\right)$

Si $y_B < 0$, par simple symétrie, on obtient

$$I_1^{'} = \left(R\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -R\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) \text{ et } I_2^{'} = \left(\frac{R}{4}, -\frac{R}{4}\right)$$

4.3) <u>Lieu de l'orthocentre</u>

Le lieu est simplement le point O, point de rencontre des hauteurs OJ et OC_1.

Calcul du rayon du cercle circonscrit à un triangle rectangle : http://le-castillon.etab.ac-caen.fr/sites/le-castillon.etab.ac-caen.fr/IMG/pdf/Calcul_du_rayon_du_cercle_inscrit_a_un_triangle_rectangle.pdf

Le 30 janvier 2016

EXGSP176 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015

Un triangle (A,B,C) est rectangle en C. On trace la bissectrice de l'angle B, qui coupe le côté (C,A) au point O. On trace un cercle de centre O et de rayon OC. La demi-droite $[BO)$ coupe le cercle aux points P et Q (dans le sens B à O, se trouvent dans l'ordre : B,P,O et Q).

1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

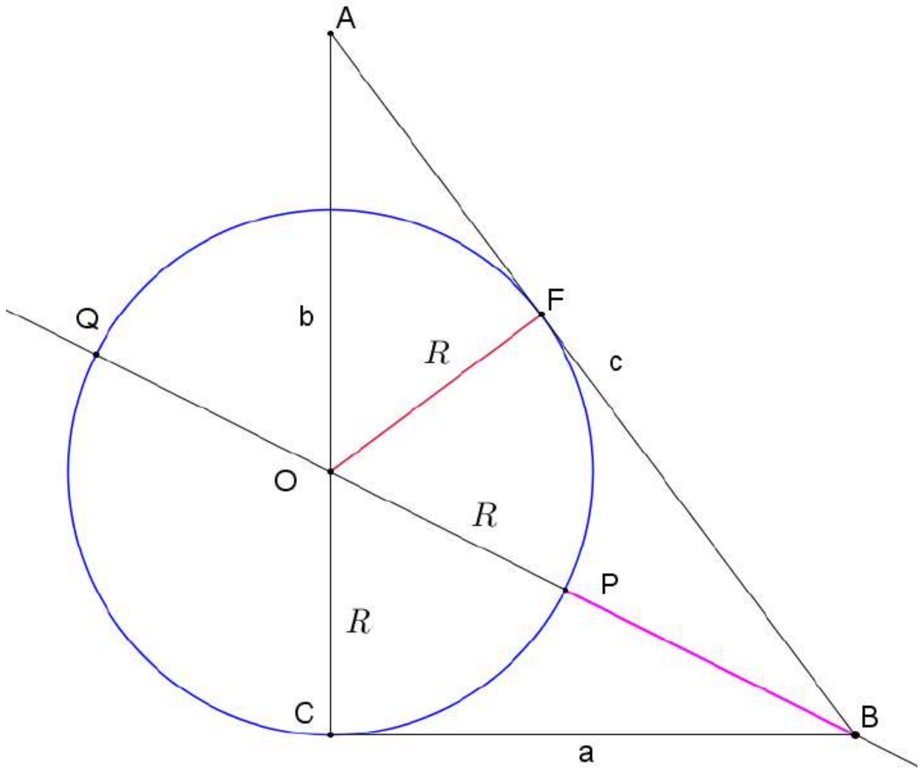
2) Caractériser l'intersection entre le cercle et le côté (A,B).

3) Exprimer le rapport de distances $\dfrac{PQ}{BP}$ en fonction des longueurs BC et CA uniquement.

4) Application : calculer le rapport $\dfrac{PQ}{BP}$ pour $BC=3$ et $CA=4$.

NB: (i) Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration;

(ii) Justifiez vos réponses.



