ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

GEN-0135

MANUEL DE COURS

René Le, Ph.D.

DÉPARTEMENT DES SCIENCES APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

À propos de l'auteur: René Le possède un doctorat en Physique de l'Université Laval (Québec) et une Maîtrise en Électronique Électrotechnique Automatique de l'Université de Nice (France). Professeur à l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue depuis 1986, il intervient dans les programmes de génie de l'École Polytechnique de Montréal et du Baccalauréat en électromécanique de l'UQAT. Il s'intéresse à la commande vocale et par conséquent au traitement anti-bruit avant l'entrée dans l'ordinateur. Il programme en langage C/C++.

Ce manuel a été préparé avec Microsoft Office 2000 sur une machine Pentium II –333 Mhz possédant 256 megs de ram et fonctionnant sous Windows 2000 professionnel.

Equations différentielles

1. Notions de dérivée partielle et de différentielle totale.
2. Concepts fondamentaux – Champs de direction.
3. Equations à variables séparables – ou pouvant s'y ramener.
4. Modélisation – Application de la méthode de la séparation des variables aux problèmes physiques.
5. Modélisation – Application de la méthode de la séparation des variables aux problèmes physiques (suite).
6. Equations exactes – Facteurs intégrants.
7. Les équations différentielles linéaires et l'équation de Bernoulli.
8. Application des équations linéaires aux circuits électriques simples.
9. Equations différentielles du $2^{ème}$ ordre homogène.
10. Equations linéaires homogènes de $2^{ème}$ ordre coefficients constants.
11. Application des équations différentielles du second ordre aux systèmes mécaniques.
12. Les équations d'Euler-Cauchy.
13. Existence, unicité, indépendance linéaire et Wronskien.
14. Equations non-homogènes : procédure générale pour déterminer les solutions.
15. Equations non-homogènes : méthode des coefficients indéterminés.
16. Equations non-homogènes : méthode de la variation des paramètres.
17. Application des méthodes de recherche de la résolution singulière aux systèmes mécaniques en translation et aux systèmes électriques.
18. Equations différentielle linéaires d'ordre $N > 2$.
19. Equations différentielles linéaires d'ordre $N > 2$ à coefficients constants.
20. La transformée de Laplace.
21. Transformation de Laplace pour les dérivées et les intégrales de fonction. Application aux équations différentielles.
22. Translation dans l'espace des temps et translation dans l'espace des phases.
23. Transformée de Laplace de la fonction de Dicrac (Fonction delta).
24. Dérivée et intégrale d'une transformée de Laplace.
25. La technique des fractions partielles.
26. Système d'équations différentielles : résolution par élimination des équations d'ordre > 1.

27. Systèmes d'équations différentielles : concepts fondamentaux.
28. Systèmes d'équations différentielles linéaires, homogènes, et à coefficients constants.
29. Méthode des plans de phase. Points critiques et notion de stabilité d'un système.
30. Application de la méthode des plans de phase : le mouvement d'un pendule.
31. Systèmes d'équations différentielles linéaires et non-homogènes : méthode des coefficients indéterminés.
32. Résolution des systèmes d'équations différentielle linéaires non-homogènes.
33. Systèmes d'équations différentielles linéaires non-homogènes.
34. Séries et intégrales de Fourier.
35. Coefficients de Fourier.
36. Séries de Fourier. Fonctions périodiques 2L.
37. Séries de Fourier. Fonctions paires et fonctions impaires.
38. Equations aux dérivées partielles. Concepts de base.
39. Equation de la corde vibrante et équation d'onde.
40. Résolution de l'équation d'onde par séparation des variables.
41. Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables.
42. Résolution de l'équation de la chaleur (suite).
43. Membrane vibrante et équation d'onde à deux dimensions.
44. Membrane rectangulaire.
45. Laplacien en coordonnées polaires.

1. NOTIONS DE DÉRIVÉE PARTIELLE ET DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE

1.1. *Notions élémentaires de dérivée partielle*

Lorsqu'une fonction n'est dépendante que d'une seule variable $y=f(x)$, on parle de dérivée simple (lorsqu'elle peut être déterminée) par la quantité suivante:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et que l'on note aussi par: $f'(x_0) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_0}$

Lorsque la fonction est dépendante de plus d'une variable $z=f(x,y)$, chaque dérivée par rapport à l'une ou l'autre des variables est appelée une dérivée partielle:

$$f_x(x_1, y_1) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x, y_1) - f(x_1, y_1)}{x - x_1}$$

Notez l'indice x qui indique la dérivée par rapport à la variable et qui remplace le prime (').

De même, la dérivée partielle par rapport à la seconde variable s'écrit:

$$f_y = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} = \lim_{y \to y_1} \frac{f(x_1, y) - f(x_1, y_1)}{y - y_1}$$

Et que l'on note aussi sous la forme:

$$f_y(x_1, y_1) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)}{\Delta y}$$

Le Delta (Δ) dénote la petite distance de y à y_1

Évidemment, la valeur de la dérivée partielle f_x ou f_y dépend du point (x_1,y_1) considéré. Pour effectuer un dérivée partielle par rapport à une variable x, il suffit, dans la dérivation, de considérer l'autre variable y comme une constante.

EXEMPLE 1 :

Soit la fonction à 2 variables suivante:

$$z = f(x, y) = x^2 y + x \sin y$$

Si on veut obtenir la dérivée partielle de f par rapport à x, on doit considérer comme si $y=k$, et la dérivée partielle retourne alors à la notion de dérivée simple pour une variable.

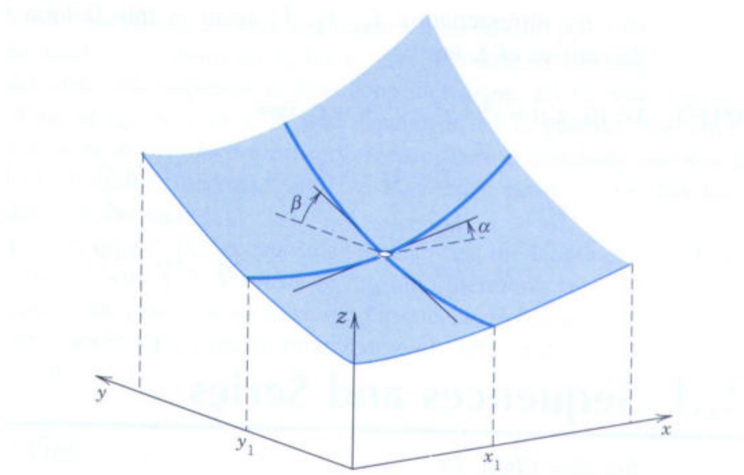
$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \sin y$$

de même:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y$$

1.2. Interprétation géométrique des dérivées partielles

Dans la figure, il faut voir que la fonction $f(x,y)$ constitue une surface si les axes de base sont x et y. Dès lors la dérivée partielle f_x est la tangente à la surface $f(x,y)$ au point considéré (x_1,y_1), dirigé suivant l'axe des x. De même la dérivée partielle f_y est la tangente à la surface $f(x,y)$ au point considéré (x_1,y_1), dirigé suivant l'axe des y.



1.3. Dérivées partielles secondes :

Les dérivées partielles précédentes sont dite d'ordre 1, lorsqu'on on a dérivé une seule fois, que ce soit par rapport à l'une ou l'autre variable. En différentiant à nouveau les fonctions[1] obtenues une autre fois, on obtient des dérivées partielles secondes (ou dérivées partielles de second ordre) et qui sont notées de la façon:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

[1] *Attention : on calcule la dérivée d'une fonction à partir de son expression, pour obtenir une autre expression, et non pas à partir de la valeur prise par la fonction en un point donné. Ainsi on dérive f(x)=2x pour trouver l'expresssion f'(x)=2, mais on ne dérive pas f(x=4)=2x4=8 pour trouver que f'(x)=0 en tout temps, ce qui est complèment absurde. Dériver, c'est dériver une fonction, pas une valeur!*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Notez l'ordre d'écriture des indices.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

Théorème :

Si les dérivées secondes sont continues, alors les dérivées secondes croisées sont égales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

c'est à dire que l'ordre de dérivation n'est pas importante.

EXEMPLE 2 :

Soit à calculer les dérivées secondes partielles pour la fonction 2 variables suivante (même fonction qu'à l'exemple 1) :

$$z = f(x, y) = x^2 y + x \sin y$$

nous avions déjà obtenues les dérivées premières suivantes

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \sin y \longrightarrow f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y$$

$$\searrow f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x + \cos y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y \longrightarrow f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \sin y$$

$$\searrow f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x + \cos y$$

1.4. Dérivées partielles d'une fonction à plus de deux variables :

Lorsque la fonction comporte plus que deux variables, il suffit de considérer toutes les autres variables comme des constantes afin de réaliser les dérivées partielles par rapport à une variable donnée.

$$f_x(x_1, y_1, z_1) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1, z_1)} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)}{x - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x}$$

EXEMPLE 3 :

Soit à trouver les dérivées partielles de premier et de second ordre de la fonction à trois variables suivante :

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.e^z$$

SOLUTION :

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y.e^z \qquad f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x.e^z \qquad f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + xy.e^z$$

$$f_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2 \qquad f_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2 \qquad f_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 2 + xy$$

$$f_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = e^z \qquad f_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x.e^z \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = y.e^z$$

on peut aussi vérifier que les dérivées partielles croisées sont les mêmes :

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y.e^z \qquad f_{yx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^z \qquad f_{zy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = x.e^z$$

1.5. Différentielle totale :

La différentielle totale d'une fonction est la somme des dérivées partielles par l'accroissement due à chacune des variables :

Soit par exemple la fonction à trois variables suivante :

$$w = f(x, y, z)$$

la différentielle totale est alors:

$$\Delta w = \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}.\Delta z = f_x.\Delta x + f_y.\Delta y + f_z.\Delta z$$

En somme il s'agit du produit scalaire entre le vecteur des dérivées partielles qu'on appelle le gradient et le vecteur des accroissements :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}(f) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} \right. \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \left| \begin{matrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{matrix} \right. \qquad \Rightarrow \Delta w = \vec{\nabla}(f) \bullet \overrightarrow{\Delta r}$$

Géométriquement on peut voir que la différentielle totale est le déplacement total selon les déplacements infinitésimaux le long de chacun axes.

EXEMPLE 4 :

Soit à exprimer la différentielle totale de la fonction suivante :

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.e^z$$

SOLUTION :

$$\Delta w = \Delta f(x, y, z) = f_{x'}.\Delta x + f_{y'}.\Delta y + f_{z'}.\Delta z$$

$$\Delta f(x, y, z) = (2x + y.e^z).\Delta x + (2y + x.e^z).\Delta y + (2z + xy.e^z).\Delta z$$

EXERCICES

Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $f(y, z) = 2y^2z^3$.
3. $f(x, y, z) = 6x + 3y^2 + 3z.e^{x+y}$.
4. $f(x, y, z) = x + y^2 + xy\cos z$.

2. CONCEPTS FONDAMENTAUX - CHAMPS DE DIRECTION

2.1. Définitions :

Une équation différentielle est une équation où apparaît une ou plusieurs dérivées de la variable à résoudre.

Une équation différentielle est dite **ordinaire** si la variable à résoudre n'est dépendante que d'une seule autre variable.

L'**ordre** d'une équation différentielle dépend de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation. Par exemple une équation différentielle du premier ordre ne contient que la dérivée première et possiblement la fonction elle-même. Une équation du 2ème ordre contient obligatoirement la dérivée seconde et possiblement la fonction et la dérivé première.

Une équation différentielle est dite **linéaire** si elle est formée par une combinaison linéaire de la variable et de ses dérivées.

Forme **implicite** d'une équation différentielle :

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}$$

par exemple : $2x + y' + 2y = 0$

Forme **explicite** d'une équation différentielle :

$$\boxed{F(x, y) = y'}$$

par exemple : $-2x - 2y = y'$

2.2. Notion de solution :

La **solution** d'une équation différentielle est une **fonction** *h(x)*, c'est à dire une expression explicite de la combinaison de la variable *x* (dans laquelle la dépendance envers la variable *y* a disparu) et qui substitué à *y* dans l'équation, satisfait cette équation dans une plage de valeurs de la variable : $a<x<b$.

