Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 19

EXGSP190 – EXGSP199

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXGSP190 FACSA, ULiège, Liège, juillet 2017.

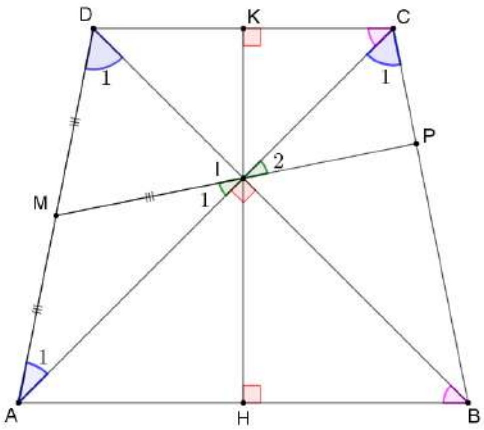
On donne un trapèze $ABCD$, avec $AB \parallel CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze sont de même longueur et secoupent à angle droit. Leur intersection est notée I.

(a) Démontrer que les segments $[AI]$ et $[BI]$ sont de même longueur.

(b) Calculer $|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2$ en fonction de $|AD|$.

(c) Si l'on note M le milieu de $[AD]$, démontrer que IM est perpendiculaire à BC.

Solution proposée par Robert Moulan



(a) Les triangles AIB et CID sont semblables car ils ont 2 angles égaux chacun à chacun :

$AIB = CID = 1$ dr et $IBA = IDC$ (angles alternes-internes...). D'où la proportion

$\dfrac{AC}{CI} = \dfrac{BD}{ID}$ or $AC = BD$ par hypothèse donc $CI = ID$ et par conséquent $IA = IB$ c-à-d que les triangles rectangles AIB et CID sont isocèles et les angles à la base mesurent 45°.

Il résulte de tout ceci que le trapèze donné $ABCD$ est isocèe et nous appellerons HK son axe de symétrie.

(b) Calculer $S = AD^2 + DC^2 + CB^2 + BA^2$ en fonction de AD.

Puisque le trapèze est isocèle, on a $S = 2AD^2 + AB^2 + CD^2$

Dans le triangle AIB, rectangle et isocèle : $AB^2 = 2AI^2 = 2\underbrace{\left(AD^2 - BI^2\right)}_{\text{triangle rect } ADI} = 2AD^2 - 2DI^2$

Or $2DI^2 = CD^2$ (triangle CID rect et isocèle) $\Rightarrow AB^2 = 2AD^2 - CD^2$

Ainsi $AB^2 + CD^2 = 2AD^2$ et finalement $S = 2AD^2 + 2AD^2 = 4AD^2$

(c) Raisonnement sur le figure.

Posons $\widehat{C_1} = \gamma$. On a $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (symétrie d'axe HK)

$\widehat{A_1} = 90° - \widehat{D_1} = 90° - \gamma$ (trg rect DIA)

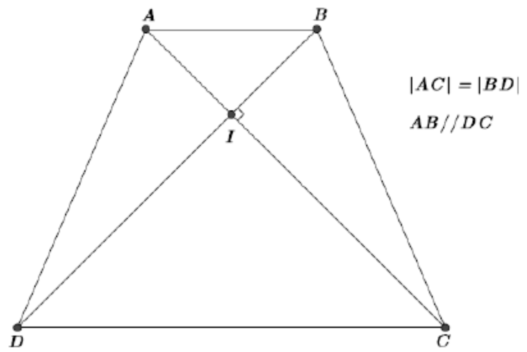
$\widehat{I_1} = \widehat{A_1} = 90° - \gamma$ (dans un trg rect, la médiane relative à l'hypoténuse en vaut la moitié, et donc le triangle AMI est isocèle)

$\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (angles opposés par le sommet)

Dans le triangle IPC, on a donc : $\widehat{P} = 180° - \widehat{C_1} - \widehat{I_2} = 180° - \gamma - \left(90° - \gamma\right) = 90°$.

MP est perpendiculaire à BC.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : **http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/**



- *Méthode "synthétique":*

  (a) Les droites AB et CD étant parallèles, par le théorème de Thalès, on obtient
  $$\frac{|AI|}{|AC|}=\frac{|BI|}{|BD|}.$$
  Etant donné que l'on a $|AC|=|BD|$ par hypothèse, on en déduit immédiatement $|AI|=|BI|$.
  Notons que, les diagonales du trapèze étant égales, cette égalité implique $|DI|=|CI|$. Les triangles AIB et DIC sont donc tous deux isocèles. Cette propriété sera exploitée dans la suite de la résolution.

