Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 5

EXGSP050 – EXGSP059

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

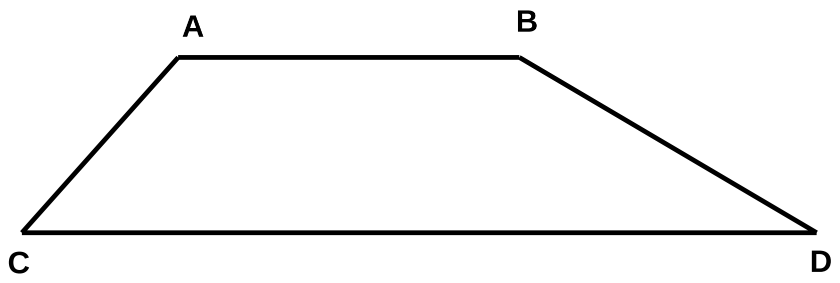
1 avril 03

EXGSP050 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

On donne quatre points ABCD, sommets d'un trapèze, en ce sens que la droite AB est parallèle à la droite CD. On donne aussi un réel k ≠ 0.
Les points M, N, P, Q sont définis par les égalités suivantes.

$$\mathbf{AM} = k\ \mathbf{AD} \qquad \mathbf{NC} = \frac{1-k}{k}\mathbf{AN} \qquad \mathbf{BP} = k\ \mathbf{BD} \qquad \mathbf{QC} = \left(1-k\right)\mathbf{BC}$$

a) Montrer que les points M, N, P, Q sont alignés.
b) Prouver que les segments [P,N] et [Q,M] ont même milieu.
c) Pour quelle(s) valeur(s) de k les points A, B, Q, M sont-ils les sommets d'un parallélogramme ?
(On donnera la réponse en fonction du paramètre t tel que **CD** = k **AB)**



$a)$ $\mathbf{AC} = \mathbf{AN} + \mathbf{NC} = \mathbf{AN} + \frac{1-k}{k}\mathbf{AN} \;\to\; \mathbf{AN} = k\ \mathbf{AC}$

$\mathbf{PN} = \mathbf{PB} + \mathbf{BN} = -k\ \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AN} = -k\ \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + k\ \mathbf{AC}$

$= -k\left(\mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BD}\right) + k\ \mathbf{AB} - \mathbf{AB} = -k\ \mathbf{CD} + \left(k-1\right)\mathbf{AB}$

$= -\,kt\ \mathbf{AB} + \left(k-1\right)\mathbf{AB} \;\to\; \boxed{\mathbf{PN} = \left(k - kt - 1\right)\mathbf{AB}}$

$\mathbf{PM} = \mathbf{PB} + \mathbf{BA} + \mathbf{AM} = -k\ \mathbf{BD} - \mathbf{AB} + k\ \mathbf{AD}$

$= -k\ \mathbf{BD} - \mathbf{AB} + k\mathbf{AB} + k\ \mathbf{BD} \;\to\; \boxed{\mathbf{PM} = \left(k-1\right)\mathbf{AB}}$

$\mathbf{PQ} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CQ} = -k\ \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AC} + \left(k-1\right)\mathbf{BC}$

$= -k\ \mathbf{BD} + \mathbf{BA} + \mathbf{AC} + \left(k-1\right)\mathbf{BA} + \left(k-1\right)\mathbf{AC}$

$= -k\left(\mathbf{BD} + \mathbf{AB} + \mathbf{CA}\right) = -k\ \mathbf{CD} \;\to\; \boxed{\mathbf{PQ} = -kt\ \mathbf{AB}}$

Conclusion = **PN**, **PM** et **PQ** sont des multiples de **AB**, les points P, N, M et Q sont donc alignés.

b) Soit X le milieu de $\left[PN\right]$

$\mathbf{PX} = \frac{1}{2}\left(k - kt - 1\right)\mathbf{AB}$

Soit Y le milieu de $\left[QM\right]$

$\mathbf{QM} = \mathbf{QP} + \mathbf{PM} = kt\ \mathbf{AB} + \left(k-1\right)\mathbf{AB} = \left(k + kt - 1\right)\mathbf{AB}$

$\mathbf{QY} = \frac{1}{2}\left(k + kt - 1\right)\mathbf{AB}$

$\mathbf{PY} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QY} = -kt\ \mathbf{AB} + \frac{1}{2}\left(k + kt - 1\right)\mathbf{AB} = \frac{1}{2}\left(k - kt - 1\right)\mathbf{AB}$

Les points X et Y sont donc confondus.

c) Si $ABQM$ est un parallélogramme $AB \,//\, QM$.