EXEMPLE 1 : SOLUTION EXPLICITE

La devinette est (l'équation différentielle):

$$xy' = 2y$$

Devinez une fonction *h(x)* qui une fois substituée à *y* vérifie bien cette équation.

SOLUTION :

Bien sûr, pour l'instant , on essaie de deviner un peu au hasard, mais nous verrons que nous sommes ici pour apprendre une méthode systématique de résolution de ce genre d'équations.

Donc si on essaie de substituer : $y = h(x) = x^2$

Nous allons voir que : $y' = h'(x) = 2x$

Et alors : $x(2x) = x^2$

Donc, nous dirons que $h(x) = x^2$ est solution explicite de l'équation.

EXEMPLE 2 : SOLUTION IMPLICITE

Soit à trouver une solution pour l'équation suivante :

$$yy' = -x$$

SOLUTION :

Nous pouvons voir que l'expression suivante est solution de l'équation ci-dessus :

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

En effet, il suffit de réarranger sous la forme $y^2 = 1 - x^2$ et de dériver les 2 membres de cette égalité par rapport à la variable *x* pour voir qu'elle vérifie bien l'équation de départ :

$$2y'y^2 = 0 - 2x \, .$$

RÉCAPITULATION :

- Quand on trouve une solution sous la forme : $h(x, y) = 0$, on parle de **solution implicite**.
- Si par contre la solution se présente sous la forme : $y = h(x)$, on parle alors de **solution explicite**.

Ainsi la solution implicite précédente : $h(x, y) = y^2 + x^2 - 1 = 0$ a pour expression explicite : $y = h(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Mais on voit que le passage de la forme implicite à la forme explicite n'est pas toujours biunivoque.

2.3. Différentes solutions?

Dans ce cours nous allons distinguer les différentes formes de solution, car pour une même équation, nous allons parler de la solution homogène ou de fonction complémentaire (general solution), de solution singulière (singlar solution), de solution générale (general solution), puis de solution particulière (particular solution).

Comme le libellé de ces termes a changé depuis le siècle précédent, il est important de bien signifier que vous parlez des mêmes choses lorsque vous communiquerez avec vos collègues ingénieurs de l'ancienne école.

Ainsi ils vous parlerons de cette façon :

Ce qu'ils voulaient vous signifier	Ils utiliseront le terme	Ce qui signifiera pour vous
Solution de l'équation sans second membre	Solution **générale** **General** solution	Solution homogène Solution complémentaire
Solution insolite de l'équation avec second membre.	Solution **particulière** **Particular** solution	Solution singulière Singular solution
Solution complète de l'équation avec second membre	Solution générale General solution	Solution générale General solution
Solution avec les contraintes des conditions initiales	Solution **particulière** **Particular** solution Solution **spécifique**	Solution particulière

Vous allez apprendre à démêler ces termes ci-après.

2.4. Méthodologie générale de résolution d'une équation différentielle :

Les équations différentielles nous servent pour modéliser le processus physique (sous forme d'une équation-devinette), puis de trouver les expressions mathématiques (les solutions) qui vont décrire le comportement futur de l'objet. Notre rôle d'ingénieur consiste à simuler les résultats avant de constater bêtement que le pont tombe alors qu'on est en train de le construire.

1ère étape : modéliser

L'équation différentielle qui représente le phénomène physique se présentera sous la forme générale :

$$\alpha(x).y'+\beta(x).y = f(x)$$

Équation avec second membre

Il s'agit là d'une équation avec le second membre $f(x)$ qui est l'entrée forcée du système.

2ème étape : trouver d'abord la solution de l'équation homogène (sans le second membre) associée

Il s'agit de trouver une fonction $h(x)$ qui satisfasse l'équation dite homogène:

$$\alpha(x).y'+\beta(x).y = 0$$

Équation homogène

$$\alpha(x).h'(x)+\beta(x).h(x) = 0$$

Solution homogène

3ème étape : Chercher une fonction singulière qui satisfasse l'équation générale avec second membre

Il s'agit de trouver $s(x)$ tel que :

Solution singulière

$$\alpha(x).s'(x)+\beta(x).s(x)=f(x)$$

4ème étape : former la solution générale

On montrera que la combinaison des solution homogène et singulière est aussi solution de l'équation générale. Donc, si $g(x)=h(x)+s(x)$, $g(x)$ satisfait :

Solution générale

$$\alpha(x).g'(x)+\beta(x).g(x)=f(x)$$

5ème étape : introduire les conditions de initiales pour déterminer la solution particulière

L'introduction des conditions initiales nous fait passer d'une solution générale vers une solution particulière selon les conditions (particulières) au départ.

EXEMPLE 4 : DÉCROISSANCE RADIOACTIVE

Soit le problème de décroissance exponentielle d'un élément radioactif. On constate que la variation de quantité de matière radioactive est proportionnelle à la quantité initiale.

1ère étape : modéliser

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k.y$$

par exemple, on a mesuré que $k=-1.4\times10^{-11}\quad \sec^{-1}$ dans le cas du Radium 226 :

Masse atomique de l'isotope

$${}_{88}Ra^{226}$$

Numéro atomique (nombre de protons)

Le signe négatif indique que la variation est décroissante, c'est à dire une diminution progressive de la quantité de matière originale. L'équation se pose alors sous la forme :

$$y'=k.y \quad\Rightarrow\quad y'-k.y=0$$

On voit alors qu'on a affaire une équation sans second membre. Recherchons d'abord la solution homogène.

2ème étape : trouver d'abord la solution de l'équation homogène (sans le second membre) associée

$$y'-k.y=0 \longrightarrow y_h=C_1e^{k.t}$$

$3^{ème}$ étape : Chercher un fonction singulière qui satisfasse l'équation générale avec second membre

Dans ce cas-ci l'équation générale avec second membre est aussi l'équation homogène puisque le second membre est nul. De plus la solution singulière est dans ce cas-ci :

$$y' - k.y = 0 \longrightarrow y_s = 0$$

$4^{ème}$ étape : former la solution générale

La solution générale est alors :

$$y_g = y_h + y_s = C_1 e^{k.t} + 0$$

$5^{ème}$ étape : introduire les conditions de initiales pour déterminer la solution particulière

Et la solution particulière, à cause de la condition de départ imposé par $y_g(0) = 2$ permet de fixer la constante C_1 :

$$\left.\begin{array}{l} y_g(t) = C_1 e^{k.t} \\ y_g(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

d'où la **solution particulière**:

$$y_p(t) = 2e^{k.t}$$

2.5. Résolution par la méthode des champs directeurs

Dans le cas d'impossibilité de trouver une solution sous forme analytique exacte, ou que la solution est trop compliqué à trouver sous forme analytique, on utilise une méthode d'approximation qui donne une solution approchée des points qui satisfont à l'équation de départ. Nous allons voir ici une première technique, celle des champs directeurs. Pour cela, il faut absolument que le problème pose une condition initiale, un point par où doit passer la courbe.

Cette méthode s'applique donc dans le cas où le problème peut être présenté sous la forme suivante :

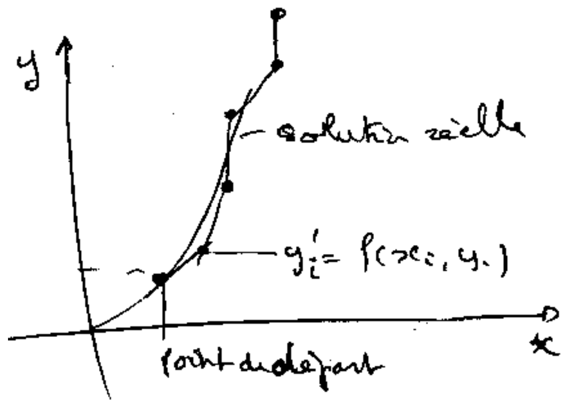
$$\boxed{\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

Si la courbe passe par le point $P(x_o, y_o)$, la pente en ce point est : $y_o' = f(x_o, y_o)$. Pour déterminer les points suivants, on progresse de proche en proche en estimant la position du point suivant à partir d'une extrapolation linéaire grâce à la tangente au point courant. Ainsi, pour déterminer le point $P(x_1, y_1)$, on se sert de la pente au point $P(x_o, y_o)$ de la façon suivante :

$$\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = y'_o = f(x_o, y_o) \quad \Rightarrow \quad y_1 = (x_1 - x_o) \times f(x_o, y_o) + y_o$$

Ainsi en fixant x_1, on obtient y_1 par l'extrapolation linéaire ci-dessus. Ensuite on enfourne de nouveau le couple (x_1, y_1) dans l'équation d'origine pour trouver la nouvelle pente $y_1' = f(x_1, y_1)$.

On obtient alors l'allure de la courbe suivante :



Traçage du champ de directions à l'aide de l'ordinateur :

Certains logiciels comme Mathlab, Mathcad ou Maple, peuvent tracer ce champ de directions pour vous si vous lui fournissez l'équation. Le logiciel va calculer pour une multitude de points du plan (x, y), les pentes qu'il affiche par une petite flèche pour indiquer la direction de la pente en ce point. Le résultat est un champ de directions. Si en plus, vous fournissez la condition initiale, le logiciel peut tracer la solution graphique pour vous, selon le procédé décrit ci-dessus qui est tout simplement implanté dans le logiciel.

Nous y reviendrons dans une démonstration avec le logiciel MapleV.

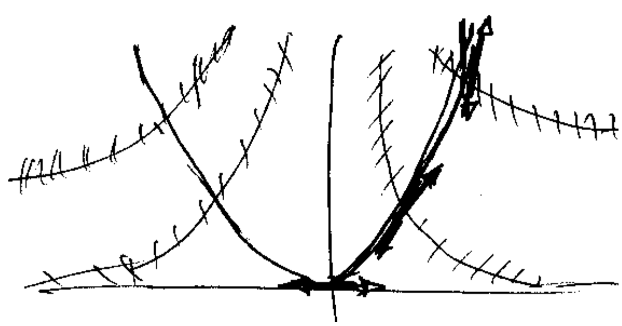
Traçage du champ de directions à la mitaine - les courbes isoclines :

À défaut de manipuler l'ordinateur, nous allons procéder de la façon suivante pour tracer une solution graphique pour une équation déterminée.

1ère étape : Tracer les courbes isoclines :

De cette façon nous aurons des courbes le long desquelles la pente est toujours la même. Attention à ne pas vous mêler, ces courbes ne sont pas les solutions que vous recherchez. Ce ne sont que des aides pour arriver à tracer la courbe solution.

$$F(x, y) = cte.$$



Tracez ces courbes pour différentes valeurs de la constante.

2ème étape : Tracer les petits segments de pente le long des courbes isoclines :

Le long de chacune de ces courbes, tracer un petit segment de pente, pour donner la direction (=const).

3ème étape : Tracer approximativement la solution en partant de la condition initiale.

Selon la condition initiale imposée $y(x_0) = y_0$, vous disposez alors du point de départ (x_0, y_0) dans le plan (x, y). Ce point se trouve sur une des courbes isoclines qui vous donne la direction de poursuite. Le tracé de la pente vous projette vers un point (x_1, y_1) sur la courbe isocline suivante. La nouvelle pente de la seconde courbe isocline vous projettera de nouveau vers le point (x_2, y_2) …et ainsi de suite. Ainsi vous obtiendrez une esquisse de la solution sous forme géométrique. C'est ce qu'on appelle une solution graphique.

Certains logiciels, comme MapleV, peuvent vous aider d'abord à calculer une solution numérique (une suite de couples (x, y)) avant de tracer la courbe pour vous. Bien sûr ce logiciel permet aussi de résoudre de façon analytique dans les cas simples pour vous (une solution sous forme d'une expression mathématique en lieu d'une suite de points).

Voici donc un exemple de résolution graphique qui combine aussi un peu de calculs pour connaître plus précisément la pente au point suivant.