  (b) En utilisant la formule de Pythagore, on a
  $$|AB|^2=|AI|^2+|IB|^2, \quad |DC|^2=|DI|^2+|IC|^2.$$
  Par ailleurs, les triangles AID et BIC étant isométriques (parce qu'ils possèdent un angle égal compris entre deux côtés égaux), on obtient
  $$|BC|=|AD|.$$

  (c) Les triangles DAB et CAB ayant leurs côtés égaux sont isométriques et donc la mesure de leurs angles est la même. Notons γ la mesure de l'angle formé par les segments DA et DB; c'est aussi la mesure de l'angle formé par les segments CA et CB.
  Cela étant, dans le triangle AID rectangle en I, on a $|AM|=|MI|$. Il s'ensuit que le triangle AMI est isocèle. Notons δ la mesure commune de deux angles de celui-ci. En utilisant encore le fait que le triangle AID est rectangle, on obtient $\delta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. Si on désigne par H l'intersection des droites BC et IM, on obtient alors le triangle IHC dont les mesures de deux angles sont δ et γ. Il s'ensuit qu'il est rectangle en H et IM est bien perpendiculaire à BC.

  Il s'ensuit que
  $$\begin{aligned}&|AD|^2+|DC|^2+|CB|^2+|AB|^2\\ &\quad= 2|AD|^2+\left(|AI|^2+|DI|^2\right)+\left(|IB|^2+|IC|^2\right)\\ &\quad= 4|AD|^2.\end{aligned}$$

- *Méthode analytique pour les points (b) et (c):*

  Choisissons les axes du repère de telle sorte que l'origine soit le point I, l'axe X la droite IC et l'axe Y la droite IB. Cela étant, les triangles AIB et DIC étant isocèles (cf. point (a) de la méthode"synthétique"), les coordonnées des points A, B, C, D sont données par

$$A(-r,0),\ \ B(0,r),\ \ C(r',0),\ \ D(0,-r')$$

  où r, r' sont des réels strictement positifs. On a donc

$$|AD|^2 = r^2 + r'^2$$

  et

$$\begin{aligned}&|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2\\ &\quad = \ (r^2 + r'^2) + \ 2r'^2 \ + \ + (r^2 + r'^2) \ + \ 2r^2\\ &\quad = \ 4|AD|^2.\end{aligned}$$

  Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2\\ &\quad = \ 2|AD|^2 + \big(|AI|^2 + |DI|^2\big) + \big(|IB|^2 + |IC|^2\big)\\ &\quad = \ 4|AD|^2.\end{aligned}$$

Pour établir le dernier point (c), on remarque que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour composantes $\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r'}{2}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes $(r', -r)$. Il s'ensuit que leur produit scalaire vaut

$$\frac{1}{2}\left(-r.r' + r'.r\right) = 0,$$

ce qui démontre que IM est perpendiculaire à BC.

Le 9 septembre 2016

EXGSP191 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Soit un carré de côté a dont on baptise les sommets A, B, C et D en suivant le sens horloger.
Sur chaque sommet, on centre un cercle de rayon a, ce qui définit un total de 4 cercles.
A l'intérieur du carré, ces quatre cercles génèrent quatre intersections que l'on nomme E, F
G et H, de telle sorte que E soit le point le plus éloigné du segment $\overline{BC}$, F du segment $\overline{AB}$, G du segment $\overline{AD}$ et H du segment $\overline{CD}$.
Ces quatre points sont les sommets d'une forme géométrique particulière, notée $\mathscr{G}$, déterminée par les quatre arcs de cercle reliant ensemble E, F, G et H.

(1) Illustrez l'énoncé par un dessin clair et précis[1].

(2) Démontrez que $\overline{EF} = \overline{AE}$ et calculez le périmètre de $\mathscr{G}$ en fonction de a.

Périmètre de $\mathscr{G}$ =

(3) Calculez l'aire de la forme géométrique $\mathscr{G}$ en fonction[2] de a.

Aire de $\mathscr{G}$ =

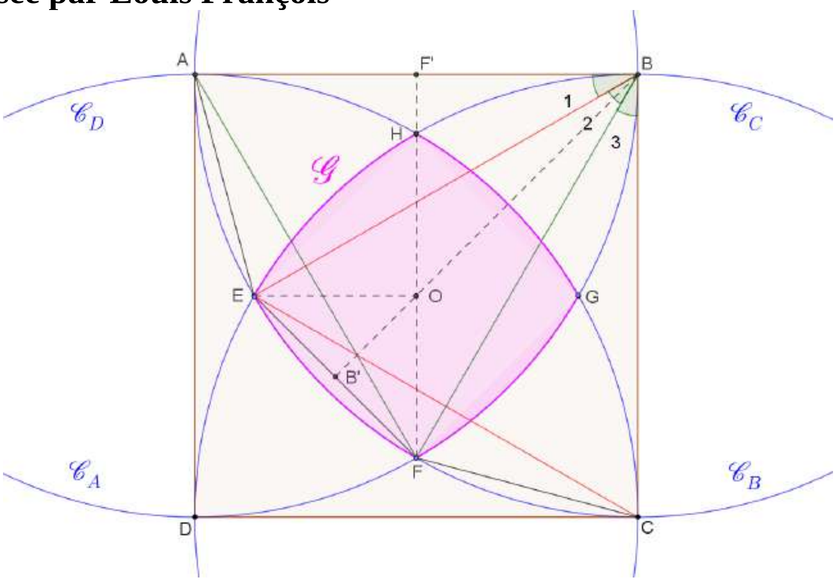
N.B. Veillez à justifier vos développements et mentionnez toutes les propriétés géométriques utilisées. des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration. Veuillez inscrire vos réponses dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires (indiquez y votre nom/prénom)

---

[1] Il n'est pas nécessaire de tracer les parties de cercles situées en dehors du carré.