Par conséquent soit $\mathbf{AB} = \mathbf{QM}$, soit **AB** = - **QM**

1) $\mathbf{AB} = \mathbf{QM} \;\to\; k\left(1+t\right) - 1 = 1 \;\to\; \boxed{k = \frac{2}{1+t}}$

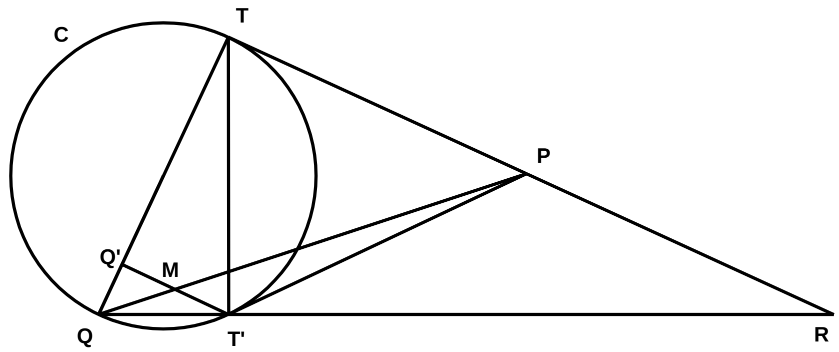
2) **AB** = - **QM** $\to k\left(1+t\right) - 1 = -1 \;\to\; k = 0$

Ce qui est contraire à l'hypothèse $k \neq 0$.

EXGSP051 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001.

Par un point P extérieur à un cercle C, on mène les deux tangentes t et t' à ce cercle, les points de tangence étant T et T' respectivement.
Soient Q le point de C diamétralement opposé à T, Q' le pied de la perpendiculaire abaissée de T' sur QT et R le point d'intersection de QT' avec t.

d) Montrer que TT' est perpendiculaire à QR
e) Montrer que le triangle PT'R est isocèle.
f) Montrer que P est le milieu de [T, R].
g) Montrer que QP coupe [Q', T']



a) Le triangle TQT' est rectangle car inscrit dans un demi-cercle $\rightarrow$ $TT' \perp QR$

b) $\angle T'TR$ *et* $\angle T'RT$ sont complémentaires car le $\Delta TT'R$ est rectangle.
$\angle PTT' = \angle TT'P$ car angles tangentielles qui interceptent le même arc.
Donc en vertu de a) , $\angle PT'R = \angle T'RP$ $\rightarrow$ $\Delta PT'R$ est isocèle;

c) En vertu de b), $PR = PT'$, et comme $PT = PT'$ (tangentes extérieures issues d'un même point), $\rightarrow$ $TP = PR$ $\rightarrow P$ est le milieu de TR

d) $\Delta QQ'M$ et ΔTQP sont semblables (triangles rectangles et $\angle Q'MQ = \angle TPQ$ car angles correspondants vu que $Q'T' // TR$) $\rightarrow \dfrac{QM}{QP} = \dfrac{Q'M}{TP}$

$\Delta QMT'$ et ΔQPR sont semblables ($\angle Q'T'Q = \angle TRQ$ car angles correspondants vu que $Q'T' // TR$) $\rightarrow \dfrac{QM}{QP} = \dfrac{MT'}{PR}$

Et comme $TP = PR$, M est le milieu de $Q'T'$

EXGSP052 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001.

FACSA, ULG, Liège, septembre 2001.

On donne quatre points A, B, C, D dans le plan.

(a) Montrer que le vecteur :

$$\vec{v} = 4\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - 5\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M.

