

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique plane

GSP 6

EXGSP060 – EXGSP069

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Mars 04

EXGSP060 – Bruxelles, septembre 2002.

Quel est le petit nombre d'angles obtus que peut avoir un polygone convexe de n côtés avec $n > 5$.

Soient : x le nombre d'angles obtus et y le nombre d'angles aigus.

On peut supposer que tous les angles obtus sont égaux entre eux, soit α ;
et les angles aigus également égaux, soit β .

Somme des angles d'un polygone : $S = 180(n - 2) = x\alpha + y\beta$

Avec la condition : $90 < \alpha < 180 \rightarrow 90 < \frac{180(n - 2) - y\beta}{x} < 180$

Puisque x doit être le plus petit possible, il suffit d'étudier la condition :

$$\frac{180(n - 2) - y\beta}{x} < 180 \rightarrow 180(n - 2) - y\beta < 180x$$

$$\text{Or } x + y = n \rightarrow 180(n - 2) - (n - x)\beta < 180x \rightarrow x > n - \frac{360}{180 - \beta}$$

Pour que n soit le plus petit possible, il faut que $\frac{360}{180 - \beta}$ soit grand

$\rightarrow 180 - \beta$ soit petit $\rightarrow \beta$ soit grand.

Or β est au maximum égal à 90° .

Par conséquent, n est le nombre immédiatement supérieur à $n - 4$

$$\rightarrow \boxed{x = n - 3}$$

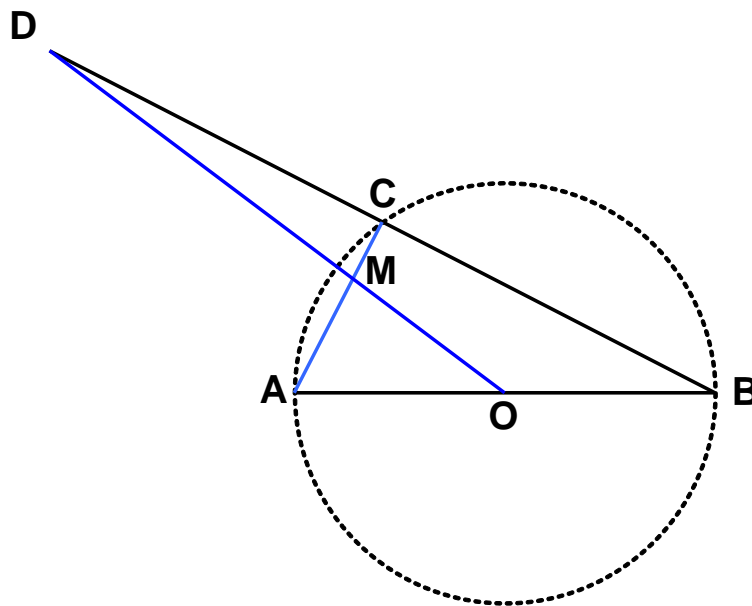
	Nombre de côtés	Nombre d'angles obtus
Exemples :	6	3
	7	4
	8	5

EXGSP061 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2000, série1.

On considère un diamètre fixe AB d'un cercle de centre O et un point C mobile sur la circonférence de ce cercle. On construit D sur BC tel que $DC = BC$.

On vous demande :

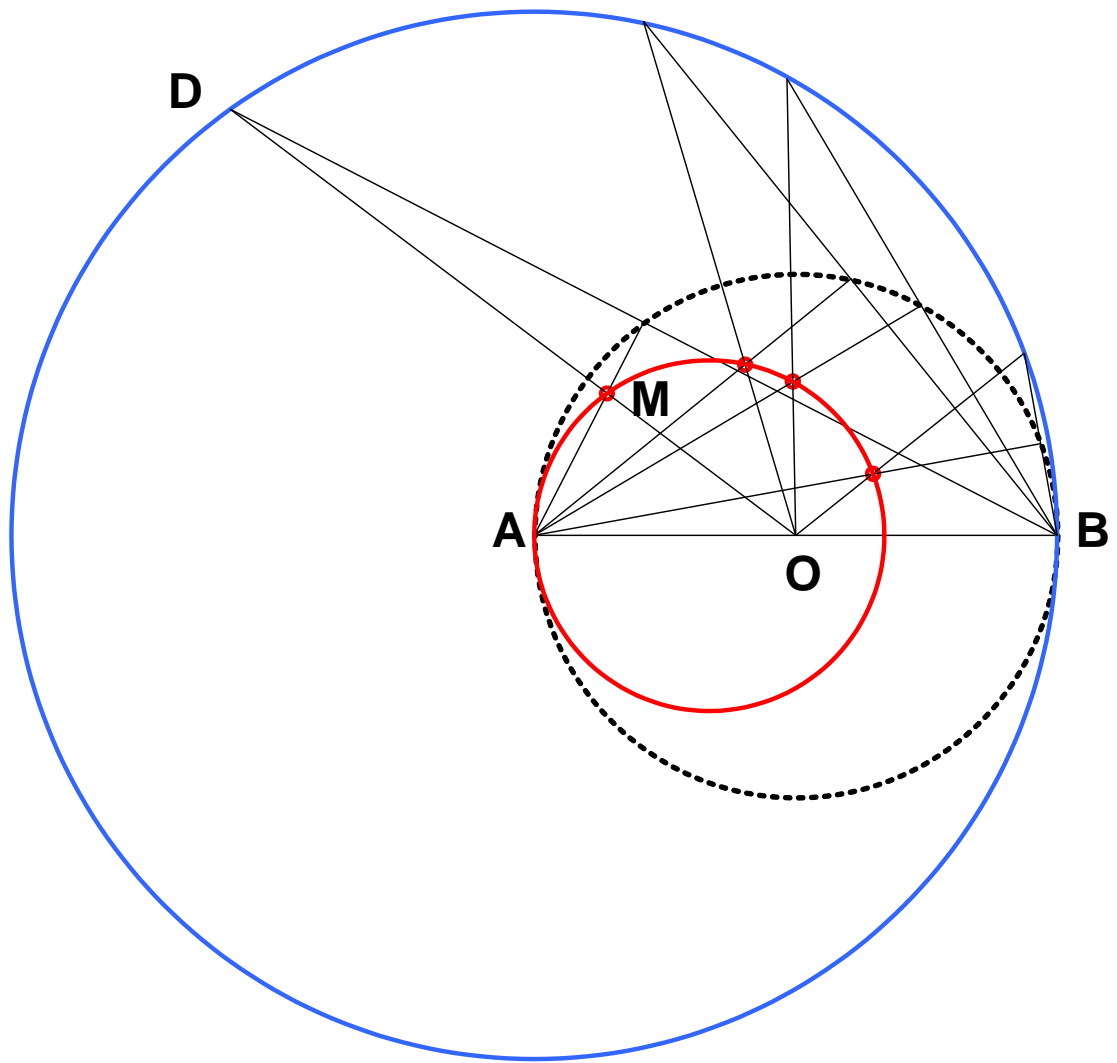
- de trouver le lieu du point D ;
 - de trouver le lieu du point M situé à l'intersection des droites AC et OD ;
de justifier votre réponse et de représenter les lieux sur un dessin clair et précis.
-