[2] Si vous obtenez des sinus et cosinus dans votre réponse finale, il n'est pas obligatoire de les faire disparaître.

Solution proposée par Louis François



(1) AE et EF sont deux arcs de rayon a centrés en B. Si $B_1 = B_2$, alors les arcs engendrés ont même longueur et les cordes sous-tendues également : $\overline{AE} = \overline{EF}$.

En effet, car $B_1 + B_2 + B_3 = 90°$ et

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta(ABF) \text{ est équilatéral de côté } a : \widehat{B_1 + B_2 = 60°} \Rightarrow \widehat{B_3 = 30°} \\ \Delta(BEC) \text{ est équilatéral de côté } a : \widehat{B_2 + B_3 = 60°} \Rightarrow \widehat{B_1 = 30°}\end{array}\right. \Rightarrow \widehat{B_1 = B_2 = B_3 = 30°}$$

(2) La longueur de $\widehat{EF = \frac{\pi}{6}a}$ car c'est un arc d'un cercle de rayon a et d'angle au centre $\frac{\pi}{6}$.

On peut recommencer à partir e chaque commet du carré ou invoquer des symétries : chaque arc composant $\mathscr{G}$ à la même longueur.

Périmètre de $\mathscr{G}$ - $\frac{4}{6}\pi a = \frac{2}{3}\pi a$

(3) Soit X_1 : l'aire du $\Delta(OFE)$

X_2 : l'aire de la lunule $(\widehat{EFE)}$

X_3 : l'aire du secteur circulaire $(B\widehat{EF)}$

X_4 : l'aire du triangle isocèle $\Delta(BEF)$

On a $X_3 - X_4 = X_2$ et l'aire de $\mathscr{G} : \mathscr{A}_G = 4(X_1 + X_2)$

· Calcul de $X_3 : X_3 = \frac{\pi a^2}{12}$ Aire d'un secteur circulaire de rayon a et d'angle au centre $\frac{\pi}{6}$

· Calcul de X_4 : Soit B' la projection orthogonale de B sur EF.

$$\overline{BB'} = a\cos\frac{\pi}{12}, \overline{EF} = 2\overline{EB'} = 2a\sin\frac{\pi}{12}$$

$$X_4 = \frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{BB'} = \frac{1}{2}2a^2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a^2}{4}$$

· Calcul de $X_2 = X_3 - X_4 = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}(\pi - 3)$

· Calcul de X_1 : Soit F' la projection orthogonale de F sur AB

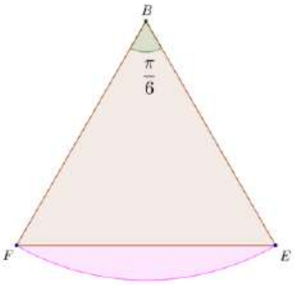
FF' : hauteur dans le triangle équilatéral $\Delta(BFA)$ de côté a.

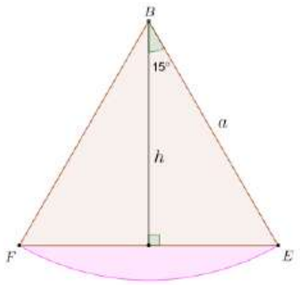
$$FF' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{FO} = \overline{FF'} - \overline{OF'} = \overline{FF'} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2 = \frac{a^2}{4}(2-\sqrt{3})$$

Finalement : $X_1 + X_2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow \mathscr{A}_G = a^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$

Solution proposée pour la question 3 par Nicole Berckmans





Aire de $\mathscr{G} : \mathscr{A}_G =$ aire du carré $(EFGH) + 4($aire secteur$(BEF) -$aire du triangle $(BEF))$

$\overline{EF} = 2a\sin 15°$

aire du carré $(EFGH) = \overline{EF}^2 = 4a^2\sin^2 15° = 4a^2\dfrac{1-\cos 30°}{2} = a^2\left(2-\sqrt{3}\right)$

aire secteur$(BEF) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\cdot a^2$

aire du triangle $(BEF) = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot h = a^2\sin 15°\cos 15° = \dfrac{1}{2}a^2\sin 30° = \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \mathscr{A}_G = a^2\left(2-\sqrt{3}\right) + 4\left(\dfrac{\pi}{12}a^2 - \dfrac{1}{4}a^2\right) = \left(1-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)a^2$