(b) Montrer que si le vecteur $\vec{v}$ de (a) est nul ($\vec{v} = \vec{0}$ où $\vec{0}$ désigne le vecteur nul), le nombre

$$x = 4\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 - 5\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{MD}\right|^2$$

est indépendant du point M

$$\begin{aligned}
(a)\ \vec{v} &= 4\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - 5\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD} \\
&= 4\,\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= 4\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{MA} - 5\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{AD} \\
&= 3\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

qui est indépendant de M.

$$\begin{aligned}
b)\ x &= 4\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 - 5\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{MD}\right|^2 \\
&= 4\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\,\overrightarrow{MB}^2 - 5\,\overrightarrow{MC}^2 - 2\,\overrightarrow{MD}^2 \\
&= 4\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 \\
&= 4\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\,\overrightarrow{MA}^2 + 6\,\overrightarrow{MA}\,AB + 3\,\overrightarrow{AB}^2 - 5\,\overrightarrow{MA}^2 - 10\,\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{AC} - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{MA}^2 - 4\,\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{AD} - 2\,\overrightarrow{AD}^2 \\
&= 2\,\overrightarrow{MA}\left(3\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AD}\right) + 3\,\overrightarrow{AB}^2 - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AD}^2 \\
&= 3\,\overrightarrow{AB}^2 - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AD}^2
\end{aligned}$$

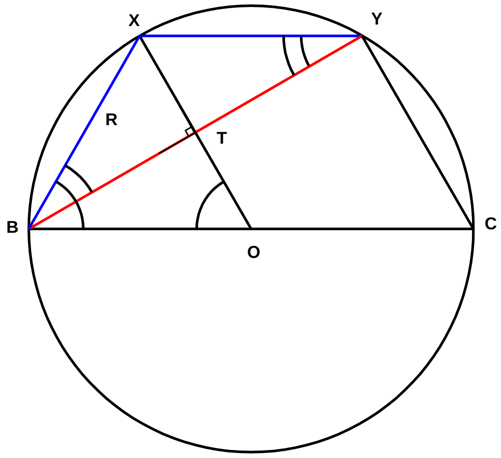
Qui est aussi indépendant de M

Modifié le 1 septembre 2012

EXGSP053 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998.

Soit un cercle de rayon R et BC un diamètre. A partir de B et de C on fixe sur le cercle et du même côté de BC les deux points X et Y tels que $BX = CY = R$.
Du point X, on abaisse la perpendiculaire à BY qui coupe ce segment en T.
On demande :

a) De montrer que T est le milieu de BY ;
b) D'exprimer la mesure de la distance BT en fonction de R
c) De calculer l'aire comprise entre le cercle et la corde BX.



a) La construction graphique montre que XT semble passer par le point O.
En appelant S le point d'intersection de XO et BY, on montre d'abord que ce point S est sur le point T.
En effet, les triangles OBX et OYC sont équilatéraux car $OB = BX = OX = R$ et de même $OY = YC = OC = R$.
Par ailleurs, l'angle BOX : angle au centre interceptant l'arc BX, sous-tendu par R. Il vaut deux l'angle YBC qui intercepte l'arc YC sous-tendu par R, donc angle $YBC = 1/2$ angle $BXO \rightarrow S \equiv T$.
Comme l'angle XOY vaut 60°, XY vaut également R et par suite le triangle BXY est isocèle
($BX = XY = R$), donc la hauteur XT est aussi médiane et médiatrice, soit BT=BT/2