$DC = BC$ Par conséquent, D est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport 2.
 C se déplace sur une circonférence, or l'homothétie d'une circonférence est une circonférence.
 \Rightarrow Le lieu de D est un cercle de centre A et de rayon AB .

AC et DO sont médianes du triangle $ADB \Rightarrow M$ est le centre de gravité du triangle ADB .
 M est donc l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $2/3$.

\Rightarrow Le lieu de M est un cercle dont le centre O' est situé sur AB , et dont le rayon $AO' = \frac{AB}{3}$



Modifié le 9 février 2014 (Jean Perbal)

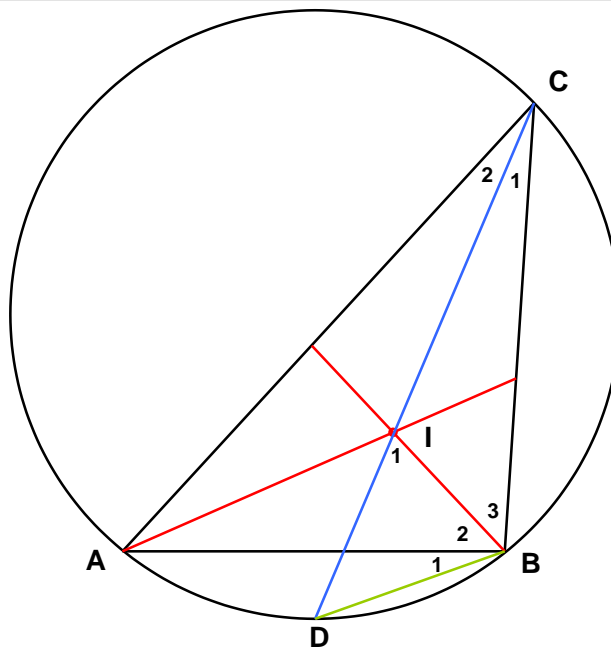
**EXGSP062 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2001, série 1 ;
EPL, UCL, Louvain, septembre 2009 ;
EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, série 1.**

Soit un triangle ABC , on vous demande :

- 1) De déterminer le lieu du point d'intersection des bissectrices intérieures aux angles A et B si le côté AB est fixe et l'angle C constant;
- 2) D'expliquer votre raisonnement ;
- 3) De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.

Enoncé 2010

On considère un triangle ABC dont le côté AB et l'angle C sont fixés. Trouvez le lieu du centre du cercle inscrit à ABC . Expliquez votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Si l'angle C est constant, alors le sommet C se déplace sur un arc de cercle "au-dessus" et "au-dessous" de AB . Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle et AB est une corde
 Traitons le cas où C est "au-dessus" de AB . *NON* Il existera une solution symétrique dans le cas où C est "en-dessous".

Soit I le point d'intersection des bissectrices.

On a:

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ → car CD est bissectrice → $\text{arc } AD = \text{arc } DB$ → Le point D est fixe.

$\widehat{B_2} = \widehat{B_3}$ BI est bissectrice

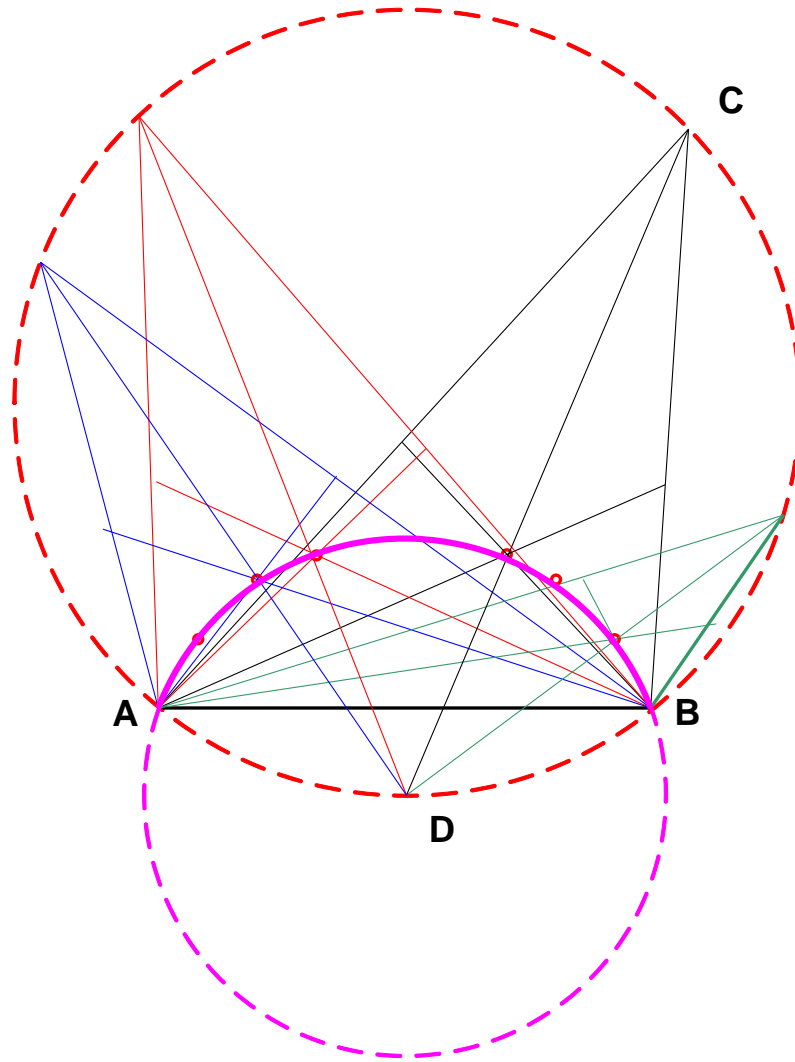
$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ CI est bissectrice

$\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ interceptent le même arc.