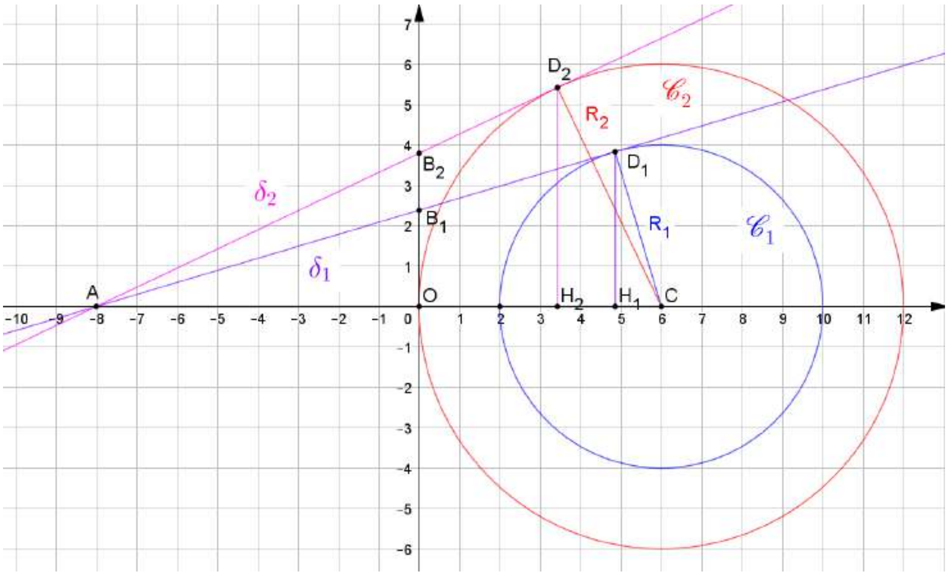
Le 6 octobre 2017

EXGSP192 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Dans un repère orthonormé Oxy, soient deux circonférences $\mathscr{C}_1$ de rayon R_1 et $\mathscr{C}_2$ de rayon $R_2 > R_1$. Le point C de coordonnées $(R_2, 0)$ est le centre de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Soit une droite δ passant par A de coordonnées $(-2R_1, 0)$ et coupant l'axe Oy en un point B de coordonnées $(0, y_B)$.

Déterminer par les méthodes de la géométrie synthétique pour quells valeurs $y_B > 0$, la droite δ n'intercepte qu'une seule des deux circonférences.



Pour que la droite δ n'intercepte qu'une seule circonférence, il faut qu'elle soit située entre les deux tangentes δ_1 et δ_2 respectivement à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Autrement dit, l'odonnée à l'origine y_B de la droite δ doit appartenir à l'intervalle $\left]B_1, B_2\right]$. Il reste donc à déterminer les longueurs $\overline{OB_1}$ et $\overline{OB_2}$. Pour ce faire, nous allons utiliser les propriétés métriques dans le triangle rectangle.

<u>1) $\overline{OB_1}$</u>. D_1 étant un point de tangence, le rectangle AD_1C est rectangle en D_1.

$\Rightarrow \overline{CD_1}^2 = \overline{AC}.\overline{H_1C}$ où H_1 est la projection orthogonale de D_1 sur Ox.

Pour simplifier l'écriture, posons $\overline{AC} = 2R_1 + R_2 = d$. On obtient $\overline{H_1C} = \dfrac{R_1^2}{d}$ (1)

$$\Rightarrow \overline{AH_1} = \overline{AC} - \overline{H_1C} = d - \frac{R_1^2}{d} = \frac{d^2 - R_1^2}{d} \qquad (2)$$

Nous avons aussi : $\overline{D_1H_1}^2 = \overline{AH_2}.\overline{H_1C}$.

Donc, avec (1) et (2) : $\overline{D_1H_1}^2 = \dfrac{R_1^2}{d^2}\left(d^2 - R_1^2\right)$ (3)

D'autre part, les triangles rectangles AB_1O et AD_1H_1 sont semblables :

$$\Rightarrow \overline{OB_1} = \overline{AO}.\frac{\overline{D_1H_1}}{\overline{AH_1}} = 2R_1.\frac{\frac{R_1}{d}\sqrt{d^2 - R_1^2}}{\frac{d^2 - R_1^2}{d}} = \frac{2R_1^2}{\sqrt{d^2 - R_1^2}}$$

<u>2) $\overline{OB_2}$</u>. On refait la même chose *mutatis mutandis.*

$$\overline{H_2C} = \frac{R_2^2}{d}, \overline{AH_2} = \frac{d^2 - R_2^2}{d}, \overline{D_2H_2}^2 = \frac{R_2^2}{d^2}\left(d^2 - R_2^2\right)$$

$$\overline{OB_2} = 2R_1.\frac{\frac{R_2}{d}\sqrt{d^2 - R_2^2}}{\frac{d^2 - R_2^2}{d}} = \frac{2R_1R_2}{\sqrt{d^2 - R_2^{\,2}}}$$