b) L'angle $XBT = 30°$, $\rightarrow BT = BX \cos 30 = R\frac{\sqrt{3}}{2}$

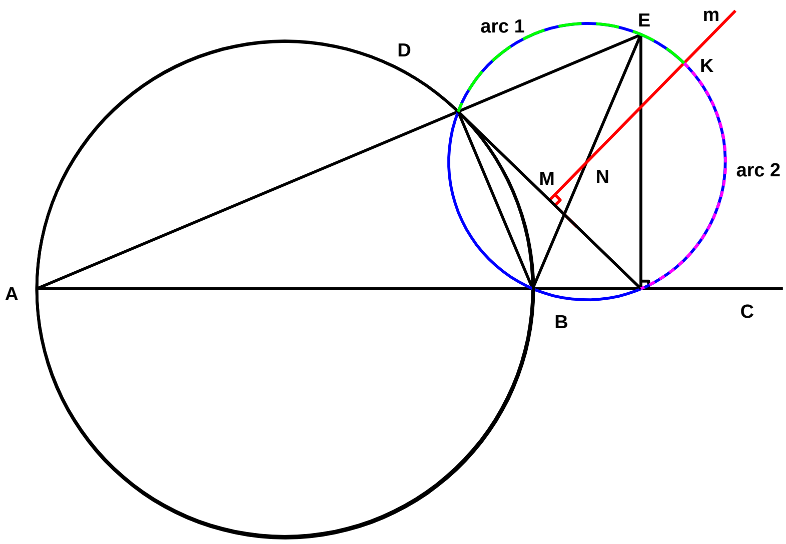
c) L'aire comprise entre le cercle et la corde BX = aire du secteur de 60°
- aire du triangle BXO.

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R\,.\,R\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

EXGSP054 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998.

Sur une circonférence on trace un diamètre *AB* sur le prolongement duquel on prend un point *C*.
De ce point, on trace une tangente *CD* à la circonférence.
Par le point *C*, on trace enfin la perpendiculaire à *AB* qui coupe la droite *AD* en *E*.
On demande :

a) De démontrer que la médiatrice de *DC* passe par le milieu de *BE*
b) De vérifier la relation *AD* x *AE* = *AB* x *AC*
c) De porter sur la médiatrice de *DC* un point *X* tel que *BX* soit la bissectrice de l'angle *DBC*.



a) Le quadrilatère *DECB* est inscriptible car les angles *EDB* et *BCE* sont droits.
Les angles droits *EDB* et *BCE* interceptent le diamètre *BE* du cercle circonscrit.
N, milieu de *BE*, est centre du cercle et la médiatrice de la corde *DC* passe donc par *N*.

b) Dans le quadrilatère inscriptible *DECB*, la somme des angles *DEC* et *DBC* vaut 180°.
Il en résulte que l'angle *ABD* vaut l'angle *DEC*.
Par suite les triangles *ADB* et *AEC* sont semblables $\rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$
$\rightarrow AB.AC = AE.AD$

c) Soit K l'intersection du cercle circonscrit et de la médiatrice m.
m est la médiatrice de la corde DC donc arc 1 = arc 2
Les angles DBK et KBC interceptent des arc égaux donc BK est bissectrice.

EXGSP055 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998. Louvain, Juillet 2000, série 1.