Or $\widehat{C_1} + \widehat{B_3} = \widehat{I_1}$ → $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{I_1}$

Donc le triangle DIB est isocèle et $DI = DB = \text{constante}$

Le lieu est donc un arc de cercle AB de centre D et de rayon DB .



Note :
Pour le cas des médianes voir : EXGSP006
Pour le cas des hauteurs voir : EXGSP064

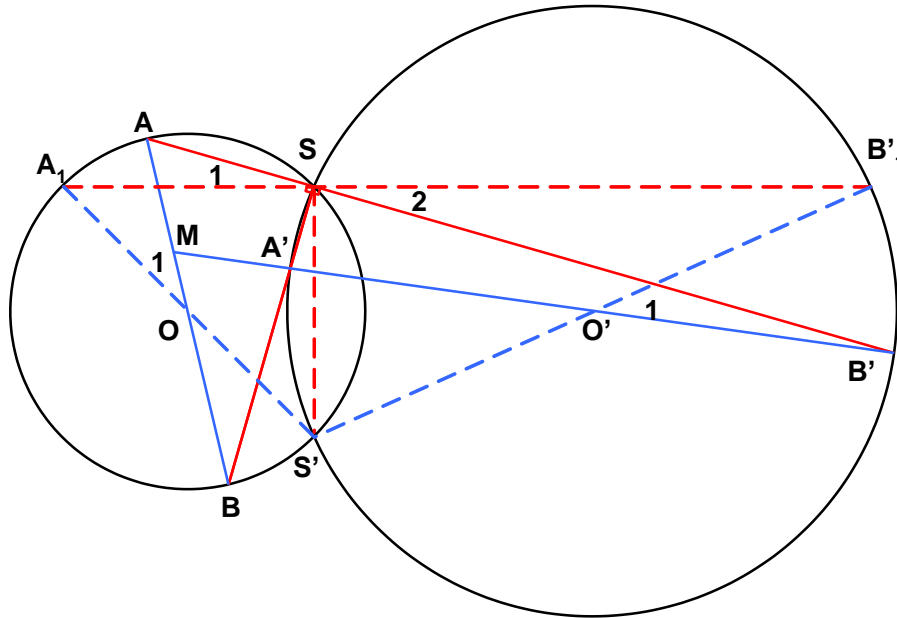
Résolu le 23 septembre 2003. Modifié le 21 août 2004

EXGSP063 – Louvain, juillet 2001, série 2.

On donne deux circonférences sécantes. Par l'un des points d'intersection S , on trace deux perpendiculaires quelconques qui rencontrent la première circonférence aux points A et B , et la seconde aux points A' et B' .

On vous demande :

- De déterminer le lieu du point M qui se situe à l'intersection de AB et $A'B'$
- D'expliquer votre raisonnement
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.



Il est évident que AB et $A'B'$ sont diamètre de leur cercle respectif.

Considérons les perpendiculaires dans la position horizontale-verticale ($A_1B'_1$ et SS'). Dans ce cas le point M , dont nous cherchons le lieu se trouve en S' .

Faisons pivoter autour de S , les perpendiculaires d'un angle $\widehat{S_1}$.

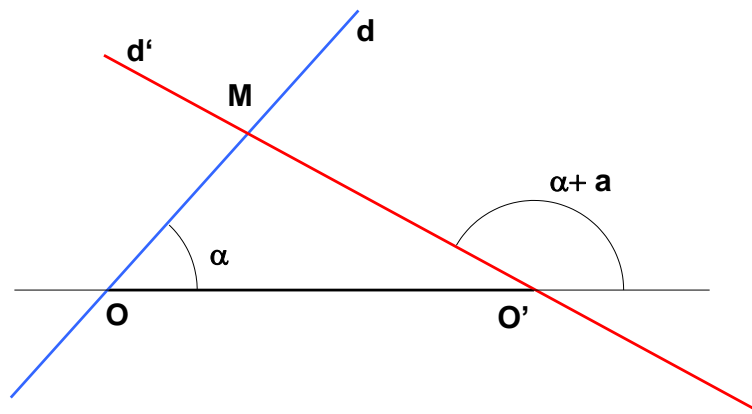
On remarque que A_1 se déplace en A . Or $\widehat{O_1}$ étant un angle au centre, la droite OA_1 a donc pivoter autour de O d'un angle $2\widehat{S_1}$.

De même, on montre $\widehat{O'_1} = 2\widehat{S_2}$; or $\widehat{S_1} = \widehat{S_2}$ car angles opposés par le sommet.

Par conséquent, les droites AB et $A'B'$ pivotent d'un même angle.

On peut donc modifier l'énoncé comme suit :

Chercher le lieu du point d'intersection de deux droites, l'une pivotant autour d'un point O et l'autre pivotant d'un même angle autour d'un point O' .



Première méthode

Soit c , la distance entre les deux pivots.

$$\begin{cases} d \equiv y = \tan \alpha \cdot x \\ d' \equiv \tan(a + \alpha) \cdot (x - c) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \tan \alpha \cdot x \\ y = \frac{\tan a + \tan \alpha}{1 - \tan a \tan \alpha} (x - c) \end{cases}$$

On élimine $\tan \alpha$, on réarrange et on obtient :

$$\tan a x^2 + \tan a y^2 - c \cdot \tan a \cdot x - cy = 0$$

C'est l'équation d'un cercle qui passe par O et O' .