EXEMPLE 5 :

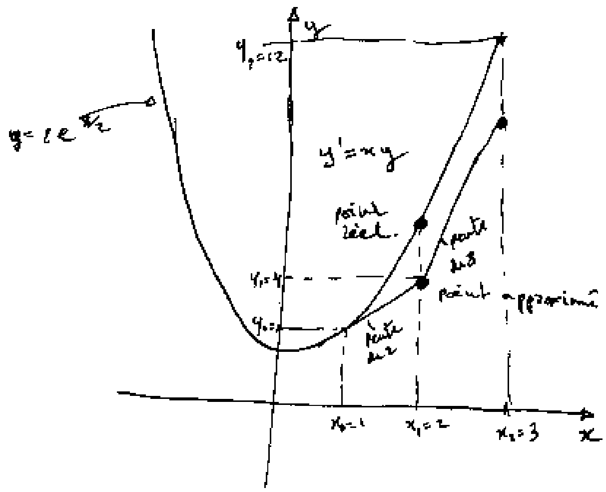
Soit l'équation : $y' = xy$. On nous donne aussi la condition que la courbe doit passer par le point $(x, y) = (1,2)$. La solution spécifique et analytique serait $y = 2.e^{\frac{x^2-1}{2}}$. Nous allons essayer de faire comme si nous ne savions pas la résoudre de façon analytique et procéder avec la méthode des champs directeurs.

SOLUTION :

On commence par se donner un pas de calcul, c'est à dire un espacement entre les valeurs de x. Choisissons ce pas $h = x_{i+1} - x_i$ égal à 1. Ainsi le point $(x_0, y_0) = (1,2)$ indique une pente $y_0' = x_0 y_0 = 1 \times 2 = 2$. Cette pente va nous permettre d'extrapoler linéairement le point suivant (x_1, y_1) par la relation suivante:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + h \\ y_1 = y_0 + y_0' h \end{cases}$$

On réévalue ensuite la nouvelle pente au point $(x_1, y_1) = (2,4)$ par $y_1' = x_1 y_1 = 2 \times 4 = 8$. Ce qui nous permet maintenant d'extrapoler linéairement le point (x_2, y_2) à partir de (x_1, y_1) et de la nouvelle pente y_1'.



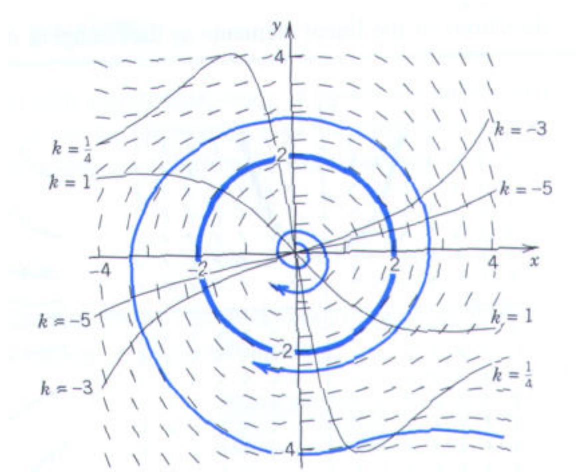
Ainsi de suite.

EXEMPLE 6: ÉQUATION DE VAN DER POL

Soit à résoudre graphiquement l'équation suivante : $y' = 0.1(1-x^2) - \frac{x}{y}$

SOLUTION :

Tracer d'abord les courbes isoclines comme indiquées par la procédure. Le résultat est une famille de spirales :



RÉSUMÉ DE LA PROCÉDURE :

1) Évaluer la dérivée (i.e. la pente) à partir du point initial (x_0, y_0) donné dans le problème:

$$y_o' = f(x_o, y_o)$$

2) Fixer un pas de progression h . Plus ce pas est petit, davantage de calculs il y aura pour trouver les points suivants, mais moins il y aura d'écart entre la courbe approximée et la courbe réelle.

3) Calculer le point suivant (x_{i+1}, y_{i+1}) par $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + y_i'.h \end{cases}$

4) Répéter 3) pour atteindre un tracé suffisant de la courbe.

EXERCICES

Trouver les solutions des équations simples (ces équations ne comportent pas de terme en y lui-même) suivantes par intégration directe :

1. $y' = x^2$

2. $y' = \sin 2x$

3. $y'' = x^{-4}$

4. $y' = xe^{-x^2}$

Vérifier que la fonction qui suit chaque équation est bien la solution de ladite équation.

5. $y' + y = x^2 - 2$, $\quad y_g = ce^{-x} + x^2 - 2x$.

6. $y'' + y = 0$, $\quad y_g = a\cos x + b\sin x$.

7. $y''' = e^x$, $\quad y_g = e^{-x} + ax^2 + bx + c$.

8. $y'' + 2y + 2y = 0$, $\quad y_g = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$.

9. $x + y'y = 0$, $\quad x^2 + y_g^2 = 1$.

Appliquer la méthode des champs directeurs pour tracer la solution graphique (sur papier millimétré) pour les équations suivantes:

10. $\begin{cases} y' = 3\dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0{,}5) = 1{,}5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9yy' + x = 0 \\ y(2) = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$

3. ÉQUATIONS À VARIABLES SÉPARABLES – OU POUVANT S'Y RAMENER

3.1. Équations de la forme $g(y)y' = f(x)$

Plusieurs équations différentielles du premier ordre peuvent se présenter sous la forme:

$$\boxed{g(y)y' = f(x)}$$

On parle alors d'une équation à variables séparables puisque toutes les expressions de la variable indépendante sont d'un côté de l'égalité et toutes les expressions de l'inconnue de l'autre côté.

Puisque par définition:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

on peut alors récrire plus convenablement en séparant les termes différentiels:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Pour résoudre cette équation, il suffit alors d'intégrer des deux côtés:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

Les primitives $G(y)$ et $F(x)$ existent si les fonctions $g(y)$ et $f(x)$ f sont continues et on obtient alors la solution pour y en fonction de x.

EXEMPLE 1:

Soit à résoudre l'équation suivante: $9yy' + 4x = 0$

SOLUTION:

On commence par mettre l'équation sous forme à variables séparées:

$$9yy' = -4x$$
$$9ydy = -4xdx$$
$$\int 9ydy = \int -4xdx + C$$

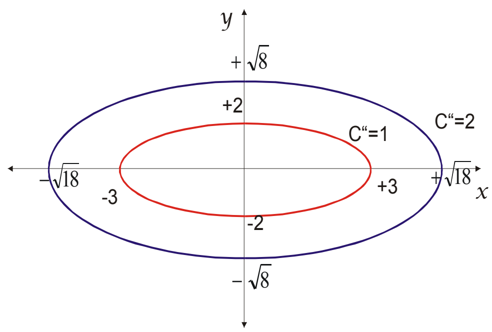
d'où la forme implicite de la solution:

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + C$$

ou encore $$\frac{9}{4}y^2 + x^2 = C'$$

ou encore $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C''$$

Graphiquement, et selon la valeur de la constante C (ou C' ou C"), il s'agit d'une famille d'ellipses.



EXEMPLE 2:

Trouver la solution pour l'équation suivante: $y' = 1 + y^2$

SOLUTION:

Toujours en cherchant à séparer les variables :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{1 + y^2} = \partial x$$

Puis en intégrant des deux cotés :

$$\arctan y = x + c$$

d'où la solution explicite :

$$y = \tan(x + c)$$

Surtout, il ne faut pas oublier d'introduire la constante dès l'intégration, car le fait de « pitcher » n'importe comment cette constante ne constitue pas pour autant une solution (c'est ce qui arrive à quelques uns qui ont les neurones court-circuités en pensant que $\tan(x + c) = \tan(x) + \tan(c)$, ce qui est complètement faux). Vérifiez que $y = \tan(x) + c$ n'est pas une solution valide (à moins que $c = 0$).

EXEMPLE 3: CROISSANCE ET DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

La croissance et la décroissance exponentielle est régie par l'équation suivante :

$$y' = ky$$

et dépend de la valeur positive ou négative de k .

SOLUTION:

séparer les variables :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ky \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{y} = k.\partial x$$

Puis en intégrant des deux cotés :

Ne pas oublier de ne considérer que la valeur absolue de y. Sinon le logarithme d'une valeur négative n'existe pas!

$$\ln|y| = k.x + \tilde{c}$$

d'où la solution explicite , en prenant l'exponentielle des deux cotés.

$$e^{\ln|y|} = e^{kx+\tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{kx}e^{\tilde{c}}$$

Et en posant $c = e^{\tilde{c}}$, nous obtenons la solution générale (pensez que le signe est absorbé dans c):

$$y = ce^{kx}$$

Si k est négatif nous avons une exponentielle décroissante. Si k est positif nous avons une croissance exponentielle.

EXEMPLE 4: PROBLÈME AVEC VALEUR INITIALE

Soit à trouver la solution particulière pour le problème avec valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

SOLUTION:

Toujours effectuer la séparation des variables :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial x}{x}$$

Soit en intégrant des deux cotés de l'égalité :

$$\ln|y| = -\ln|x| + \tilde{c} = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + \tilde{c}$$

Puis en prenant l'exponentielle des 2 cotés :

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)+\tilde{c}} \quad \Rightarrow \quad |y| = \frac{c}{|x|}$$

Soit encore, en enlevant les restrictions sur le signe de y :

$$y = \frac{c}{x}$$

Au besoin, le signe est absorbé dans la constante c. Ce que nous obtenons est la solution générale. Pour obtenir la solution particulière, il suffit d'introduire la condition initiale pour fixer la valeur de la constante :

$$(y=1) = \frac{c}{(x=1)} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Et la solution particulière est :

$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

EXEMPLE 5: PROBLÈME AVEC VALEUR INITIALE - COURBES EN CLOCHE

Soit à solutionner :

$$\begin{cases} y' = -2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Comme toujours, cherchons à séparer les variables :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{y} = -2x\partial x$$

Soit par intégration :

$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad y = ce^{-x^2}$$

Selon la valeur de la constante c, ce sont toutes des courbes en cloche de différentes hauteurs. Si la condition initiale nous est imposée, cela conduit à une solution particulière :

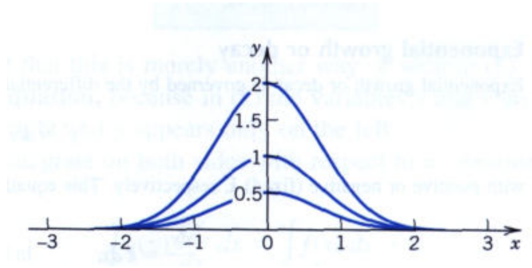
$$(y=1) = ce^{-(x=0)^2} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Toujours encadrer le résultat final qu'on vous a demandé.

d'où la solution recherchée :

$$\boxed{y = e^{-x^2}}$$

Le résultat est une famille de courbes en cloche. La hauteur de la cloche dépend de la constante c.



3.2. Équations de la forme $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

Certaines équations n'ont pas une forme à variables séparées évidente, mais peuvent s'y ramener après un changement adéquat de la variable. C'est le cas des équations de type :

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Pour cela, il suffit de poser $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x.u \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$, de sorte que l'équation devient :

$$u + xu' = g(u)$$

On peut dès lors appliquer la méthode des variables séparables :

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

EXEMPLE 6:

Soit à résoudre l'équation suivante : $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

SOLUTION:

D'abord, il s'agit de montrer qu'il s'agit d'une équation de la forme $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ en divisant le tout par x^2 :

$$2\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0$$

Que l'on peut identifier sous la forme : $y'=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. On voit alors qu'il s'agit bien d'une équation de la forme souhaitée. Il suffit à présent de faire le changement de variable indiqué :

$$2u.(u+xu')-u^2+1=0$$

Soit encore :

$$2xuu'+u^2+1=0$$

La séparation des variables nous donne alors :

$$\frac{2udu}{1+u^2}=-\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1+u^2\right)=-\ln|x|+\widetilde{C} \quad \Rightarrow \quad 1+u^2=\frac{C}{x}$$

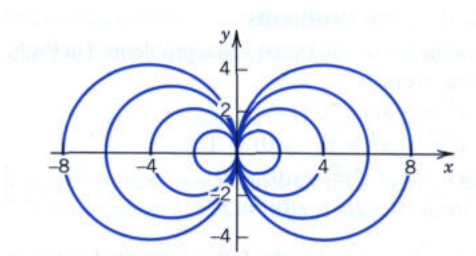
Et en réintroduisant la variable originelle qu'on cherchait :

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=Cx$$

Ou encore:

$$\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}$$

Le résultat est une famille de cercles dont le bord est sur l'axe y.