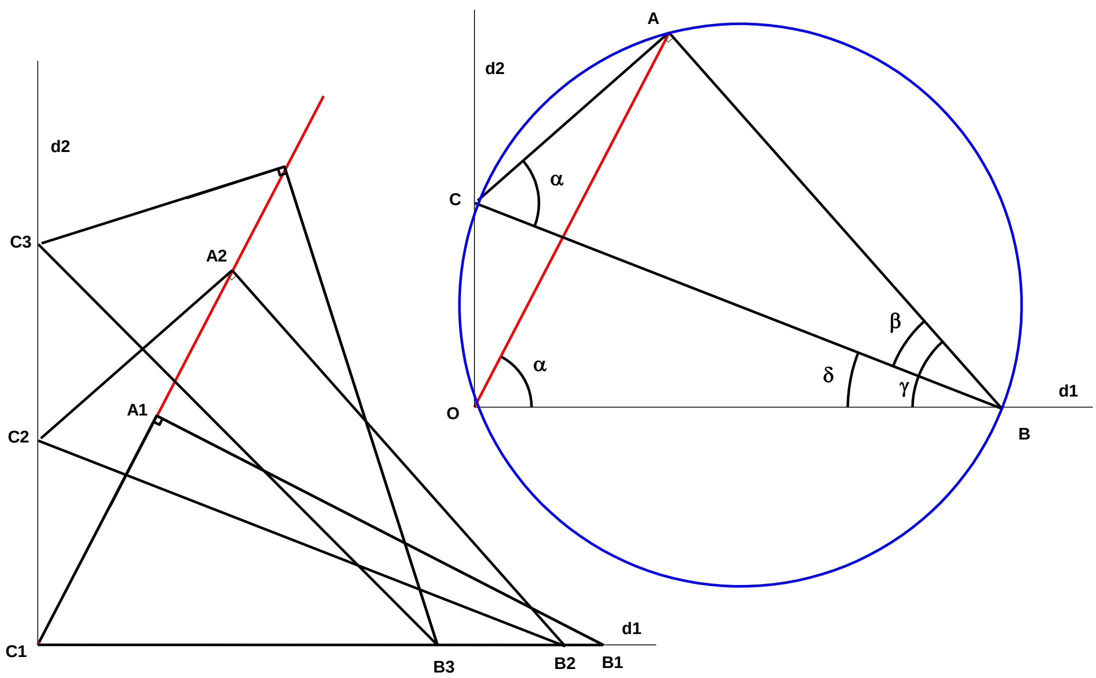
Les extrémités *B* et *C* de l'hypoténuse d'un triangle rectangle *ABC* glissent respectivement sur 2 droites d_1 et d_2 perpendiculaires entre elles.

a) Quel est le lieu du point *A*.

En définir les limites dans les cas suivants :

b) Le triangle *ABC* est astreint à être situé dans le Ier quadrant du repère formé par d_1 et d_2

c) Le triangle *ABC* peut évoluer dans les 4 quadrants.



a) La construction expérimentale du lieu de A pour trois triangles ABC distincts montre que le lieu est une droite passant par l'origine ($O \equiv C1$)

En effet, considérons une position du triangle ABC représentée à la figure de droite.

On observe que la quadrilatère $OCAB$ est inscriptible.

Si on appelle α l'angle du triangle ABC oppoé au côté AB, on note que cet angle AOB interceptent tous les deux l'arc AB.

$\rightarrow$ L'angle AOB est constant et le lieu du point A est une droite inclinée de α sur d_1.

b) Dans le triangle AOB, on a : $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

Or la mesure de AB est constante et sin α est également constant.

OA sera maximum lorsque sin γ sera maximum soit γ=90°.

Comme $\gamma = \delta + \beta$ et $\beta = 90° - \alpha$

$\rightarrow \gamma = 90° = \delta + 90° - \alpha \rightarrow \delta = \alpha$.

OA vaut alors $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = BC$.

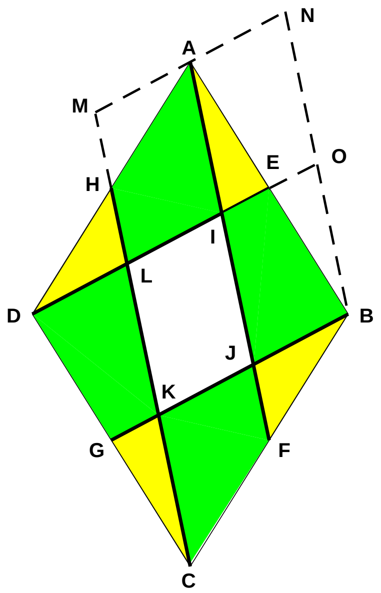
OA sera minimum quand l'angle δ est égal à 0 $\rightarrow OA = BC\cos\alpha$

c) Lorsque le triangle évolue dans les autres quadrants le point A se déplace sur les diagonales d'un rectangle.

EXGSP056 – Bruxelles, septembre 2000.

On donne le losange de sommets consécutifs *A, B, C* et *D*. Soient *E, F, G* et *H* les milieux des côtés *AB, BC, CD* et *DA* respectivement. Les droites *AG, BH, CE* et *DF* déterminent un quadrilatère.

1. Établissez que ce quadrilatère est un parallélogramme.
2. Déterminer l'aire du parallélogramme sachant que celle du losange vaut *S*.



a) $\Delta ADE = \Delta CBG$ car un angle égal compris entre deux côtés égaux.