Deuxième méthode

Plutôt que d'utiliser la grosse artillerie de la géométrie analytique,

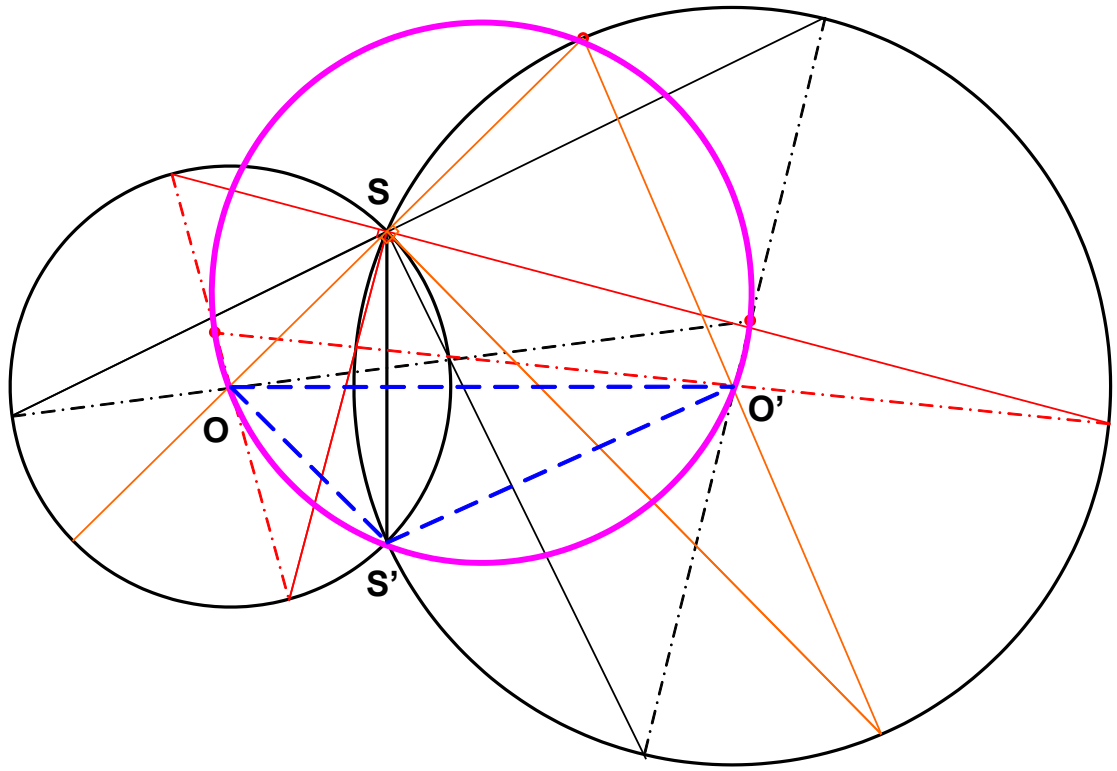
il suffit de remarquer que : $\overline{OO'M} = \pi - \alpha - a$

$$\rightarrow \overline{OMO'} = \pi - \alpha - \pi + \alpha + a = a$$

Par conséquent, M se déplace en regardant le segment OO' selon un angle constant $\rightarrow M$ se déplace sur un cercle.

Or nous savons aussi que S' appartient au lieu de M ,

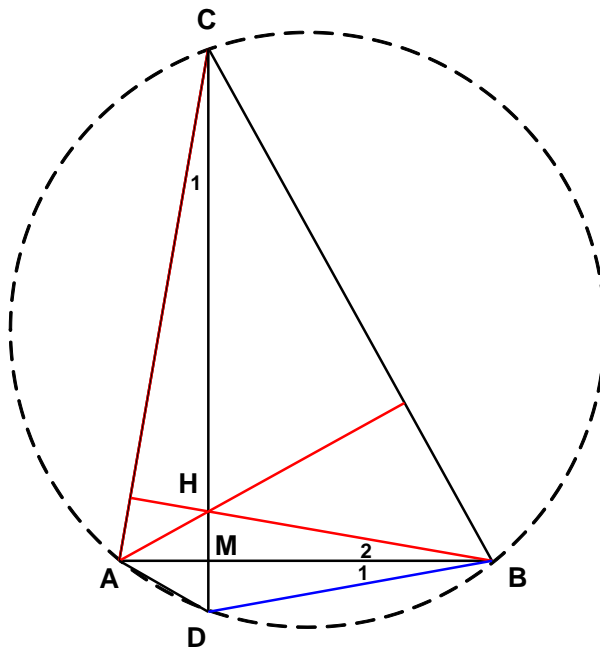
\rightarrow Le lieu est le cercle circonscrit au triangle $OS'O'$



**EXGSP064 – EPL, UCL, LLN, Louvain, juillet 2001, série 1.
POLYTECH, UMon, Mons, 2014.**

Soit un triangle ABC dans lequel AB est fixe et l'angle C constant, on vous demande :

- De déterminer le lieu du point d'intersection des hauteurs relatives aux côtés BC et AC .
- D'expliquer votre raisonnement ;
- De représenter le lieu sur un dessin clair et précis.



Si l'angle C est constant, alors le sommet C se déplace sur un arc de cercle "au-dessus" et "au-dessous" de AB . Ce cercle Γ est le cercle circonscrit au triangle et AB est une corde. Traitons le cas où C est "au-dessus" de AB . Il existera une solution symétrique dans le cas où C est "en-dessous".

Soit H le point d'intersection des hauteurs, M le pied de la hauteur issue de C , et D son intersection avec le cercle.