RÉCAPITULATION DE LA MÉTHODE :

1) Reconnaître la forme $y'=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2) Poser $u=\dfrac{y}{x}$.

3) Résoudre $\dfrac{du}{g(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$

4) Substituer de nouveau tout ce qui est u par $\dfrac{y}{x}$ pour avoir la solution finale.

3.3. Changement de variable de la forme $v=ax+by+k$

Parfois un changement de variable de la forme ci-indiquée permet de ramener l'équation à la forme à variables séparables.

EXEMPLE 7 :

Forme non-linéaire de l'équation à cause du produit 4yy'.

Soit à résoudre : $(2x-4y+5)y'+x-2y+3=0$

SOLUTION:

Le fait de voir $2x-4y$ et $x-2y$ nous suggère le changement de variable : $v=x-2y+\dfrac{5}{2}$. Dès lors, en dérivant v nous obtenons aussi:

$$v'=1-2y' \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1-v'}{2}$$

Et maintenant, en substituant tout ce qui est y et y' par v et v' préparés ci-dessus dans l'équation de départ, nous avons:

$$(2v)\left(\frac{1-v'}{2}\right)+v-\frac{5}{2}+3=0$$

soit :

$$v-vv'+v-\frac{5}{2}+\frac{6}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad 2v-vv'+\frac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad vv'=2v+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2v}{4v+1}\right)v'=1$$

ce qui est bien de la forme reconnaissable $g(y)y'=f(x)$.

Il faut de nouveau mettre sous une forme plus exploitable avant de faire la séparation des variables :

$$\left(\frac{4v}{4v+1}\right)v'=2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4v+1-1}{4v+1}\right)v'=2 \quad \Rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{4v+1}\right)v'=2$$

finalement :

$$\left(1-\frac{1}{4v+1}\right)\partial v = 2\partial x \quad \Rightarrow \quad v-\frac{1}{4}\ln\left|4v+1\right| = 2x+\tilde{c} \quad \Rightarrow \quad 4v-\ln\left|4v+1\right| = 8x+c^*$$

soit après substitution de y :

$$4\left(x-2y+\frac{5}{2}\right)-\ln\left|4\left(x-2y+\frac{5}{2}\right)+1\right| = 8x+c^* \quad \Rightarrow \quad 4x-8y-\ln\left|4x-8y+11\right| = 8x+c^*$$

d'où le résultat cherché :

$$\boxed{4x+8y+\ln\left|4x-8y+11\right| = c}$$

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équation suivantes :

1. $y + 2y' = 0$.

2. $yy' + 25x = 0$

3. $y' = 1 + 0.01y^2$.

4. $y' + 2x^2y^2 = 0$.

5. $y' = xy/2$.

6. $y' = -ky^2$.

Trouver la solution en faisant le changement de variable $u = \dfrac{y}{x}$ pour les équations suivantes:

7. $xy' = y^2 + y$.

8. $xy' = x + y$.

9. $y' = \left(x^2 + y^2\right)/xy$.

Trouver la solution en faisant le changement de variable $v = ax + by + k$ pour les équations suivantes:

10. $y' = (y + 4x)^2$.

11. $y' + \csc y = 0$

Trouver la solution particulière pour les problèmes à valeur initiale suivants :

12. $\begin{cases} y' = -x/y \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$.

13. $\begin{cases} xy' + y = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} y^3y' + x^3 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} e^x y' = 2(x+1)y^2 \\ y(0) = 1/6 \end{cases}$.

4. MODÉLISATION - APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA SÉPARATION DES VARIABLES AUX PROBLÈMES PHYSIQUES

Modéliser veut dire, traduire en une formule mathématique qui permette de rendre compte de l'évolution du système physique. Pour sûr que vous allez vous occuper de systèmes physiques, car c'est pour cela que sont vos études d'ingénieur… Sinon il fallait vous diriger vers les sciences économiques ou sociales pour étudier ces systèmes humains en conséquence… Mais, de toutes façons, vous en seriez encore obligés d'avoir des notions d'équations différentielles pour ces systèmes! On en sera encore là! Ha! Ha!

4.1. APPLICATION: Datation au carbone 14

Un os fossilisé ne contient plus que 25% du carbone 14 (C_6^{14}) original, déterminer le temps écoulé depuis la mort de l'animal. La demi-vie du carbone 14 étant de 5730 années.

EXPLICATIONS:

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone contenant 8 neutrons. L'isotope du carbone ordinaire est le C_6^{12} , c'est à dire qu'il contient 6 protons et 6 neutrons pour une masse totale de atomique de 12 (12 unités de masse atomique ou u.m.a.). Lorsque l'animal était vivant, il ingurgite de la nourriture (végétale ou animale) et respire une atmosphère qui contiennent une proportion fixe de C14/C12. À la mort de l'animal, le taux d'éléments radioactifs commence à décroître, et la proportion diminue par rapport au carbone 12 qui est inerte. William Frank Libby (chimiste américain né à Grand-Valley, 1908-1980) proposa en 1960 (il reçut le prix Nobel de chimie dans cette même année) de déterminer l'âge des fossiles en comparant ce rapport avec celui de l'air ambiant.

SOLUTION:

On pose le problème par le fait que la variation de radioactivité du carbone 14 est proportionnelle à la quantité originale de cet isotope:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = k.dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = k.t + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{kt}.e^{C} = y_0 e^{kt}$$

La radioactivité est donc caractérisée par une décroissance exponentielle. La demi-vie est la période de temps après laquelle la radioactivité a baissé de moitié:

$$y_0 e^{k(t=5730)} = \frac{y_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = k.5730 \quad \Rightarrow \quad k = -0{,}000121\,\text{année}^{-1}$$

À présent nous pouvons déterminer l'âge approximatif du fossile:

$$y_0 e^{k(t_1)} = \frac{25}{100} y_0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0{,}000121} = 11460\,\text{années}$$

COMMENTAIRES:

Ce n'est qu'une date approximative, car bien que ce résultat soit mathématiquement exact, il faut tenir compte au départ qu'il existe une certaine incertitude sur k lui-même. En utilisant une datation parallèle avec d'autres composants radioactifs, on se rend compte que la datation au carbone tend à sous-estimer l'âge réel du fossile. Ceci est dû au fait qu'il y aurait eu une fluctuation dans temps du rapport C14/C12.

On remarque aussi que 25% correspond au double de la demi-vie, et c'est normal puisqu'il s'agit de 50% de 50%, c'est à dire la demi-vie de la demi-vie.

4.2. APPLICATION : Problème de mélange

Au départ, 40 livres de sel sont dilués dans un réservoir de 200 gallons d'eau. On continue de déverser de l'eau salé dans ce réservoir à un rythme de 5 gallons à la minute, à la concentration de 2 livres de sel par gallon. Le mélange est maintenu uniforme par un système de brassage en continu. L'eau salée ressort par un deuxième conduit à la même vitesse de 5 gallons à la minute. Déterminer la quantité de sel qui se trouve à tout instant dans le réservoir.

SOLUTION :

1) Déterminer le modèle :

Si $y(t)$ est la quantité de sel qui se trouve à un instant t dans le réservoir, $y'(t)$ est la variation de la quantité de sel qui entre par rapport à celle qui sort du réservoir.

Comme il entre : $2\,\text{lb} \times 5\,\text{gallons} = 10\,\text{lb}$ de sel par minute et que la quantité de sel qui en ressort : $\dfrac{5\,\text{gallons} \times y(t)}{200\,\text{gallons}} = 0{,}025\, y(t)$. L'équation est :

$$y'(t) = 10 - 0{,}025 y(t)$$

2) Trouver directement la solution générale de cette équation avec second membre par la méthode de séparation des variables :

$$y'(t) = -0{,}025\big(y(t) - 400\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-400} = -0{,}025.dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left|y-400\right| = -0{,}025t + \tilde{c}$$

On utilise par convention le d (droit) en lieu du ∂ (rond) pour signifier une différentielle par rapport au temps!

et en prenant l'exponentielle des 2 membres:

$$y - 400 = c.e^{-0{,}025t}$$

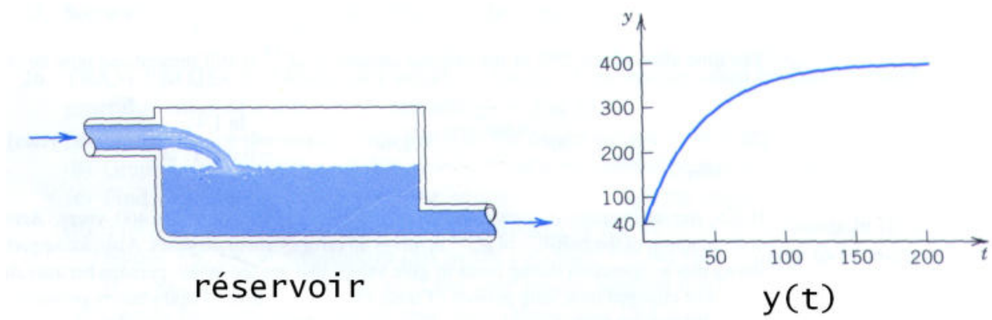
3) Trouver enfin la solution particulière par introduction de la condition initiale pour fixer la constante c :

À t = 0, la quantité de sel dans le réservoir était de $40\,\text{lb}$. Donc :

$$y(0) = c.e^{-0{,}025.(t=0)} + 400 = 40 \quad \Rightarrow \quad c = -360\,\text{lb}$$

Voici alors l'allure de la courbe de sel dans le réservoir :

$$y(t) = -360.e^{-0{,}025t} + 400\,[\text{lb}]$$



4.3. APPLICATION : Loi de Newton pour le refroidissement

Une bille de cuivre est chauffée à 100°C (température d'ébullition de l'eau). À t=0 secondes, la bille est plongée dans une cuve d'eau à 30°C. On note qu'à t=3 mn. la température de la bille est ramenée à T=71°C. Au bout de combien de temps la température de bille sera-t-elle ramenée à 31°C.

EXPLICATIONS:

L'expérience physique montre que la température de la bille subit une décroissance proportionnelle à la différence instantanée de température entre le corps et la température ambiante.

SOLUTION:

1) Poser l'équation: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$

2) Trouver la solution complémentaire (solution homogène sans le second membre).

3) Trouver la solution singulière (solution avec le second membre).

4) Déterminer la solution générale qui est simplement la solution complémentaire + solution singulière.

Remarquons qu'encore une fois, la méthode de séparation des variables nous amènera directement à la solution générale, sans passer par les étapes 2 et 3:

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = k.dt \quad \Rightarrow \quad \ln|T - T_a| = kt + C' \quad \Rightarrow \quad |T - T_a| = C.e^{kt}$$

Comme la température de la bille est plus élevée que la température ambiante, nous avons pour solution générale:

$$T - T_a = C.e^{kt} \quad \Rightarrow \quad T(t) = C.e^{kt} + T_a$$

5) Détermination de la solution particulière:

puisque à t=0 seconde, nous avons T=100°C, donc:

$$T(t = 0) = C.e^{kt} + 30^o = 100^o \quad \Rightarrow \quad C = 70^o$$

et la solution particulière est:

$$\boxed{T(t) = 70.e^{kt} + 30 \quad \text{Celcius}}$$

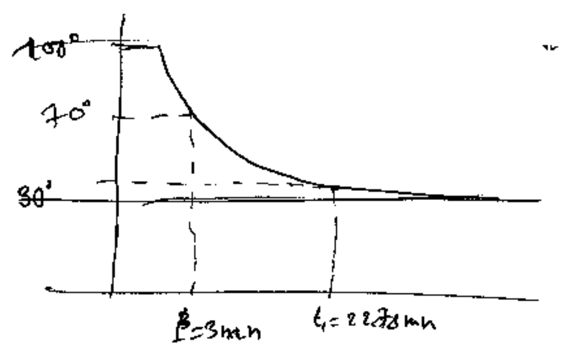
6) Déterminer la constante de refroidissement (à partir des constatations expérimentales):

$$T(t = 3\text{ mn}) = 70.e^{k(t=3\text{ mn})} + 30 = 71^o\text{Celcius} \quad \Rightarrow \quad \text{k} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{71^o - 30^o}{70^o}\right) = -0{,}1783\text{ mn}^{-1}$$

6) On peut, à présent, prédire le temps que prendra la bille pour atteindre la température de 31°C:

$$T(t_1) = 70.e^{-0{,}1783t_1} + 30 = 31^o\text{Celcius} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{-0{,}1783}\ln\left(\frac{31^o - 30^o}{70^o}\right) = 23{,}83\text{ mn}$$

7) Petit croquis pour récapituler qu'on a bien maîtrisé tous les aspects du problème.

