

Distance d'un point à une droite.

Calculer la distance entre le point $P : (-8, 7, 3)$ et la droite d qui est perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 3x - 6y + z = 12$ et qui passe par le point $Q : (5, 6, 4)$

1^{ère} méthode.

Plan $\alpha' //$ à α et passant par P :

$$\alpha' = 3x - 6y + z = d \text{ or } P \in \alpha' \Rightarrow 3(-8) - 6(7) + 3 = d \Rightarrow d = -63$$

$$\Rightarrow \alpha' \equiv 3x - 6y + z = -63$$

Droite d :

$$d = \begin{cases} x = 5 + 3s \\ y = 6 - 6s \\ z = 4 + s \end{cases}$$

Point de percée P' de la droite d dans le plan α'

$$P' = d' \cap \alpha' \Rightarrow 3(5 + 3s) - 6(6 - 6s) + 4 + s = -63 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow P' : (2, 12, 5)$$

Distance de P à d

$$d(P, d) = d(P, P') = \sqrt{(2+8)^2 + (12-7)^2 + (3-3)^2} = 5\sqrt{5}$$

2^{ème} méthode

Soient deux points quelconques de d : $Q : (5, 6, 4)$ et $A : (8, 0, 5)$

On a :

$$\overrightarrow{PQ} : (13, -1, 1); \overrightarrow{PA} : (16, -7, 2); \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA} : (5, -10, -75); \|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA}\| = \sqrt{5750}$$

$$\overrightarrow{QA} : (3, -6, 1); \|\overrightarrow{QA}\| = \sqrt{46}$$

La distance est donnée par :

$$d(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PA}\|}{\|\overrightarrow{QA}\|} = \frac{\sqrt{5750}}{\sqrt{46}} = 5\sqrt{5}$$

3^{ème} méthode

Le vecteur directeur unitaire de d est $\overrightarrow{1}_{v_d} : \frac{(3, -6, 1)}{\sqrt{46}}$

On a aussi : $\overrightarrow{PQ} : (13, -1, 1); \|\overrightarrow{PQ}\| = 171$

La distance est donnée par

$$d(P, d) = \sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 - (\overrightarrow{1}_{v_d} \cdot \overrightarrow{PQ})^2} = \sqrt{171^2 - \frac{((3, -6, 1)(13, -1, 1))}{46}} = 5\sqrt{5}$$