On a:

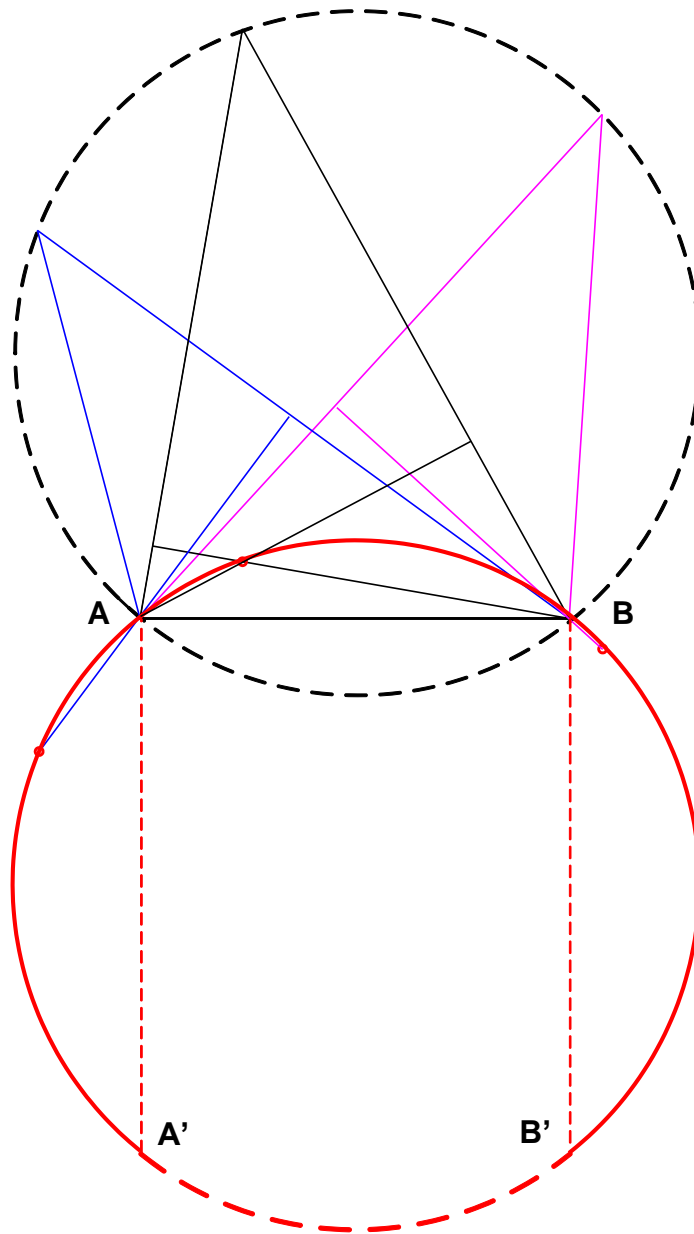
$\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ interceptent le même arc.

$\widehat{C_1} = \widehat{B_2}$ angles à côtés perpendiculaires

$\rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \rightarrow$ Les triangles rectangles MHB et MDB sont égaux

$\rightarrow MH = MD$

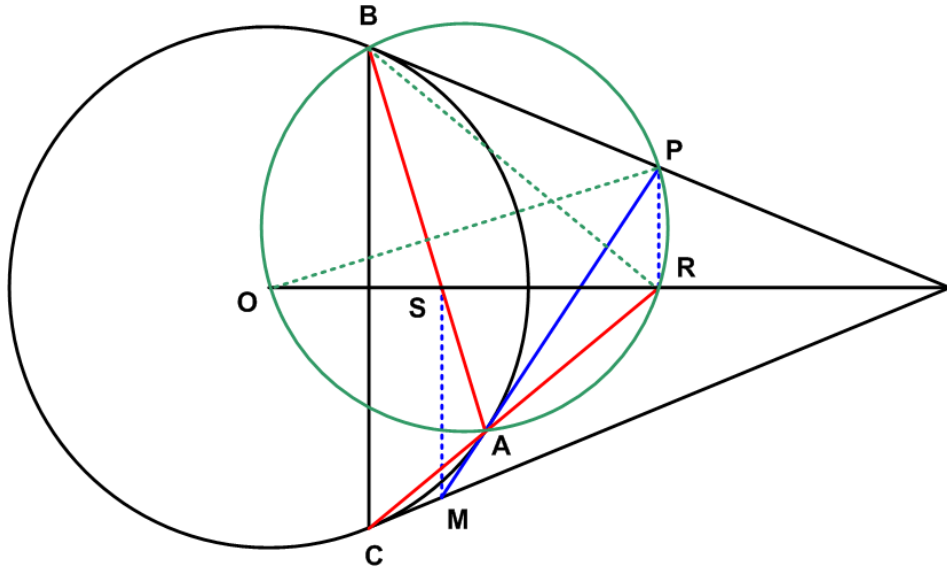
le lieu est donc un arc du cercle symétrique du cercle Γ avec AB comme axe de symétrie. Cette arc est $A'B'$ (avec A' à la verticale de A et B' à la verticale de B).



Note :
 Pour le cas des médianes, voir : EXGSP006
 Pour le cas des bissectrices, voir : EXGSP062

EXGSP065 – Exemple.

Soit un cercle de centre O et trois points de la circonférence, B et C qui sont fixes et A qui est quelconque. La tangente en A coupe les tangentes en B et C respectivement aux points P et M dont les projections sur la médiatrice de BC sont R et S . Quel est le lieu de l'intersection des droites BS et CR quand A parcourt la circonférence ?



Un dessin soigné montre immédiatement que le lieu est la circonférence elle-même, cependant un dessin n'est pas une démonstration.

Le cercle de diamètre OP passe par les points B, R et A car de chacun de ces points, on voit le diamètre OP selon un angle droit. Comme OP est bissectrice de l'angle BAP , les arcs OB et OA sont égaux, et donc les angles BRO et ORA sont égaux.

D'autre part, R étant sur la médiatrice de BC , les angles BRO et ORC sont égaux. On en déduit que $ORA = ORC$. Les points C, A et R sont donc alignés et la droite CR passe par A .