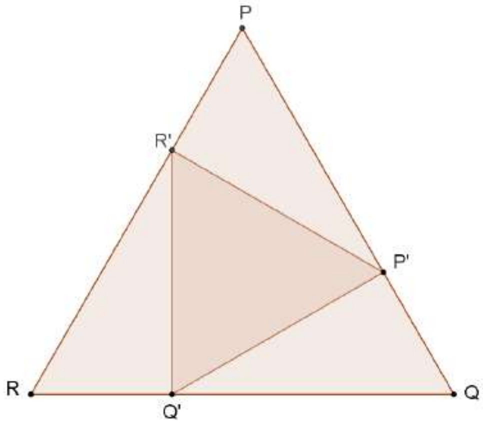
<u>Conclusion</u> : $\boxed{y_B \in \left]\dfrac{2R_1^2}{\sqrt{d^2 - R_1^2}}, \dfrac{2R_1R_2}{\sqrt{d^2 - R_2^{\,2}}}\right] \text{avec } d = 2R_1 + R_2}$

Exemple : si $R_1 = 4$ et $R_2 = 6 \Rightarrow y_b \in \left]\,2.3851, 3.7947\,\right]$

Le 25 octobre 2017.

EXGSP193 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

On considère un triangle équilatéral PQR de l'espace euclidien. Soit P' le point situé aux deux-tiers du segment $[PQ]$, Q' le point situé aux deux-tiers du segment $[QR]$ et R' situé aux deux-tiers du segment $[RP]$.
Déterminez le rapport entre les aires des triangles $P'Q'R'$ et PQR.



Les triangles $PP'R'$ et $QQ'R'$ sont égaux car on a un angle égal compris entre deux côtés égaux : $\overline{R'P} = \overline{P'Q}$; $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$ et $P = Q$. On en déduit que $\overline{R'P'} = \overline{P'Q'}$.
Dé même, on montre que $\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'}$. Le triangle $P'Q'R'$ est donc équilatéral et semblable au triangle PQR.

Déterminons la rapport de similitude, en posant $\overline{PQ} = a$.
Dans le triangle quelconque $PR'P'$, on a :

$$\overline{R'P'}^2 = \overline{R'P}^2 + \overline{PP'}^2 - 2\overline{R'P}.\overline{PP'}.\cos\widehat{P}$$

$$= \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 - 2\times\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}a\times\cos 60° = \left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)a^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{\overline{R'P'}}{\overline{RP}} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{3}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Or nous savons que le rapport des aires est égal à k^2

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathscr{A}_{P'Q'R'}}{\mathscr{A}_{PQR}} = \frac{1}{3}}$$

Le 7 novembre 2015.

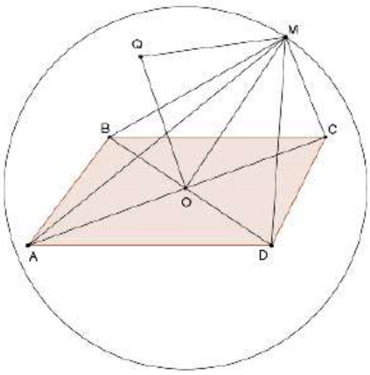
EXGSP194 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un paralèlogramme $ABCD$ dont l'intersection des diagonales coïncide avec O. Un point M mobile parcourt C. Démontrer que la valeur de

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$$

reste constante.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes



Notons r le rayon du cercle $\mathcal{C}$. Quel que soit le point Q du plan, on a

$$\begin{aligned} |MQ|^2 &= \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MQ} \\ &= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ}\right) \\ &= r^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + 2\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OQ} \end{aligned}$$

Dès lors on obtient

$$\begin{aligned} &|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 \\ &\quad = 4r^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 \\ &\qquad +2\,\overrightarrow{MO} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \\ &\quad = 4r^2 + 2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2|\overrightarrow{OB}|^2 \end{aligned}$$

puisque

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}.$$

Le 20 juin 2018

EXGSP195 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

On donne quatre points de l'espace A, B, C et D.

(a) Montrer que le vecteur

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

est indépendant de M.

(b) Notons $\vec{v}$ le vecteur dont il est question au poinst ptécédent.

Montrer sur si $\vec{v} = 0$, alors la valeur de

$$2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2 \quad ,$$

où $\|\overrightarrow{XY}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{XY}$, est indépendante du point M.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof Bernard Boigelot, Prof François Bastin :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes

(a) En utilisant la relation de Chasles et les règles du calcul vectoriel, on obtient

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\
&\quad - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\
&= 0\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} \\
&= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD},
\end{aligned}$$

qui est bien indépendant de M.