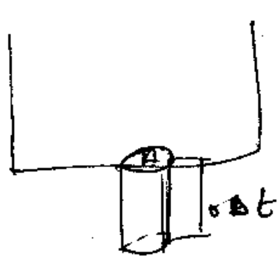


4.4. APPLICATION: écoulement d'eau à travers un orifice (loi de Torricelli)

Considérons un réservoir cylindrique de 1 m de diamètre et de 1,5 m de haut. Ce réservoir est rempli d'eau, mais au bas il y a un petit orifice de 1 cm par où fuit le liquide, sous effet de la gravitation. Il s'agit alors de trouver la hauteur d'eau h(t) en tout temps; notamment déterminer quand le réservoir sera à moitié vide, vide aux 3/4 et finalement complètement vide.

EXPLICATIONS:

Les observations physiques montrent que la vitesse du liquide, sous l'effet de la gravitation est :



$$v(t) = 0{,}600\sqrt{2.g.h(t)} \quad \text{(loi de Toricelli)}$$

où g est la constante d'accélération ($g = 8{,}81\text{ ms}^{-2} = 32{,}17\text{ pieds/s}^2$) au niveau de la mer, et 0,600 est le facteur de constriction de la section efficace du jet par rapport au diamètre réel de l'orifice.

SOLUTION:

1) Mise en équation:

Soit A la section de l'orifice, la quantité de liquide qui passe par l'orifice par unité de temps est:

$$\Delta V = A \times v.\Delta t$$

Cette quantité d'eau qui fuit cause une diminution de la même quantité dans le réservoir et donc une diminution de la hauteur du niveau dans le réservoir. Si B est la section du réservoir alors:

$$-\Delta V = B \times \Delta h = -A \times v.\Delta t$$

Le signe négatif (-) indique une diminution dans le réservoir. En substituant la vitesse du jet par son expression de Torricelli, et en faisant tendre Δt vers zéro, on obtient alors l'équation différentielle pour h(t):

$$-dV = B \times dh = -A \times v.dt \quad = -A \times 0.600\sqrt{2.g.h(t)}.dt$$

$$\text{C'est à dire : } \frac{dh}{\mathrm{dt}} = -\frac{A}{B} \times 0.600\sqrt{2.g} \times \sqrt{h(t)}$$

$$\text{soit finalement : } \frac{dh}{\mathrm{dt}} = -\frac{\pi(0{,}005)^2}{\pi(0{,}5)^2} \times 2{,}658 \times \sqrt{h(t)} = 0{,}0002658.h^{1/2}$$

2) Détermination de la solution générale (par la méthode de la séparation des variables):

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = -0{,}0002658.dt \quad \Rightarrow \quad 2h^{1/2} = -0{,}0002658.t + C \quad \Rightarrow \quad h(t) = \left(C - 1{,}329 \times 10^{-4}.t\right)^2$$

3) Déterminer la solution particulière:

La condition initiale étant h(0)=1,5 m., on peut alors fixer la valeur de la constante C:

$$h(t=0) = \left(C - 1{,}329 \times 10^{-4}.(t=0)\right)^2 = 1{,}5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \text{C} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225 \text{ m.}$$

d'où la solution particulière:

$$h(t) = \left(1{,}225 - 1{,}329 \times 10^{-4}.t\right)^2$$

4) Grâce à l'expression analytique, on peut maintenant répondre aux questions concernant la temps écoulé pour vider le réservoir de moitié, aux 3/4 et complètement:

à moitié:

$$h(t_1) = \frac{1}{2}.1{,}5 \text{ m} = \left(1{,}225 - 1{,}329 \times 10^{-4}.t_1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 45 \text{ mn.}$$

temps pour vider le réservoir aux 3/4:

$$h(t_2) = \frac{3}{4}.1{,}5 \text{ m} = \left(1{,}225 - 1{,}329 \times 10^{-4}.t_2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 77 \text{ mn.}$$

et enfin le temps pour vider le réservoir au complet:

$$h(t_3) = \frac{1}{1}.1{,}5\text{ m} = \left(1{,}225 - 1{,}329\times10^{-4}.t_3\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t_3 \approx 154\text{ mn.}$$

4.5. APPLICATION: De la terre à la lune

Le roman de Jules Verne[1] décrit un canon géant qui envoie un obus habité depuis la terre vers la lune. Nous allons étudier la vitesse initiale que doit avoir cet obus, afin qu'il ne retombe pas sous l'attraction terrestre et puisse s'échapper dans l'espace.

DÉTAILS :

Dans la résolution de ce problème, nous allons négliger les effets dus au frottement avec l'air et l'influence des autres planètes.

SOLUTION :

1) Modéliser :

La loi de la gravitation de Newton[2] nous indique que la force gravitationnelle qui attire le projectile vers la terre est proportionnelle aux masses des corps en présence, m_g pour la masse du projectile, M pour la masse de la terre, et inversement proportionnelle au carré de la distance r entre ces 2 objets :

$$\vec{F}_g = G\frac{m_g M}{r^2}.\vec{u}$$

Champ de gravitation $\vec{g}_0 = G\frac{M}{R^2}\vec{u}$ au niveau de la mer

où G est la constante de gravitation qui est là pour normaliser entre les unités de mesure.

Cette force d'après la relativité générale est indissociable d'une accélération du même corps car on ne peut distinguer la masse inerte de la masse pesante.

Accélération.

$$\vec{F}_g = G\frac{m_g M}{R^2}\vec{u} = m_g\,\vec{g}_0 = m_i.\vec{\gamma} = \vec{F}_\gamma$$

Rayon de la terre au niveau de l'eau.

Justement comme la masse pesante (masse d'attraction) m_g est toujours égale à m_i (la masse d'inertie, résistante aux changement de vitesse), vous aviez tendance à confondre le champ de gravitation $\vec{g}_0 = G\frac{M}{R^2}\vec{u}$ avec l'accélération $\vec{\gamma}$. Lorsque l'objet sera à une distance r, plus éloignée que le niveau de la mer, la nouvelle force d'attraction est :

$$\vec{F}_g = G\frac{m_g M}{r^2}\vec{u} = G\frac{m_g M}{R^2}.\frac{R^2}{r^2}\vec{u} = m_g\,\vec{g}_0.\frac{R^2}{r^2} = m_i.\vec{\gamma}(r)$$

---

[1] *Écrivain français né à Nantes (1828-1905) qui créa le roman d'anticipation scientifique dont : Cinq semaines en ballon, De la terre à la lune, Vingt milles lieues sous les mers, Le tour du monde en 80 jours, et Michel Strogoff.*

[2] *Sir Isaac Newton fut un grand mathématicen, physicien, astronome et philosophe britanique né à Woolsthorpe (1642-1727). Il fut professeur en 1969 à Cambridge. On lui doit la publication de « Philosophae naturalis principia mathematica » en 1687, qui contenait le développement de plusieurs lois de la mécanique dite classique. De façon parallèle à Leibniz, il fonda les bases du calcul différentiel.*

et si nous considérons l'accélération en direction de la lune au lieu du vecteur d'accélération dirigé vers le centre le terre :

$$\vec{a}(r) = -\vec{\gamma}(r) = -g_o \frac{R^2}{r^2}$$

or : $a(r(t)) = \dfrac{dv(r(t))}{dt} = \dfrac{dv(r)}{dr}.\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dv}{dr}v$

d'ou l'équation à résoudre :

$$v\frac{dv}{dr} = -g_o \frac{R^2}{r^2}$$

2) Trouver la solution générale (par la méthode de séparation des variables).

$$v\frac{dv}{dr} = -g_o \frac{R^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad vdv = -g_o \frac{R^2}{r^2}dr \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = g_o \frac{R^2}{r} + c$$

3) Solution particulière :

Sachant qu'à $t = 0$ la vitesse initiale est $v(t=0) = v_0$ et la distance initiale est $r(t=0) = R$:

$$\frac{(v_0)^2}{2} = g_o \frac{R^2}{(r=R)} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{v_0^2}{2} - g_o R$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le vitesse initiale d'échappement à la terre :

$$\frac{v^2}{2} = g_o \frac{R^2}{r} + \frac{v_0^2}{2} - g_o R$$

Lorsqu'on s'éloigne de la terre, la distance grandit $r >> R$. Il arrive à un moment donné que la vitesse tomme à zéro $v = 0$. C'est ce qu'il faut éviter car à ce moment là le projectile va inverser son mouvement pour être de nouveau attiré vers la terre. Il faut s'arranger pour que cette quantité reste tout le temps positive. Ce qui est vrai si à l'infini :

$$\frac{v^2}{2} = g_o \frac{R^2}{\infty} + \frac{v_0^2}{2} - g_o R > 0$$

c'est à dire qu'on doit avoir :

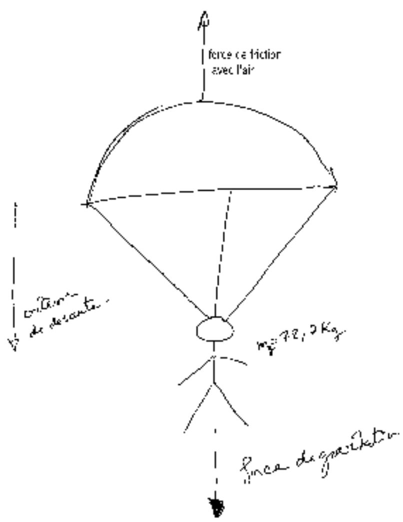
$$\frac{v_0^2}{2} - g_o R > 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{2 g_o R}$$

4) Application numérique :

$$\left.\begin{aligned} R &= 6372 \text{ Km} \\ \text{g}_0 &= 9{,}81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 6{,}373 \times 10^6} \approx 11{,}2 \text{ Km/sec.}$$

4.6. APPLICATION: La descente du parachutiste

Après une chute libre, juste avant que son parachute ne s'ouvre, la vitesse de descente acquise par l'homme volant était de $v(0)=v_o=10$ mètres/seconde. Il s'agit à partir de cet instant de déterminer la vitesse instantanée du parachutiste.



DONNÉES PHYSIQUES:

Soit m=72,7 Kg (=160 Lb) la masse du parachutiste avec tout son équipement.

Soit U la résistance de l'air qui est proportionnelle au carré de la vitesse instantanée :

$$U = b.v^2(t)$$

où b est le coefficient de frottement du parachute dans l'air. On assume que b=30Kg\mètre.