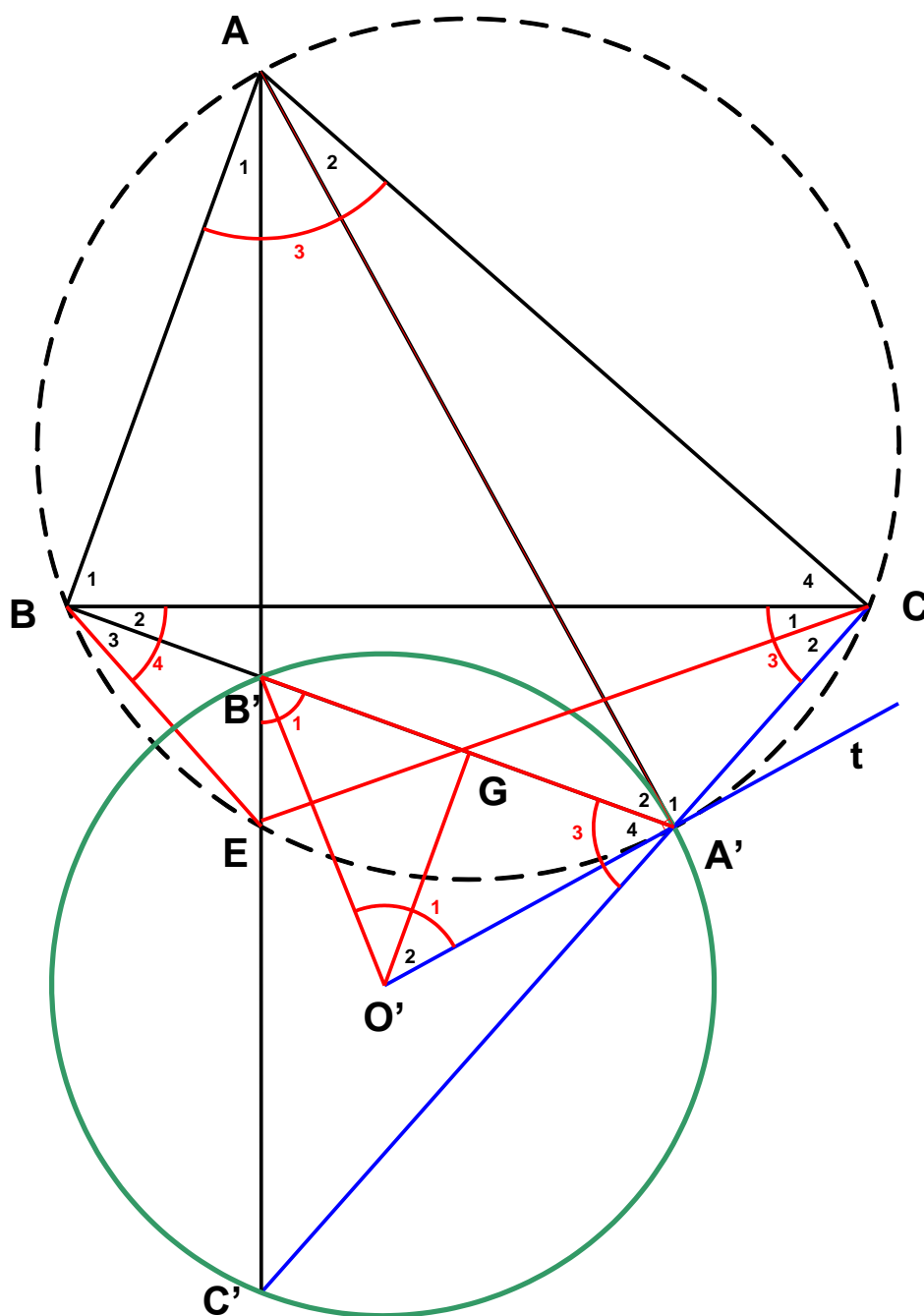
On démontre mutatis mutandis que BS passe aussi par A .

Le lieu est donc bien la circonférence.

EXGSP066 – Liège, juillet 2002.

Soit ABC un triangle non rectangle. C son cercle circonscrit et A' le point de C diamétralement opposé à A . La hauteur issue de A coupe $A'B$ en B' , $A'C$ en C' et C en A et E

1. Montrer que le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC
2. Prouver que les segments $[A',C']$ et $[B,E]$ ont même longueur
3. Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est sur la tangente à C menée par A' .



1) $B_1 = B'_1$ Angles à côtés \perp (1)

$B_1 = A'_1$ Interceptent le même arc

$C_4 = A'_2$ Interceptent le même arc

$\rightarrow B_1 + C_4 + A_3 = 180^\circ = A'_1 + A'_2 + A'_3 \rightarrow A_3 = A'_3$ (2)

De (1) et (2), on déduit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables

2) B_1 et A_1 sont complémentaires car AC' est une hauteur

$B_1 = A'_1$ Interceptent le même arc

A_2 et A'_2 sont complémentaires car AA' est un diamètre

Donc $A_1 = A_2 \rightarrow$ les arcs BE et $A'C$ sont égaux

\rightarrow les cordes BE et $A'C$ sont égales

3) Soit O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$.

Soit $O'G$ perpendiculaire à $B'A'$. Le triangle $O'B'A'$ étant isocèle

$O'G$ est la médiatrice de $B'A' \rightarrow \widehat{O'_1} = 2\widehat{O'_2}$

$\widehat{O'_1} = 2\widehat{C'}$ Angle au centre et angle inscrit $\rightarrow \widehat{O'_2} = \widehat{C'}$

$\widehat{O'_2}$ et A'_4 Sont complémentaires car $\triangle O'GA'$ est rectangle