Désignons $\overline{CB}$ par a et $\overline{CA}$ par b.

a) Tout point de la bissectrice de B est équidistant des côtés CB et AB. Par conséquent, O est à même distance de CB et de AB. Le cercle de centre O et de rayon $\overline{OC} = R$ est donc tangent à AB. Soit F le point de tangence. OF est perpendiculaire à AB et $\overline{CB} = \overline{FB} = a$

b) Dans le triangle rectangle OCB, on a :

$$\left(R + \overline{PB}\right)^2 = R^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = \sqrt{R^2 + a^2} - R \qquad (1)$$

Exprimons que l'aire du triangle ABC est la somme des aires de plusieurs triangles rectangles :

$$\Delta_{ABC} = 2\Delta_{OCB} + \Delta_{OFA} \Rightarrow \frac{ab}{2} = 2\frac{aR}{2} + \frac{R.\overline{AF}}{2} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{a\left(b - 2R\right)}{R} \qquad (2)$$

Appliquons Pythagore dans le triangle rectangle OFA

$$\left(b - R\right)^2 = R^2 + \overline{AF}^{\,2} \quad \Rightarrow \overline{AF}^{\,2} = b\left(b - 2R\right) \qquad (3)$$

On élimine $\overline{AF}$ entre (2) et (3). Après simplification et réarrangement, on obtient une équation du second dégré en R dont on ne retient que la solution positive.

$$bR^2 + 2a^2R - a^2b = 0 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^4 + a^2b^2} - a^2}{b} = \frac{1}{b}\left(ab\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - a\right)$$

$$= a\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - \frac{a}{b}\right) = a\left(\beta - \alpha\right) \qquad (4)$$

où on a posé : $\alpha = \dfrac{a}{b}$ et $\beta = \sqrt{\alpha^2 + 1}$

On peut maintenant calculer le rapport demandé à partir de (1) et (4), et en multipliant et divisant par le binôme conjugué du dénominateur:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = \frac{2R}{\sqrt{R^2 + a^2} - R} = \frac{2R}{a^2}\left(\sqrt{R^2 + a^2} + R\right)$$

$$= \frac{2a\left(\beta - \alpha\right)}{a^2}\left(\sqrt{a^2\left(\beta - \alpha\right)^2 + a^2} + a\left(\beta - \alpha\right)\right)$$

On met $a\left(\beta - \alpha\right)$ en évidence dans le deuxième facteur et on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = 2\left(\beta - \alpha\right)^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\beta - \alpha\right)^2}} + 1\right)}$$

Application: $\begin{cases} \overline{BC} = a = 3 \\ \overline{AC} = b = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2 + 1} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \beta - \alpha = \dfrac{1}{2}$

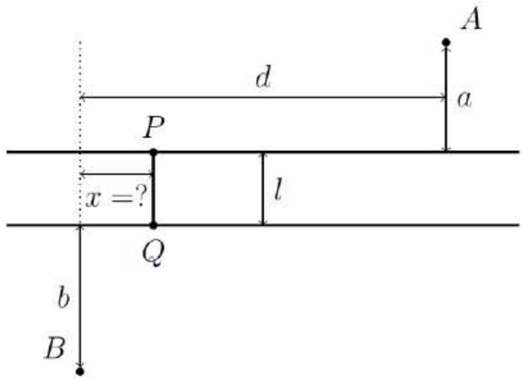
$\Rightarrow \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ C'est le nombre d'or.

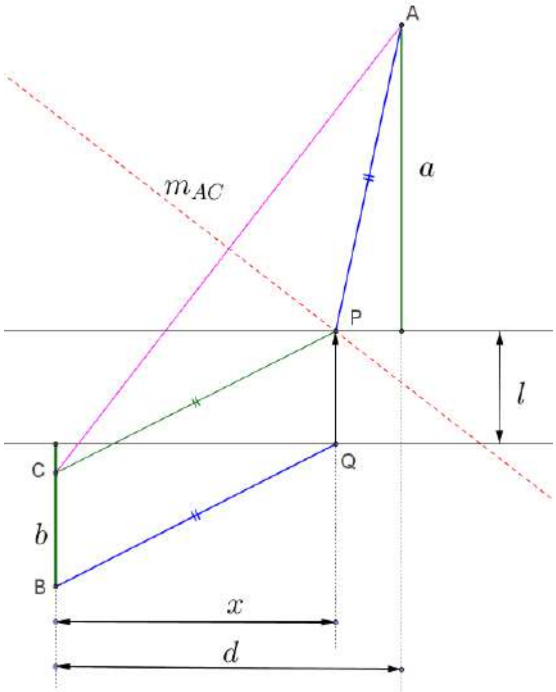
EXGSP177 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Deux villes A et B sont séparées par une rivière rectiligne de largeur l, située à une distance a de A et b de B. Les droites perpendiculaires à la rivière abaisées de A et B sont éloignées d'une distance d. On souhaite placer un pont perpendiculaire à la rivière reliant un point P de la berge du côté de A à un point Q de la berge du côté de B, de sorte que la distance entre A et P soit égale à la distance entre B et Q.

