Domaine et racines d'une fonction

Domaine

Définition :

C'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquels la fonction existe. (Ce sont donc les x qui possèdent une image y).

Comment déterminer le domaine à partir de son expression analytique ?

1er cas : la fonction contient une fraction

Il faut que le dénominateur soit différent de zéro ➔ On cherche les racines du dénominateur.

Exemple :

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}\Rightarrow CE: x^2-4\neq 0\Rightarrow (x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2\end{cases}$$

Conclusion : $dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

Attention : il ne suffit pas qu'il y ait un dénominateur, il faut que celui-ci puisse être nul.

Exemple :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\Rightarrow CE: x^2+1\neq 0 \text{ est toujours vrai.}$$

(x^2+1 ne se factorise pas) $\Rightarrow\ dom\ f=\mathbb{R}$

Remarque : cette condition engendre l'exclusion de certaines valeurs de x

2ème cas : la fonction contient une racine paire

Il faut que le radicant (l'intérieur de la racine) soit nul ou positif. Dans la plupart des cas, on aura donc une inéquation que l'on résoudra avec un **tableau de signes après factorisation**

Exemple :

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow CE: R(x)=x^2-1\geq 0\Rightarrow R(x)=(x-1)(x+1)\geq 0\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=-1\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline R(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}\Rightarrow dom\ f: \leftarrow,-1]\cup[1,\rightarrow$$

Remarques : 1) cette condition engendre l'exclusion de certains intervalles.
2) une racine au dénominateur cumule les deux conditions.

3ème cas : la fonction contient une tangente ou une cotangente

$$\tan x\Rightarrow\begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq 90°+k180°\end{cases}\qquad \text{et}\qquad \cot x\Rightarrow\begin{cases} x\neq k\pi \\ x\neq k180°\end{cases}$$

4ème cas : fonctions particulières (rhéto et/ou math 6h)

$$\log_a x \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \text{ et } \neq 1 \end{cases} \qquad \sec x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arcsin x \Rightarrow x \in [-1,1] \qquad \operatorname{cosec} x \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$\arccos x \Rightarrow x \in [-1,1]$$

Les racines

Définition :

La racine d'une fonction est la valeur de x qui annule la fonction. Une fonction peut ne pas avoir de racine, ou bien peut en avoir une ou plusieurs voire une infinité.
Sur le graphe de la fonction, les racines sont les intersections du graphe avec l'axe des x.

Comment trouver les racines d'une fonction ?

Il suffit d'annuler le numérateur de la fonction. On est donc ramené à résoudre une équation.

Rappel :

Pour résoudre une équation, on factorise. On ne sépare JAMAIS les x du reste, sauf pour l'équation du PREMIER degré.
Pour factoriser, on essaie dans l'ordre : (Voir Fiche Factorisation)

- La mise en évidence
- Les produits remarquables
- La méthode du ρ ou Δ
- La méthode de Horner

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Remarque : Ne pas oublier de vérifier que les racines obtenues sont compatibles avec le domaine

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2-4} \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Mais $dom\ f : \mathbb{R} \setminus \{-2,+2\} \Rightarrow x=-2$ est rejeté et la seule racine est $x=-3$