Or $C_4 = A'_2$ Interceptent le même arc

Et comme on a établi que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables,

on a $C_4 = C' = O'_2 = A'_2$

Finalement, on a donc que A'_2 et A'_4 sont complémentaires

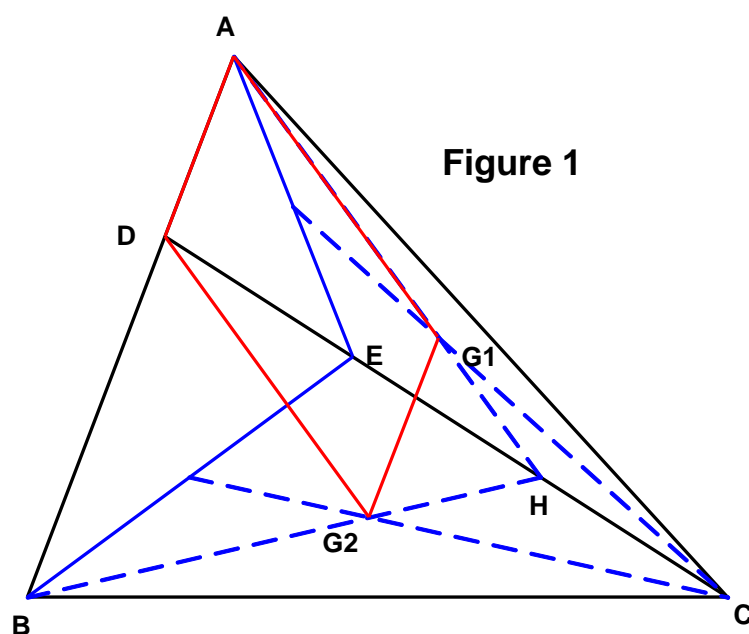
En d'autres termes, $t \equiv O'A'$ est perpendiculaire au diamètre AA'

et t est une tangente

EXGSP067 – Liège, juillet 2002.

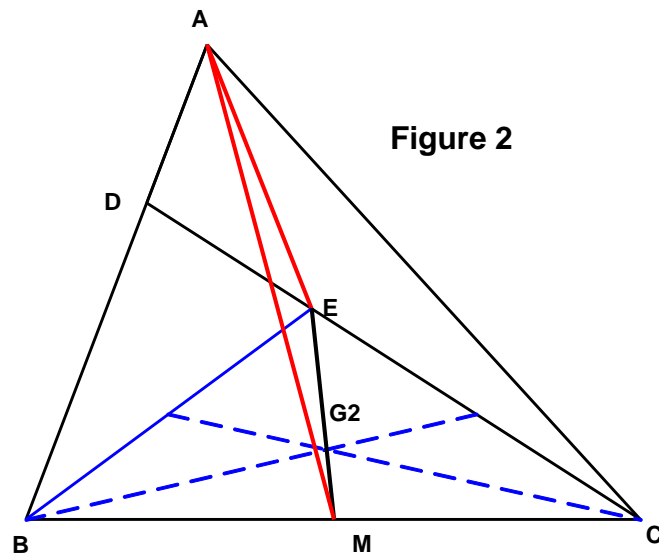
Soit ABC un triangle, D le point du segment $[A, B]$ situés au tiers à partir de A et E le point du segment $[C, D]$ situé au tiers à partir de D . On note G_1 le centre de gravité du triangle AEC et G_2 celui du triangle BEC .

1. Prouver que $\overrightarrow{AD}G_1G_2$ est un parallélogramme
2. Montrer que \overrightarrow{AE} et $\overrightarrow{AG_2}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.



1) $\triangle AHB$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} HG_1 = \frac{1}{3} AH \\ HG_2 = \frac{1}{3} HB \end{array} \right. \rightarrow G_1G_2 // AD \\ \left\{ \begin{array}{l} DA = \frac{1}{3} AB \\ HG_2 = \frac{1}{3} HB \end{array} \right. \rightarrow G_2D // AG_1 \end{array} \right\} \rightarrow ADG_1G_2 \text{ parallélogramme}$$



- 2) Figure 2 : Si \overrightarrow{AE} et $\overrightarrow{AG_2}$ sont multiples l'un de l'autre, alors A , E et G_2 sont colinéaires . Or AM est médiane du triangle ABC , cela revient à dire que E est situé sur la médiane du $\triangle ABC$

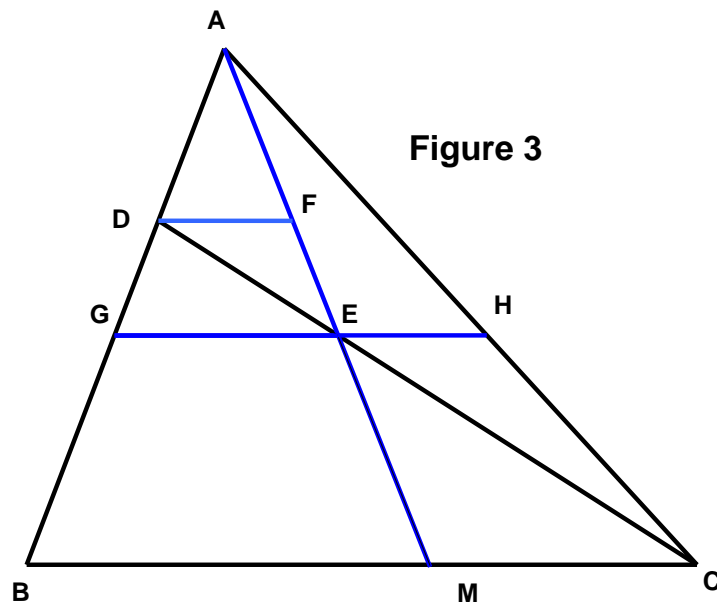


Figure 3 : Montrons que E ne peut pas se situer sur la médiane AM .

Par E traçons la parallèle à BC qui coupe AB en G et AC en H

Par D traçons la parallèle à BC qui coupe EA en F .

Les triangles ABC et AGH sont semblables

$$\triangle DBC \rightarrow |GE| = \frac{1}{3}|BC|$$

$$\triangle ABC \rightarrow |AF| = \frac{1}{3}|AM| \rightarrow |FE| = \frac{2}{3}|FM| = \frac{2}{9}|AM|$$

$$\rightarrow |AE| = |AF| + |FE| = \frac{5}{9}|AM|$$

$$\rightarrow |AG| = \frac{5}{9}|AB| \rightarrow |GH| = \frac{5}{9}|BC|$$

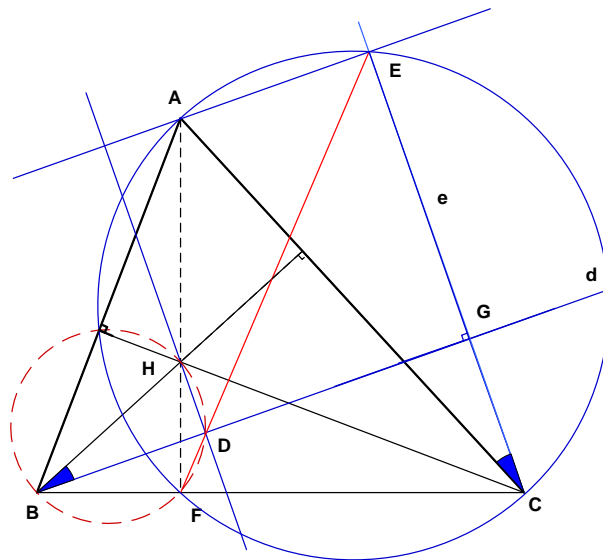
$$\text{Donc } |EH| = |GH| - |GE| = \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right)|BC| = \frac{2}{9}|BC|$$

$$\rightarrow |GE| > |EH| \rightarrow E \text{ n'est pas sur la médiane } AM$$

EXGSP068 – Liège, septembre 2002.