(b) Par les mêmes mécanismes qu'au point précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
&2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2 \\
&\quad = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MD} \\
&\quad = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \\
&\qquad + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\
&\quad = 0\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.(-2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD}) \\
&\qquad - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} \\
&\quad = 2\overrightarrow{MA}.\vec{v} - \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{AD}\|^2 \\
&\quad = -\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{AD}\|^2,
\end{aligned}$$

qui est bien indépendant de M.

Le 11 septembre 2018

EXGSP196 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Soit $ABCD$ un quadrilatère plan quelconque, et I, J, K, L les milieux des côtés AB, BC, CD et $DA,$ respectivement.

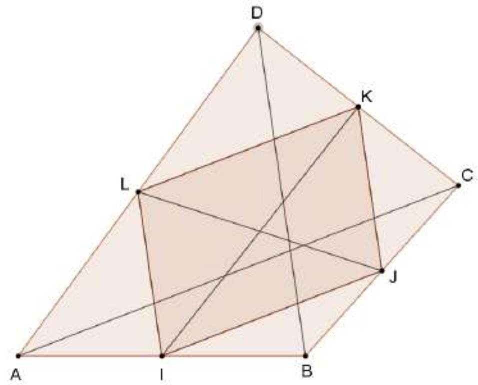
Démontrer vectoriellement les affirmations suivantes :

a) $IJKL$ est un parallélogramme tel que :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \text{ et } \qquad \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

b) Les diagonales de $ABCD$ et de $IJKL$ satisfont l'égalité

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = 2\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{JL}\right\|^2$$



a) Par exemple, on a

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ puisque } I \text{ est le milieu de } AB \text{ et } J \text{ le milieu de } BC$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

Les autres relations se démontrent de la même façon.

On en déduit aussi que $IJ // LK$ et $IL // JK$ puisque des vecteurs égaux sont parallèles.

$IJKL$ est donc un parallèlogramme.

b) $$2\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{JL}\right\|^2 = 2\overrightarrow{IK}^2 + 2\overrightarrow{JL}^2 = 2\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{\overrightarrow{AC}^2}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{2} + \frac{\overrightarrow{DB}^2}{4}\right) + 2\left(\frac{\overrightarrow{BD}^2}{4} - \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{4}\right)$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2$$

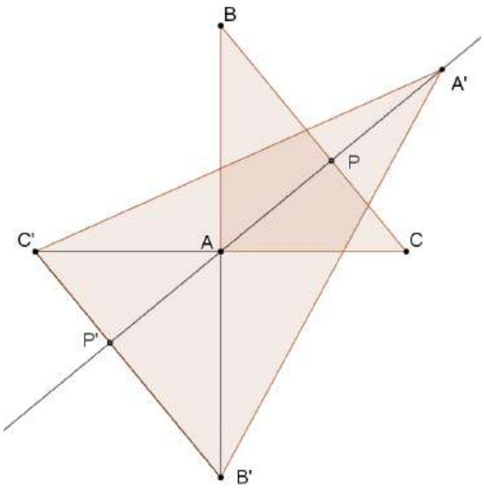
Le 16 septembre 2018

EXGSP197 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soient A' le symétrique du point A par rapport à la droite BC, B' le symétrique du point B par rapport à la droite AC, et C' le symétrique du point C par rapport à la droite AB. Soient P le peid de la perpendiculaire à BC abaissée de A, et P' le pied de la perpendiculaire à $B'C'$ abaissée de A'.

a) Calculer la longueur d' du segent $[A'P']$ en fonction de la longueur d du segment $[AP]$.

b) Calculer l'aire S' du triangle $A'B'C'$ en fonction de l'aire S du triangle ABC.



a) Par construction, $\overline{C'A} = \overline{AC}, \overline{B'A} = \overline{AB}$ et $CC' \perp BD$.

Le triangle $C'AB'$ est donc un triangle rectangle en A et isométrique au triangle ABC. $\Rightarrow \overline{P'A} = \overline{AP}$ et $\overline{B'C'} = \overline{BC}$.

On a aussi $\overline{PA'} = \overline{AP}$ car A' est le symétrique orthogonal de A.

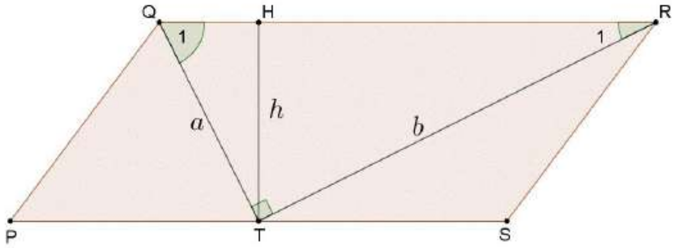
$\Rightarrow \overline{P'A'} = 3\overline{PA} \Rightarrow d' = 3d$.

b) $S_{ABC} = \dfrac{\overline{BC}.\overline{AP}}{2}$ et $S_{AB'C'} = \dfrac{\overline{B'C'}.\overline{A'P'}}{2} \Rightarrow \dfrac{S'}{S} = \dfrac{\overline{B'C'}.\overline{A'P'}}{\overline{BC}.\overline{AP}} = 3$

Le 16 septembre 2018

EXGSP198 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

On considère un parallélogramme de sommets $PQRS$ tel que le point d'intersection T des bissectrices des angles PQR et QRS appartient au segment $[PS]$.
Sachant que $|QT| = a$ et $|RT| = b,$ calculez l'aire du parallélogramme.