SOLUTION:

1) Mise en équation:

La force gravitationnelle qui attire le parachutiste et son équipement vers le sol est donnée par la loi de l'attraction universelle (loi de Newton):

Force de gravitation en Newton (N)

Masse de gravitation (pesante) en Kg

Champ de gravitation en N/Kg

$$\vec{F}_g = m_g \times \vec{g}$$

Cette force est compensée par le frottement de l'air qui est dirigée dans la direction opposée à la force de gravitation. Le parachutiste est donc soumis à 2 forces opposées. Il est donc soumis à la force résultante:

$$F_r = F_g - F_f = m_g \times g - b \times v^2 = m_i \times \gamma$$

La force résultante provoque sur la masse d'inertie du parachutiste une accélération inversement proportionnelle. D'autre part, comme physiquement on n'a jamais pu prouver une valeur différente de masse inerte et de masse pesante pour un même corps, les étudiants à tendance à confondre l'accélération avec le champ de gravitation , puisque habituellement:

Accélération du corps d'inertie

$$\left.\begin{array}{r} m_g.\vec{g} = m_i.\vec{\gamma} \\ \text{mais} \quad m_g = m_i \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{g} = \vec{\gamma}$$

Champ de gravitation

Mais ici nous avons une relation différente:

$$m \times g - b \times v^2 = m \times \frac{dv}{dt}$$

où l'équation différentielle pour la vitesse de chute à l'ouverture du parachute:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v^2 - k^2)$$

$$\text{avec} \quad k^2 = \frac{m.g}{b}$$

2) Obtention directe de la solution générale (par la méthode de séparation des variables):

$$\int \frac{dv}{(v^2 - k^2)} = -\int \frac{b}{m} dt$$

$$\text{soit } \int \frac{1}{2k} \frac{dv}{(v-k)} - \int \frac{1}{2k} \frac{dv}{(v+k)} = -\int \frac{b}{m} dt$$

$$\frac{1}{2k} \ln\left|\frac{(v-k)}{(v+k)}\right| = -\frac{b}{m} t + \widetilde{C}$$

$$\frac{(v-k)}{(v+k)} = Ce^{-\frac{2kb}{m}t}$$

d'où l'expression de la solution générale:

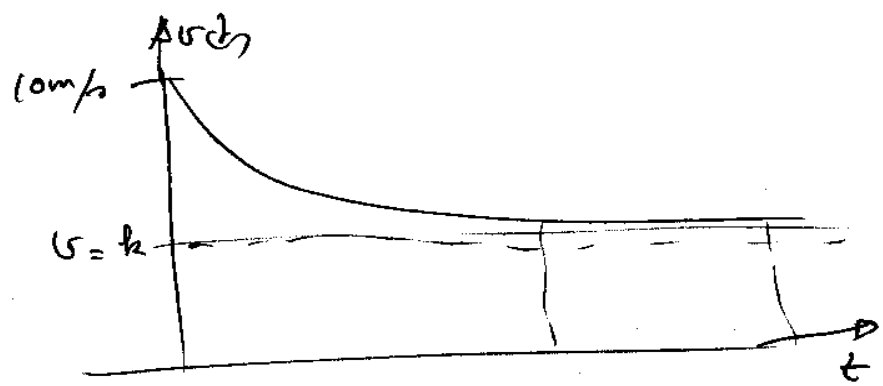
$$v(t) = k.\frac{1 + Ce^{-\frac{2kb}{m}t}}{1 - Ce^{-\frac{2kb}{m}t}}$$

3) Détermination de la solution particulière:

$$v(t=0) = v_o = 10\text{m.s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad k.\frac{1 + Ce^{-\frac{2kb}{m}(0)}}{1 - Ce^{-\frac{2kb}{m}(0)}} = 10 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{v_0 - k}{v_0 + k}$$

d'où l'expression de la solution particulière:

$$\boxed{v(t) = 4{,}87.\frac{1 + 0{,}345e^{-4{,}02t}}{1 - 0{,}345e^{-4{,}02t}}}$$



PROBLÈMES

1. Croissance exponentielle de la levure : Si, dans une culture de levure (champignon unicellulaire qui provoque la fermentation alcoolique des solutions sucrées ou lever la pâte du pain) , la vitesse de croissance $y'(t)$ est proportionnelle à la quantité $y(t)$ au moment t ; et que $y(t)$ a doublé en 1 jour, combien de levure obtiendrait-on en 3 jours à la même vitesse de croissance. Et après une semaine?

2. Le séchoir : Si une feuille mouillée perd de son humidité à un rythme proportionnel à la quantité présente, et qu'au bout de 10 minutes, elle a perdu la moitié de son humidité, au bout de combien de temps la feuille sera pratiquement sèche (ne contenant plus que 1% de son humidité originale)?

3. Accélérateur linéaire de particules : Les accélérateurs linéaires sont utilisés en physique nucléaire pour imprimer de la vitesse aux particules chargées électriquement. On suppose qu'une particule de type alpha (noyau d'hydrogène) est entré dans l'accélérateur à la vitesse de $10^3 m/s$ et en ressort à la vitesse de $10^4 m/s$ après seulement $10^{-3} s$. Déterminer la constante d'accélération a et la distance parcourue dans l'accélérateur.

4. Loi de Boyle[3]-Mariotte[4] pour les gaz parfaits : Les expériences montrent que tout gaz, à basse pression p et à température constante possède un taux de variation de volume $V(p)$ égal à $-\dfrac{V}{p}$. Résoudre pour trouver l'expression du volume en fonction du temps.

5. Loi du refroidissement de Newton : Un thermomètre indiquant 5°C, est mis dans une pièce dont la température est 22°C . Une minute plus tard, le thermomètre n'indique que 12°C. Combien de temps cela va prendre pour que le thermomètre puisse indiquer pratiquement la température de la pièce, soit 21,9°C?

6. Mélange pour la saumure : Un réservoir à saumure contient 400 gallons d'eau avec 100 livres (lb) de sel dissous. L'eau fraîche y pénètre à raison de 2 gallons/minute, le mélange, maintenu uniforme par brassage en ressort au même débit. Quelle est la quantité de sel qui reste dans le réservoir après une heure?

7. Courbes isoclines : Quelles courbes dans le plan xy ont la propriété qu'à chaque point (x,y) leur tangente a la pente $-4x/y$?

8. Loi de Lambert[5] en absorption : Cette loi établit que l'absorption de la lumière par une couche fine transparente est proportionnelle à l'épaisseur de ladite couche et à la quantité de lumière incidente. Formulez l'équation différentielle qui y corresponde et donnez l'expression de la fonction d'absorption.

9. Décollage d'un avion : Un avion décolle d'une piste de 2 kilomètres de long. Si l'avion avait une vitesse initiale de 10m/s et possède une poussée (accélération) constante qui fait qu'il atteint le bout en piste en 50 secondes, déterminer sa vitesse au décollage.

---

[3] *Sir Robert Boyle (1627-1691) est un physicien et chimiste irlandais né à Lismore Castle est un des fondateurs de la Royal Society. C'est lui qui énonca la loi de la compressibilité des gaz et découvrit le rôle de l'oxygène dans la combustion.*

[4] *Edmé Mariotte (approximativement 1620-1684) était à la fois abbé dans un monastère près de Dijon et physicien français né en Bourgogne.*

[5] *Johann Heinrich Lambert (1728-1777) est un physicien et mathématicien (germanique ou français selon le drapeu nationaliste sous lequel on se plaçait) né à Mulhouse. Il contribua à la cartopgraphie, l'astronomie et la photométrie.*

5. MODÉLISATION - APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA SÉPARATION DES VARIABLES AUX PROBLÈMES PHYSIQUES (SUITE).

Voir contenu dans le chapitre 4.

6. ÉQUATIONS EXACTES – FACTEURS INTÉGRANTS

6.1. Les équations exactes :

Dans le cas de fonctions à 2 variables $u(x,y)$ possédant des dérivées partielles continues, sachant que la différentielle totale ou **exacte** de u est :

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

Il s'ensuit que si $u(x,y) = Cte$, alors $du = 0$.

EXEMPLE :

Si : $u = x + x^2y^3 = C$

Alors : $du = (1+2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$

Et donc : $y' = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}$

On voit alors qu'une équation différentielle ordinaire peut être résolue en procédant à l'inverse.

6.2. Méthode des équations exactes :

Soit une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

Si on peut trouver une fonction $u(x,y)$ qui vérifie :

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{et } N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Alors on peut poser l'équation sous la forme d'une différentielle totale ou **exacte**:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

et alors $u(x,y)$ est la solution cherchée sous forme implicite :

$$u(x,y) = Cte$$

Pour cela il faut prouver que les dérivées $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ sont effectivement égales, puisque dans le cas d'une fonction $u(x,y)$ aux dérivées partielles continues, les dérivées secondes croisées sont égales :

$$\text{si } \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \text{ continues, alors } \frac{\partial u^2(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u^2(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Donc ici, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$ soit une équation exacte est de prouver que :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\text{puisque } \begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial u^2(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial u^2(x,y)}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Dès lors la fonction cherchée $u(x,y)$ peut être devinée ou trouvée de façon systématique par :

$$u(x,y) = \int M(x,y).dx + k(y)$$

Dans cette intégration par rapport à x, $k(y)$ joue le rôle de constante. Il suffit de dériver par la suite par rapport à y le $u(x,y)$ trouvé pour déterminer $k(y)$:

$$\left. N(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right\} \quad \Rightarrow \quad k'(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y).dx\right) = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad k(y)$$

On obtiendrait le même résultat en intégrant d'abord à $N(x,y)$ et dériver ensuite par rapport à x.

RÉSUMÉ DE LA PROCÉDURE :

1) Vérifier si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, auquel cas on a bien affaire à une équation exacte, et on peut aller à l'étape 2) de cette procédure.

2) Évaluer $u(x,y) = \int N(x,y).dy + l(x)$.

3) Dériver ensuite pour trouver $l(x)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad l'(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y).dx\right) = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad l(x)$$

4) Vérifier que la solution finale en $u(x, y)$ redonne bien $M(x, y)$ et $N(x, y)$.

EXEMPLE 1:

Soit à résoudre : $\left(x^3 + 3xy^2\right).dx + \left(3x^2 y + y^3\right).dy = 0$.

SOLUTION :

1) Vérifions que nous avons bien une équation exacte :

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^3 + 3xy^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6xy \\ N(x,y) = 3x^2 y + y^3 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6xy \end{array}\right\} \text{ donc on a affaire à une équation exacte}$$

2) Trouver $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int M(x,y).dx + k(y) = \int \left(x^3 + 3xy^2\right).dx + k(y) \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + k(y) \end{aligned}$$

3) Dérivons pour déterminer $k(y)$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3x^2 y + k'(y) \\ N(x,y) = 3x^2 y + y^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k'(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad k(y) = \frac{1}{4}y^4 + \widetilde{C}$$

4) Vérification de la solution en $u(x, y)$:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C$$

La solution étant donné sous forme implicite d'une équation entre x et y, il suffit de faire :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy = 0$$

et identifier que de nouveau on a :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \text{et } &\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{aligned}$$

EXEMPLE 2:

Soit à résoudre le problème suivant avec valeur initiale: $\begin{cases}(\sin x \cosh y).dx - (\cos x \sinh y).dy = 0 \\ y(0) = 0\end{cases}$

SOLUTION:

1) Vérifier que c'est une équation exacte :

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = +\sin x \cosh y \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = \sin x \sinh y \\ N(x,y) = -\cos x \sinh y \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \sin x \sinh y \end{array}\right\} \text{ donc on a affaire à une équation exacte}$$

2) Trouver $u(x,y)$:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int M(x,y).dx + k(y) = \int (\sin x \cosh y).dx + k(y) \\ &= -\cos x \cosh y + k(y) \end{aligned}$$

3) Dérivons pour déterminer $k(y)$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\cos x \sinh y + \dfrac{\partial k(y)}{\partial y} \\ N(x,y) = -\cos x \sinh y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\dfrac{\partial k(y)}{\partial y} = 0\right\} \Rightarrow \{k(y) = Cte1$$

Or la condition initiale veut que :

$$y(0) = 0\} \Rightarrow u(0,0) = \cos(0)\cosh(0) + Cte1 = Cte2 \Rightarrow Cte2 - Cte1 = \cos(0)\cosh(0) = 1$$

On peut fixer arbitrairement $Cte1 = 0$, de sorte que l'expression implicite de la solution est :

$$u(x,y) = \cos x \cosh y = 1$$

4) Vérification de la solution en $u(x,y)$:

$$du = (-\sin x \cosh y).dx + (-\cos x \sinh y).dy = 0$$

et on identifie bien que de nouveau on a :

$$M(x,y) = \sin x \cosh y$$
$$\text{et} \quad N(x,y) = \cos x \sinh y$$

EXEMPLE 3:

Voici un cas d'équation non-exacte : $y.dx - x.dy = 0$

SOLUTION:

1) Vérifions que c'est une équation exacte :

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)=+y \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=+1 \\ N(x,y)=-x \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1 \end{array}\right\} \quad \text{donc on a affaire à une équation non - exacte}$$

Dès lors on ne doit pas poursuivre selon la procédure prescrite. On verra tout de suite après comment palier à cette difficulté, sinon on va voir qu'on aboutit à une inconsistance.