a) Calculer la distance x entre le pont et la perpendiculaire à la rivière abaissée de B, en focntion de a, b, d et l.

b) Prouvez que le point P doit se trouver sur la médiatrice du segment $[AC]$, où C est le point tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QP}$





a) On doit avoir $\overline{BQ} = \overline{PA}$ ou encore $\overline{BQ}^2 = \overline{PA}^2 \Rightarrow b^2 + x^2 = (d-x)^2 + a^2$

$$\Rightarrow x = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2d} \quad \text{qui est donc indépendant de } l$$

b) Soit C image de B selon la translation de vecteur $\overrightarrow{QP}$. Traçons BC.

Le quadrilatère $BCPQ$ est un parallèlogramme puisque $\overline{BC} = \overline{QP}$ et que $BC // QP$

$\Rightarrow \overline{BQ} = \overline{CP}$

Or P est positionné de façon à ce que $\overline{BQ} = \overline{PA}$.

Par conséquent, $\overline{PA} = \overline{CP}$ et P est donc situé sur la médiatrice du segment $[AC]$

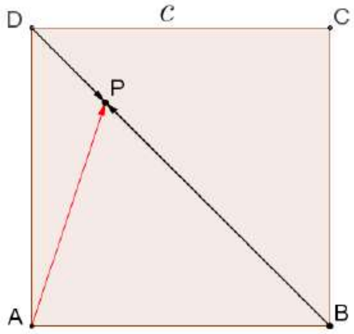
Le 30 janvier 2015

EXGSP178 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. On note c la longueur de chacun des côtés de ce carré. Démontrer l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DP} = \left\| \overrightarrow{AP} \right\| - c^2$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : **http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/**



Vu la propriété d'orthogonalité entre côtés et entre diagonales du carré, on a successivement:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{AP} \; + \; ||\overrightarrow{AP}||^2 \\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 \; - \; \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 \; - \; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 \\
&= ||\overrightarrow{AP}||^2 - c^2.
\end{aligned}$$

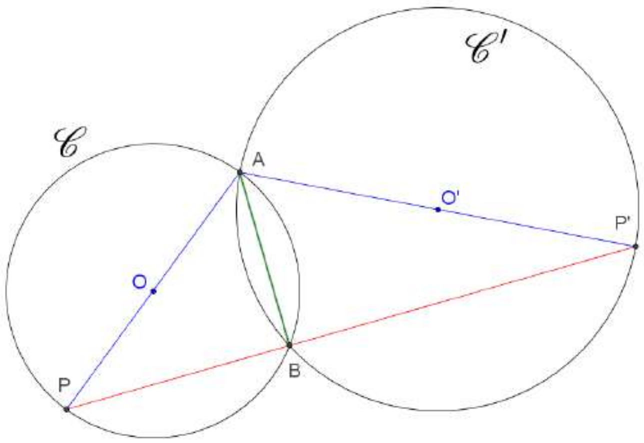
Le 30 janvier 2015

EXGSP179 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupant en deux points distincts A et B. On note P le point diamètralement opposé à A sur $\mathscr{C}$, et P' le point diamètralement opposé à A sur $\mathscr{C}'$.

Démontrer que les points P, B et P' sont alignés.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$, dont le segment $[AP]$ est un diamètre. Le triangle ABP étant inscrit dans un demi-cercle, il est rectangle en B, ce qui signifie que l'angle $\widehat{ABP}$ est droit. Par un raisonnement similaire dans le cercle $\mathcal{C}'$, dont $[AP']$ est un diamètre, on obtient que l'angle $\widehat{ABP'}$ est également droit. Les points P et P' appartiennent donc tous deux à la droite perpendiculaire à AB passant par B. Les trois points P, B, et P' sont donc bien situés sur une même droite.

Le 15 janvier 2016