Le triangle QTR est rectangle en T.

En effet : $PQR + QRS = 180° \Rightarrow \frac{1}{2} PQR + \frac{1}{2} QRS = 90° \Rightarrow Q_1 + R_1 = 90° = T$.

Par pythagore : $|QR| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De même si $|TH| = h$ est la hauteur du parallélogramme :

$\Delta QHT : |QH|^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow |QH| = \sqrt{a^2 - h^2}$

$\Delta THR : |HR|^2 + h^2 = b^2 \Rightarrow |HR| = \sqrt{b^2 - h^2}$.

Or dans un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle sur les segements qu'elle détermine sur l'hypoténuse :

$h^2 = |QH|.|HR| = \sqrt{a^2 - h^2}.\sqrt{b^2 - h^2} \Rightarrow \cancel{h^4} = a^2b^2 - h^2b^2 - a^2b^2 + \cancel{h^4}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

L'aire du parallélogramme est alors : $A = |QR|.h = \sqrt{a^2 + b^2}.\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \boxed{ab}$

EXGSP199 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

Dans le plan, on se donne deux triangles équilatéraux $\mathcal{T}_1 = OAB$ et $\mathcal{T}_2 = OCD$ se partageant le sommet O et ayant une longueur de côté 1. Ces deux triangles ne se chevauchent pas et leurs sommets sont nommés de sorte que A, B, C et D se suivent le long d'un cercle de rayon 1 centré sur O.

On considère que $\widehat{BOC} = 2\gamma$ pour un certain paramètre $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}$; autrement dit, pour $\gamma = 0$, B et C sont confondus.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis.

(2) Si $\widehat{BAD} = \alpha$, calculez α en fonction de γ en mentionnant les propriétés géométriques utilisées dans vos développement ci-dessous.

$\boxed{\alpha = \qquad}$

(3) Calculez en fonction de γ quelconque la surface S du quadrilatère $ABCD$:

$\boxed{S(\gamma) = \qquad}$

(4) Calculez S pour les valeurs suivantes :

$\boxed{S(0) = \qquad}$ $\boxed{S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \qquad}$ $\boxed{S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \qquad}$

Solution proposée par Nicole Berckmans

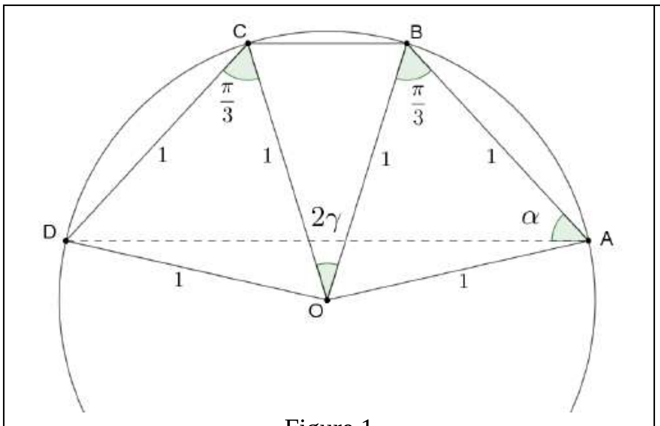


Figure 1

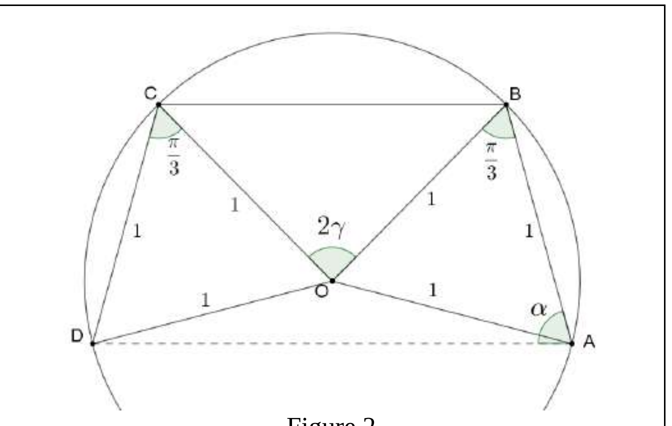


Figure 2

(2) L'angle α sous-tend l'arc *BOD*. α vaut la moitié de l'angle au centre *BOD*.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right)}$$