2) Défaut dans la procédure :

$$u(x,y)=\int M(x,y).dx+k(y)=xy+k(y)$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x+k'(y)=-x \quad \Rightarrow \quad \text{cas d'impossibilité}$$

6.3. Le facteur intégrant

Dans le cas des équations de la forme :

$$\boxed{P(x,y).dx+Q(x,y).dy=0}$$

mais dont : $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. C'est à dire lorsqu'il s'agit d'une équation **non-exacte**, on cherche alors une fonction auxiliaire $F(x,y)$ telle que :

$$FP(x,y).dx+FQ(x,y).dy=0$$

Soit une équation exacte. Cette fonction $F(x,y)$ est alors appelé le **facteur intégrant.**

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation : $y.dx-x.dy=0$

SOLUTION:

Cette équation n'est pas exacte. Par contre si nous la multiplions par $F(x,y)=\dfrac{1}{x^2}$:

$$\frac{y}{x^2}.dx-\frac{1}{x}.dy=0$$

Alors on peut poser l'équation sous la forme :

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = FP = \dfrac{y}{x^2} \\ N = FQ = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Dès lors l'équation est ramenée à une forme de différentielle exacte puisque :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{c'est une équation exacte}$$

On peut donc par la suite utiliser la procédure décrite en début de chapitre pour trouver la solution implicite :

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \int M(x,y).dx + k(y) = \int \left(\frac{y}{x^2}\right).dx + k(y) \\ &= -\frac{y}{x} + k(y) \end{aligned}$$

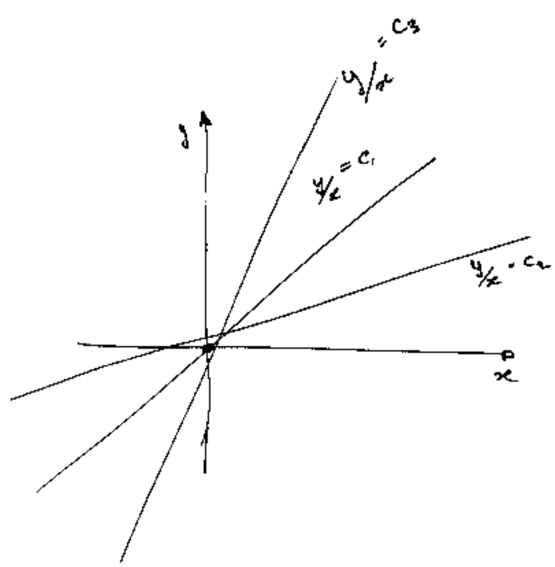
puis:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} &= -\frac{1}{x} + k'(y) \\ N(x,y) &= -\frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \{k'(y) = 0\} \quad \Rightarrow \quad \{k = Cte$$

D'où la solution :

$$u_1(x,y) = -\frac{y}{x} + Cte = C \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \widetilde{C}$$

Cette relation indique une famille de lignes passant par l'origine.



REMARQUE :

On aurait pu utiliser d'autres facteurs intégrants tels que : $F(x,y)=\dfrac{1}{y^2},\ \dfrac{1}{xy},\ \dfrac{1}{x^2+y^2}$, de sorte qu'on aura les équations exactes suivantes et leur forme évidente de solution implicite:

$$\frac{1}{y^2}(y.d-x.dy)=0=d\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{1}{xy}(y.d-x.dy)=0=d\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$
$$\frac{1}{x^2+y^2}(y.d-x.dy)=0=-d\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation : $2\sin\left(y^2\right)dx+xy\cos\left(y^2\right)dy=0$

SOLUTION :

1) Cette équation n'est pas exacte puisque :

$$P(x,y).dx+Q(x,y).dy=0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P(x,y)=2\sin(y^2)\rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=4y\cos(y^2) \\ Q(x,y)=xy\cos(y^2)\rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y\cos(y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

2) Trouver le facteur intégrant. Ici, dans le problème, on nous le donne pour l'instant mais nous indiquerons la méthode pour le trouver systématiquement :

$$F(x,y)=x^3$$

L'équation devient exacte :

$$2x^3\sin\left(y^2\right)dx+x^4y\cos\left(y^2\right)dy=0$$

soit donc:

$$\begin{cases} M=FP=2x^3\sin(y^2) \quad\rightarrow\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=4x^3y\cos(y^2) \\ N=FQ=x^4y\cos(y^2) \quad\rightarrow\quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=4x^3y\cos(y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

3) Il s'agit maintenant à partir de cette équation exacte, de trouver la fonction $u(x,y)$, procédure qui est déjà indiqué dans le chapitre sur les équations exactes :

$$u(x,y) = \int M(x,y).dx + k(y) = \int \left(2x^3 \sin y^2\right).dx + k(y) = \frac{1}{2}x^4 \sin y^2 + k(y)$$

4) Dérivons pour déterminer $k(y)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{x^4}{2}\left[2y\cos y^2\right] + k'(y) \\ &N(x,y) = x^4 y \cos y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{k'(y) = 0\right\} \Rightarrow \left\{k = \widetilde{C}\right.$$

5) Vérification de la solution en $u(x,y)$:

$$u(x,y) = x^4 \cos y^2 = Cte$$

La solution étant donné sous forme implicite d'une équation entre x et y, il suffit d'effectuer la dérivée par rapport à x et identifier à nouveau les termes :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x^3 \sin\left(y^2\right) + x^4 2y\cos\left(y^2\right).y' = 0$$

Soit finalement:

$$4x^3 \sin\left(y^2\right)dx + x^4 2y\cos\left(y^2\right).y' = 0$$

6.4. Comment faire pour trouver le facteur intégrant :

Il s'agit de trouver $F(x,y)$ telle que : $\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. En développant cette relation nous conduit à :

$$P\frac{\partial F}{\partial y} + F\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Règle de simplicité : En général on ne cherche pas un $F(x,y)$, mais une fonction $F(x)$ ou $F(y)$ plus simple à trouver. Donc, si $F = F(x)$ seulement, alors :

$$F\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Soit, en réarrangeant et en divisant par FQ :

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}$$

soit:

$$\boxed{\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}$$

De la même façon, si on posait $F=F(y)$, on trouvera alors que :

$$F\frac{\partial Q}{\partial x}=P\frac{\partial F}{\partial y}+F\frac{\partial P}{\partial y}$$

et en réarrangeant et en divisant par FP :

$$\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}$$

Soit:

$$\boxed{\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}$$

Et alors le facteur intégrant est obtenu par :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \\ \text{ou } F(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \end{array}}$$

EXEMPLE:

Soit à résoudre l'équation: $2\sin\left(y^2\right)dx+xy\cos\left(y^2\right)dy=0$

SOLUTION:

1) Vérifier que c'est une équation non-exacte :

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=2\sin(y^2)\rightarrow\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=4y\cos(y^2) \\ Q(x,y)=xy\cos(y^2)\rightarrow\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y\cos(y^2) \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

2) Trouver le facteur intégrant $F(x)$ ou $F(y)$:

$$F(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{xy\cos(y^2)}\left(4y\cos(y^2)-y\cos(y^2)\right)dx}=e^{\int\frac{3}{x}dx}=x^3$$

$$\text{ou } F(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}=e^{\int\frac{1}{2y\sin(y^2)}\left(y\cos(y^2)-4y\cos(y^2)\right)dy}=e^{\int\frac{3}{2}\cot(y^2).dy}=\ldots$$

En général on choisira de $F(x)$ ou de $F(y)$, le facteur intégrant le plus facile à intégrer! Pour $F(x)$, c'est à solution qui a été proposé dans le tout premier exemple.

EXEMPLE :

Soit à résoudre le problème avec condition initiale : $\begin{cases}(2xy).dx+(4y+3x^2).dy=0\\ y(0.2)=-1.5\end{cases}$

SOLUTION:

1) Vérifions si c'est une équation non-exacte :

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)&=2xy &&\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=2x\\ Q(x,y)&=4y+3x^2 &&\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=6x\end{aligned}\right\}\text{ donc on a affaire à une équation non - exacte}$$

2) Dès lors il faut évaluer le facteur intégrant. Ici, on choisit d'évaluer $F(y)$, mais l'étudiant est invité à évaluer $F(x)$:

$$F(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}=e^{\int\frac{1}{2xy}(6x-2x)dy}=e^{\int\frac{2}{y}dy}=y^2$$

3) Par la suite, on reprend la procédure pour une équation exacte :

$$\begin{cases}(2xy^3).dx+(4y^3+3x^2y^2).dy=0\\ y(0.2)=-1.5\end{cases}$$

Ce qui est expliqué en début de ce chapitre.

L'étudiant est invité à vérifier que : $u(x,y)=y^4+x^2y^3=C$, est une solution générale et que plus spécifiquement, à cause de la condition initiale imposée, on trouvera :

$$\boxed{u(x,y)=y^4+x^2y^3=4.9275}$$

RÉSUMÉ DE LA PROCÉDURE POUR UNE ÉQUATION NON-EXACTE:

1) Vérifier si $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, auquel cas on a bien affaire à une équation non-exacte, et on peut aller à l'étape 2) de cette procédure. Sinon aller directement à l'étape 3 de cette procédure.

2) Évaluer le facteur intégrant :

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$$
$$\text{ou } F(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}.$$

3) Continuer avec la procédure pour une équation exacte après avoir posé :

$$\begin{cases} M(x,y) = FP(x,y) \\ N(x,y) = FQ(x,y) \end{cases}$$

EXERCICES

Pour les solutions suivantes $u(x,y)$ qui sont données , déterminer les équations exactes qui y correspondent $du = 0$.

1. $u = e^{x^2/y}$.

2. $u = \tan(y^2 - x^3)$.

3. $u = (x^2 - y^2)$.

Monter que les équations suivantes sont exactes et trouver les solutions.

4. $\sinh x \cos y dx = \cosh x \sin y dy$.

5. $e^{-2\theta}(r.dr - r^2 d\theta) = 0$.

6. $-yx^{-2}dx + x^{-1}dy = 0$.

Déterminer si chacune des équations suivantes est exacte et trouver les solutions avec conditions initiales.

7. $\begin{cases} 3y^2 dx + xdy = 0 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 2xydy = (x^2 + y^2)dx \\ y(1) = 2 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \left[(x+1)e^x - e^y\right]dx = xe^y.dy \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Vérifier le facteur intégrant et trouver la solution.

10. $\begin{cases} (2y + xy).dx + 2x.dy = 0 \\ F(x,y) = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$.

Trouver le facteur intégrant et résoudre l'équation.

11. $2\cosh x \cos y.dx = \sinh x \sin y.dy$.

7. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET L'ÉQUATION DE BERNOULLI

7.1. Définition :

Une équation différentielle est dite linéaire si elle peut être écrite comme une combinaison linéaire de la façon suivante :

$$\boxed{y'+p(x).y=r(x)}$$

Lorsque $r(x)=0$, on parle d'une équation linéaire **homogène**. Si $r(x)\neq 0$, alors il s'agit d'une équation linéaire **non-homogène**.