On considère un triangle ABC . On note H son orthocentre et F le pied de la hauteur issue de A . Par B on mène une droite d ; par C on mène une droite e perpendiculaire à d . La parallèle à d passant par A coupe e en E ; la parallèle à e passant par H coupe d en D

- Montrer que les points A, E, F et C sont cocycliques et en déduire que les angles AFE et ACE sont égaux ou supplémentaires
- Montrer que les points H, D, F et B sont cocycliques et que les angles DBH et DFH sont égaux ou supplémentaires
- Montrer que les angles ACE et DBH sont égaux ou supplémentaires
- En déduire que les points D, E et F sont alignés.



$$1) \left\{ \begin{array}{l} \triangle AFC \text{ Rectangle avec } AC \text{ comme hypoténuse} \\ \triangle AEC \text{ Rectangle avec } AC \text{ comme hypoténuse} \end{array} \right\} \rightarrow AECF \text{ cocycliques}$$

$\rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACE}$ car interceptent le même arc

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \triangle BFH \text{ Rectangle avec } BH \text{ comme hypoténuse} \\ \triangle BDH \text{ Rectangle avec } BH \text{ comme hypoténuse} \end{array} \right\} \rightarrow HDFB \text{ cocycliques}$$

$\rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$ car interceptent le même arc

3) $\widehat{ACE} = \widehat{DBH}$ Car ce sont des angles à côtés perpendiculaires
(Des angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires)

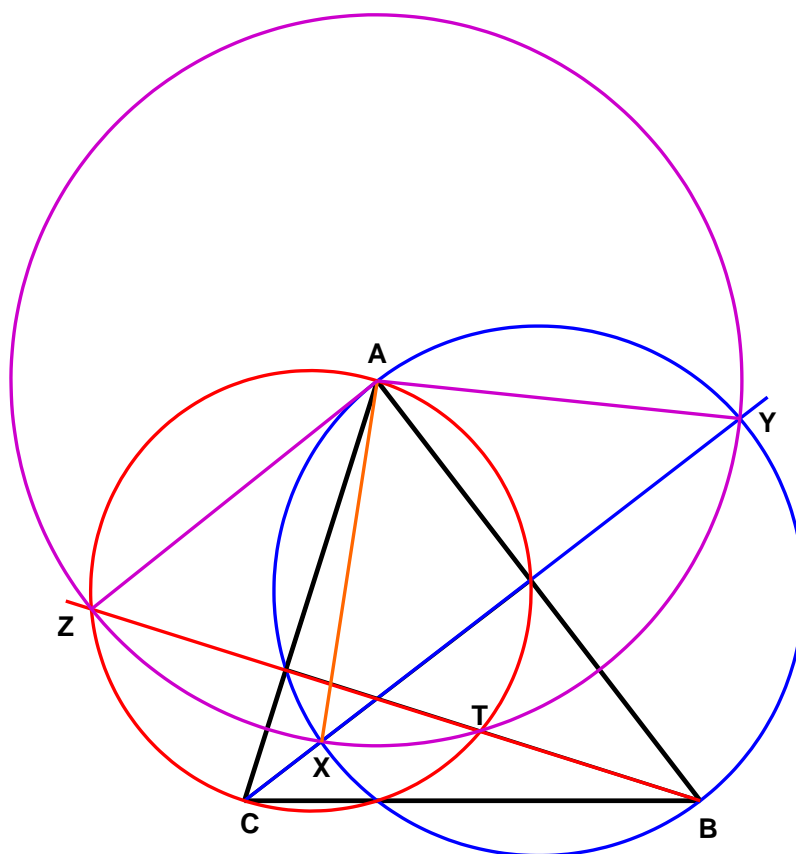
4) Des points précédents, on tire $\widehat{AFE} = \widehat{HFD}$. Ce sont deux angles ayant le sommet et un côté commun, on en déduit que l'autre côté est aussi commun

$\rightarrow F, D$ et E sont des points alignés.

EXGSP069 – Liège, septembre 2002.

Soit ABC un triangle dont l'angle A est aigu. Le cercle de diamètre AB coupe la hauteur issue de C en des points X et Y ; le cercle de diamètre AC coupe la hauteur issue de B en des points Z et T

1. Montrer que $|\overrightarrow{AX}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points X, Y, Z et T sont sur un même cercle, dont on déterminera le centre.



$$\begin{aligned}
1) \left| \overrightarrow{AX} \right|^2 &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}) \cdot \overrightarrow{BX} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX}
\end{aligned}$$

Or CX est perpendiculaire à AB , car CX est une hauteur $\rightarrow \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Et $\triangle AXB$ est rectangle puisque AB est un diamètre $\rightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX} = 0$

Finalement : $\left| \overrightarrow{AX} \right|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

2) Appliquons la relation trouvée au point T : $\left| \overrightarrow{AT} \right|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Par conséquent, $|AT| = |AX|$

D'autre part, Y est le symétrique de X par rapport à $AB \rightarrow |AX| = |AY|$

Et, Z est le symétrique de T par rapport à $AC \rightarrow |AT| = |AZ|$

Donc : $|AX| = |AY| = |AT| = |AZ|$

Les points X, Y, Z et T sont donc sur un même cercle de centre A