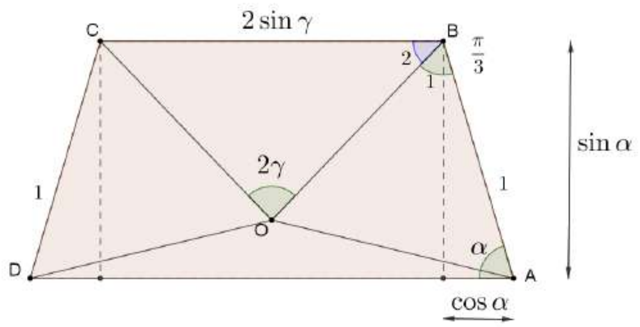


Figure 3

(3) Démontrons que le quadrilatère *ABCD* est un trapèze. Il suffit de prouver que $DAB + ABC = \pi$. En effet, si ces deux angles sont supplémentaires alors les droites *DA* et *CB* sont parallèles.

Le triangle *OBA* étant équilatère, on a : $\widehat{B_1 = \frac{\pi}{3}}$

Dans le triangle isocèle *BOC*, $2\widehat{B_2 + 2}\gamma = \pi \Rightarrow \widehat{B_2 = \frac{\pi}{2}} - \gamma$

Dès lors, $\widehat{ABC = B_1 + B_2 = \frac{\pi}{3}} - \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{5\pi}{6} - \gamma$

et son supplémentaire $= \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - \gamma\right) = \frac{\pi}{6} + \gamma = \alpha = \widehat{DAB}$

L'aire du trapèze *ABCD* : $S(\gamma) = \dfrac{2\sin\gamma + 2\sin\gamma + 2\cos\alpha}{2}.\sin\alpha$

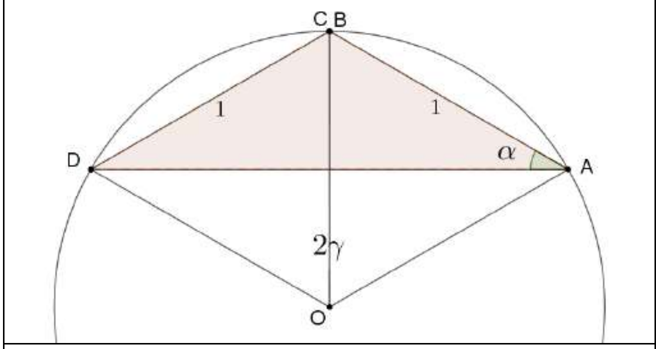
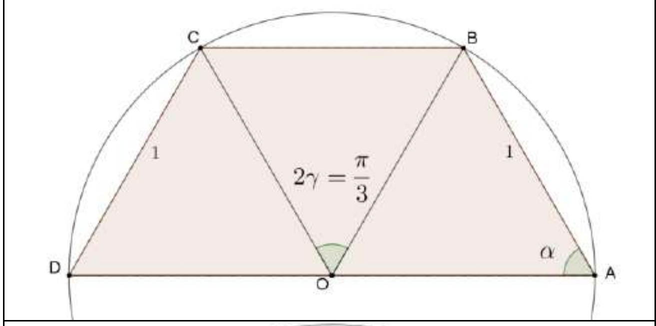
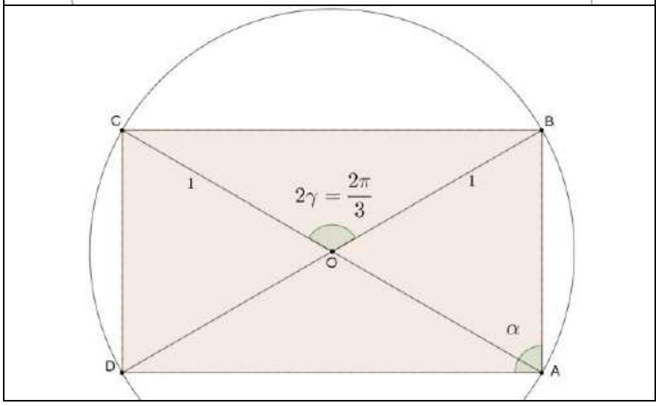
Or $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sin\gamma$ et $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) = \frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma$

On remplace : $S(\gamma) = \left(2\sin\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sin\gamma\right)\left(\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(3\sin\gamma\cos\gamma + \sqrt{3}\cos^2\gamma + 3\sqrt{3}\sin^2\gamma + 3\sin\gamma\cos\gamma\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{3}\sin\gamma\cos\gamma + \cos^2\gamma + 3\sin^2\gamma\right)$$

$$\boxed{S(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}\sin\gamma + \cos\gamma\right)^2}$$

	$\gamma = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $S(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$
	$\gamma = \frac{\pi}{6}$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$
	$\gamma = \frac{\pi}{3}$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Le 12 octobre 2018