$\rightarrow DE = GB \rightarrow DEBG$ est un parallèlogramme $\rightarrow DE // GB$

De même $AF // CH \rightarrow IJKL$ est un parallélogramme.

b) Prolongeons DE et KH. Traçons $MN // DE$ et $BN // KH$

Regardons les aires. Soit P l'aire du parallèlogramme *IJKL*.

$\Delta AEI = \frac{1}{4} ANDI = \frac{P}{4} \qquad \Delta HMA = \frac{1}{4} MAIL = \frac{P}{4}$

or $\Delta HMA = \Delta DHL$

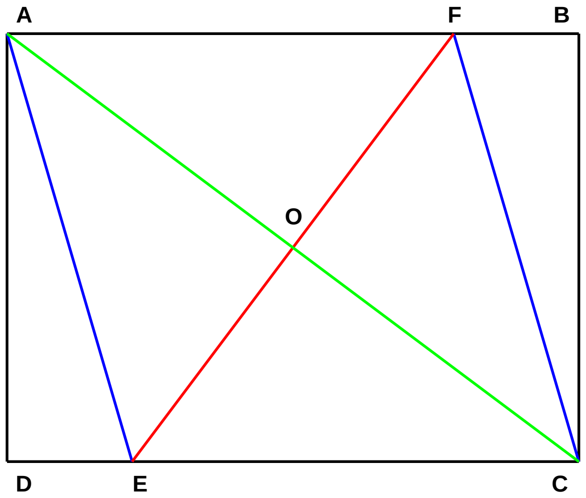
$\rightarrow \Delta AEI = \Delta BFJ = \Delta CGK = \Delta DHL = \frac{P}{4}$

On a aussi : $AILH = EBJI = FCKJ = \frac{3}{4} P$

$\rightarrow P + 4\frac{3}{4}P + 4\frac{1}{4}P = S \rightarrow 5P = S \rightarrow \boxed{P = \frac{S}{5}}$

EXGSP057 – Bruxelles, juillet 2001.

Sur les côtés *AB* et *DC* du rectangle *ABCD*, on place les points *F* et *E* de façon à ce que *AFCE* soit un losange.
Calculer la longueur *EF* si *AB* = 16 et *BC* = 12.



$AF = 16 - FB$

$FC = \sqrt{FB^2 + CB^2} = \sqrt{FB^2 + 12^2}$

$AF = FC \rightarrow 16 - FB = \sqrt{FB^2 + 12^2} \rightarrow FB = 3.5 \rightarrow AF = 12.5$

$AO = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 16^2} = 10$

$EF = 2\,OF = 2\sqrt{AF^2 - AO^2} = 2\sqrt{12.5^2 - 10^2} = 15$

EXGSP058 – Bruxelles, septembre 2001.

Déterminer le barycentre G de trois points non aligné, A, B et C, affectés de masses égales ainsi que le barycentre G' de ces mêmes points si on leur affecte les masses respectives 1, 1, - 1.
Faites une figure.

Le barycentre est donné par : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum m_1.\overrightarrow{OA_i}}{\sum m_i} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OG_x} = \dfrac{\sum m_1.\overrightarrow{OA_x}}{\sum m_i} \\ \overrightarrow{OG_y} = \dfrac{\sum m_1.\overrightarrow{OA_y}}{\sum m_i} \end{cases}$

Si : $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \quad \rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$

Si : $m_1 = m_2 = 1, m_3 = -1 \quad \rightarrow \begin{cases} x_{G'} = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_{G'} = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$

Essayons d'aller plus loin,

Si : $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \rightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

Et comme le point O est quelconque prenons $O \equiv A$,

Ce qui nous donne une façon simple de déterminer G : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

Si : $m_1 = m_2 = 1, m_3 = -1$

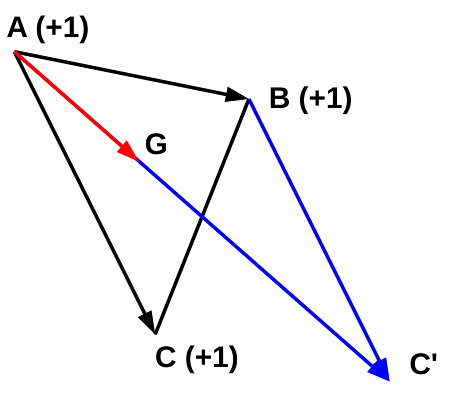
$x_{G'} = x_1 + x_2 - x_3 = 3\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) - 2x_3$

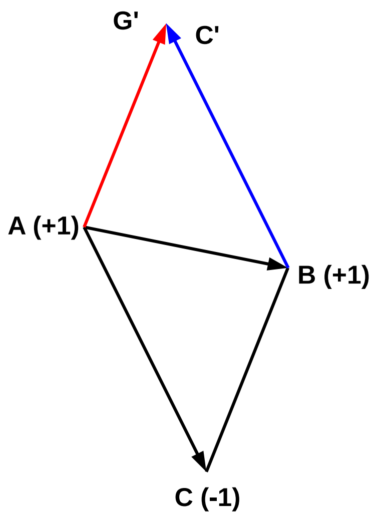
Et $y_{G'} = y_1 + y_2 - y_3 = 3\left(\dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) - 2y_3$

$\rightarrow \quad \overrightarrow{OG}' = 3\,\overrightarrow{OG} - 2\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

Si $O \equiv A \rightarrow \quad \overrightarrow{AG}' = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Ce qui nous donne les figures suivantes :

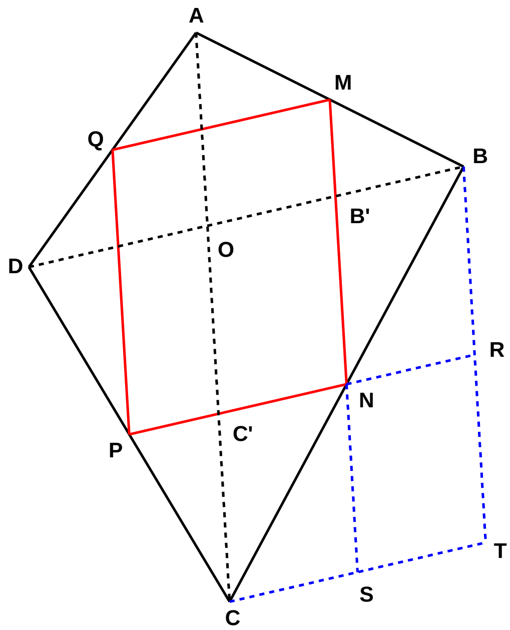




EXGSP059 – Bruxelles, juillet 2002.

Soit un quadrilatère quelconque *ABCD*. On appelle *M*, *N*, *P* et *Q* les milieux respectifs des côtés *AB*, *BC*, *CD* et *DA*.
Démontrer

1. Que la quadrilatère *MNPQ* est un parallélogramme.
2. Que l'aire du quadrilatère *ABCD* vaut deux fois celle de *MNPQ*.



1) Traçons les diagonales AC et DB qui se coupent en O

Dans le triangle DBC, PN est parallèle à DB car PN joint le milieu de CD et BC.

Dans le triangle DAB, QM est parallèle à DB $\to$ QM // PN

On montrer également que QP // MN $\to$ $MPNQ$ est un parallèlogramme.

2) Traçons BT // OC, CT // OB. Prolongeons PN qui coupe BT en R, et MN qui coupe CT en S. Soit $B' = MN \cap OB$, et $C' = PN \cap PN$

$OBTC$ est un parallélogramme.

On voit immédiatement que les triangles $CC'N$ et $NB'B$ sont égaux

(Un coté égal compris entre deux angles égaux)

$\to$ Aire $OB'C'N = \frac{1}{2}$ Aire triangle OBC.

Idem pour les triangles AOB, DOC et DOA

$\to$ Aire $MNPQ = \frac{1}{2}$ Aire $ABCD$