En pratiquant la séparation des variables sur l'équation homogène :

$$y'+p(x).y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=-p(x).dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=\int -p(x).dx+\tilde{C}$$
$$\Rightarrow\quad \ln|y|=-\int p(x).dx+\tilde{C}$$

Et en prenant l'exposant des 2 membres :

$$e^{\ln|y|}=e^{-\int p(x).dx+\tilde{C}}=e^{-\int p(x).dx}.e^{\tilde{C}}=C.e^{-\int p(x).dx}$$

c'est à dire :

$$\boxed{y_h(x)=C.e^{-\int p(x).dx}}$$

On obtient la solution de l'équation homogène (d'où l'indice h). On l'appelle alors en plus bref, **solution homogène** ou encore **fonction complémentaire**.

Dans le cas d'une équation non-homogène, on la réécrit sous forme d'une différentielle exacte (où a rendre exacte) :

$$\big(p(x).y-r(x)\big).dx+dy=0$$

Il suffit alors de poser :

Attention, il s'agit d'un P majuscule

$$P(x,y)=\big(p(x).y-r(x)\big).$$
$$Q(x,y)=1$$

Attention, il s'agit d'un p minuscule

Dès lors on applique la procédure de recherche du facteur intégrant :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=p(x)\\[2mm]\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Donc:

$$F(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{1}(p(x)-0)dx}=e^{\int p(x).dx}$$

Et l'équation rendue exacte est :

$$e^{\int p(x).dx}\left[(p(x).y-r(x)).dx+dy\right]=0$$

On a donc :

$$e^{\int p(x).dx}\left(y'+p(x).y\right)=e^{\int p(x).dx}.r(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left[y.e^{\int p(x).dx}\right]'=e^{\int p(x).dx}.r(x)$$

Soit :

$$y.e^{\int p(x).dx}=\int e^{\int p(x).dx}r(x).dx+C$$

D'ou la solution de l'équation générale:

$$\boxed{y_g(x)=e^{-\int p(x).dx}.\left[\int e^{\int p(x).dx}r(x).dx+C\right]}$$

On l'appelle en bref la **solution générale** car on voit qu'il s'agit d'une combinaison de 2 solutions, la solution homogène qu'on avait déjà trouvée si le second membre était nul ($r(x)=0$), et une solution singulière due au second membre ($r(x)\neq 0$) :

$$\boxed{y_g(x)=\overbrace{Ce^{-\int p(x).dx}}^{y_h}+\overbrace{e^{-\int p(x).dx}\int e^{\int p(x).dx}r(x).dx}^{y_s}}$$

EXEMPLE:

Soit à résoudre l'équation: $y'-y=e^{2x}$

SOLUTION:

1) Poser :

$$\begin{cases} p(x) = -1 \\ r(x) = e^{2x} \\ h(x) = \int p(x).dx = -x \end{cases}$$

2) Exprimer directement la solution générale :

$$y_g(x) = e^{-\int p(x).dx}\left[\int e^{\int p(x).dx} r(x).dx + C\right] = e^{+x}\left[\int e^{-x} e^{2x}.dx + C\right]$$

soit:

$$y_g(x) = e^x.\left[e^x + C\right] = C.e^x + e^{2x}$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation suivante : $y' + 2y = e^x(3\sin 2x + 2\cos 2x)$

SOLUTION:

1) Poser :

$$\begin{cases} p(x) = 2 \\ r(x) = e^x(3\sin 2x + 2\cos 2x) \\ h(x) = \int p(x).dx = 2x \end{cases}$$

2) Exprimer directement la solution générale :

$$y_g(x) = e^{-\int p(x).dx}.\left[\int e^{\int p(x).dx} r(x).dx + C\right] = e^{-2x}.\left[\int e^{2x} e^x (3\sin 2x + 2\cos 2x).dx + C\right]$$

Soit:

$$\boxed{y_g(x) = e^x\left[e^{3x}(\sin 2x) + C\right] = C.e^{-2x} + e^x \sin 2x}$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre le problème avec condition initiale : $\begin{cases} y' + y\tan x = \sin 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Poser :

$$\begin{cases} p(x) = \tan x \\ r(x) = \sin 2x \\ h(x) = \int p(x).dx = \ln\left|\dfrac{1}{\cos x}\right| \end{cases}$$

2) Exprimer directement la solution générale :

$$y_g(x) = e^{-\int p(x).dx}\left[\int e^{\int p(x).dx} r(x).dx + C\right] = e^{-\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|}\left[\int e^{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|} \sin 2x.dx + C\right]$$

Soit:

$$y_g(x) = \cos x\left[\int \frac{1}{\cos x}.\sin 2x.dx + C\right] = \cos x\left[\int \frac{2\cos x \sin x.dx}{\cos x} + C\right] = C.\cos x - 2\cos^2 x$$

Et si on introduit la valeur initiale, cela va nous permettre de fixer la constante C :

$$y_g(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C.\cos(0) - 2\cos^2(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

et déterminer la solution singulière :

$$\boxed{y_p(x) = 3\cos x - 2\cos^2 x}$$

7.2. L'équation de Bernoulli :

Certaines équations non-linéaires peuvent se ramener à une équation linéaire. C'est le cas de l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{y' + \tilde{p}(x).y = g(x)\,y^a}$$

Remarquons que si $a = 1$ ou $a = 0$, l'équation est déjà linéaire. Donc notre propos s'adresse à $a > 1$. Dès lors, on pose :

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

Et en dérivant cette nouvelle variable $u(x)$:

$$u'(x) = (1-a).y'.[y(x)]^{-a}$$

Soit en substituant y' par son expression grâce à l'équation de départ :

$$u'(x) = (1-a).y'.[y(x)]^{-a} = (1-a)\left[g(x)\,y^a - \tilde{p}(x).y\right][y(x)]^{-a} = (1-a)[g(x) - \tilde{p}(x).u(x)]$$

D'où la nouvelle équation devenue linéaire :

$$\boxed{u'+(1-a).\tilde{p}(x).u=(1-a)g(x)}$$

EXEMPLE: ÉQUATION DE VERHULST

Cette équation est un cas particulier de l'équation de Bernoulli où $a=2$:

$$\boxed{y'-A.y=-By^2 \quad \text{avec} \quad \text{A, B des constantes positives}}$$

donc ici, on pose :

$$\begin{aligned}
&u(x)=[y(x)]^{1-a}=[y(x)]^{-1}\\
&u'(x)=-y'y^{-2}=-(Ay-By^2)y^{-2}=B-Ay^{-1}=B-A.u
\end{aligned}$$

D'où l'équation devenue linéaire :

$$\boxed{u'+(1-a)\tilde{p}(x)u=(1-a)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad u'+Au=B}$$

Et la solution générale est alors:

$$\left.\begin{array}{l}
u_g(x)=e^{-\int p(x).dx}\left[\displaystyle\int e^{\int p(x).dx} r(x).dx+C\right]\\
\text{avec} \quad \begin{cases} p(x)=(1-a)\tilde{p}(x)=A \\ r(x)=(1-a)g(x)=B \end{cases}
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_g(x)=e^{-Ax}\left[\int e^{Ax}B.dx+C\right]=Ce^{-Ax}+\frac{B}{A}$$

C'est à dire finalement la solution cherchée pour $y(x)$:

$$\boxed{y_g(x)=\frac{1}{u_g}=\frac{1}{\frac{B}{A}+Ce^{-Ax}}}$$

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'+(\cos x).y=\sin(x)$.

2. $4.y'+6.y=10x$

3. $4x.y'+6x^2y=10x^2$

Ramener ces équations à une forme connue (équation linéaire ou équation de Bernoulli) et les résoudre pour trouver la solution générale :

4. $y'+y=\dfrac{x}{y}$

5. $y'\cos y+2x\sin y=2x$

6. $2x.y'=10x^3y^5+y$

7. $\dfrac{y'}{y^2}=\dfrac{1}{\sinh 3x-2xy}$

QUESTION ET PROBLÈMES

1. D'après vous, pourqui a-t-on préféré développer la théorie avec la forme canonique suivante $y'+p(x).y=r(x)$ en lieu de : $a(x).y'+b(x).y=r(x)$? Pour répondre à cette question, refaites la démarche pour trouver l'expression de la solution en fonction de cette dernière forme d'équation.

8. APPLICATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES SIMPLES

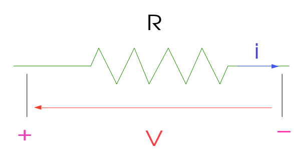
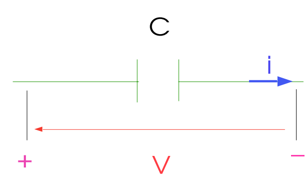
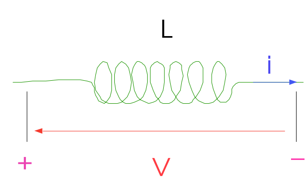
8.1. Définition :

Modéliser un problème c'est poser une équation mathématique qui représente le processus physique (soumis aux lois de la physique) ou conceptuel (soumis aux lois de relation entre les êtres humains).

Dans le cas de ce chapitre nous allons modéliser les problèmes de physique électrique simples avec au plus 2 composants passifs.

8.2. Les trois types de composants passifs :

En physique électrique, il existe trois types de composant passif qui se distinguent par leur relation entre le courant $i(t)$ et la tension aux bornes $v(t)$:

Type d'élément passif	Dénomination	Symbole Graphique	Équation d'élément
Proportionnel (P) Passif-dissipatif	Résistance		$v(t) = R.i(t)$
Intégral (I) Passif-réactif	Condensateur		$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t).dt$
Dérivée (D) Passif-réactif	Self-Inductance		$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

En plus de ces équations d'élément, nous avons besoin de connaître la loi de Kirchoff pour les tensions (aussi appelé la loi des mailles).

8.3. Loi de Kirchoff pour les tensions

"La somme des chutes de tension sur parcours fermé est nulle"

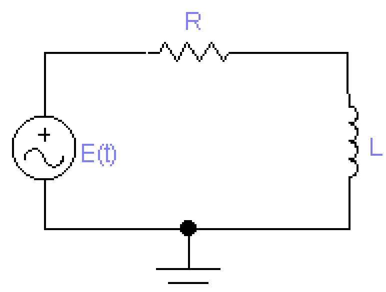
Ce qui se traduit par l'équation suivante:

$$\boxed{\sum_k v_k(t) = 0}$$

Dès lors nous pouvons composer un circuit avec au moins un élément de type **passif-réactif**[1] pour former une équation différentielle.

APPLICATION: COMPORTEMENT D'UN CIRCUIT R-L EN RÉGIME CONTINU

Le circuit R-L série est présenté en-dessous. Remarquez la convention moderne du symbole pour désigner une source de tension.



SOLUTION:

La première chose à faire c'est de modéliser, c'est à dire dresser l'équation mathématique qui corresponde le plus fidèlement possible à la réalité physique. Pour cela, nous partons avec la loi de Kirchoff pour les voltages qui nous permet de dresser la relation :

$$E(t) = V_R(t) + V_L(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en $i(t)$ que nous allons remettre sous la forme canonique étudiée ici en équations différentielles :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E(t)}{L} \quad \Leftrightarrow \quad y' + p(x)y = r(x)$$

Ce qui nous permet d'identifier nos variables :

$$\begin{cases} x = t \quad , \quad y(t) = i(t) \\ p(t) = \dfrac{R}{L} \quad \rightarrow \quad h(t) = \displaystyle\int p(t).dt = \frac{R}{L}t \\ r(t) = \dfrac{E(t)}{L} \end{cases}$$

[1] *cela semble drôle de définir ainsi un élément à la fois passif et réactif mais le teme passif est là pour dire que ce genre d'élément ne génère pas de l'énergie par lui-même. Il peut stocker de l'énergie pour la rendre par la suite, d'où le terme réactif, contrairement à la résistance qui est un élément passif-dissipatif, c'est à dire qui dépense sur le champ toute énergie qui lui a été fournie.*

et la forme de la solution (i.e. la solution générale) est alors:

$$i_g(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int e^{\frac{R}{L}t}.\frac{E(t)}{L}.dt + C\right]$$

Si la source de tension est un échelon ($E(t) = E_0$ pour tout $t > 0$), alors la solution générale devient:

$$i_g(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}.\frac{E_0}{L}.d\xi + C\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E_0}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right]$$

c'est à dire:

$$\boxed{i_g(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}}$$

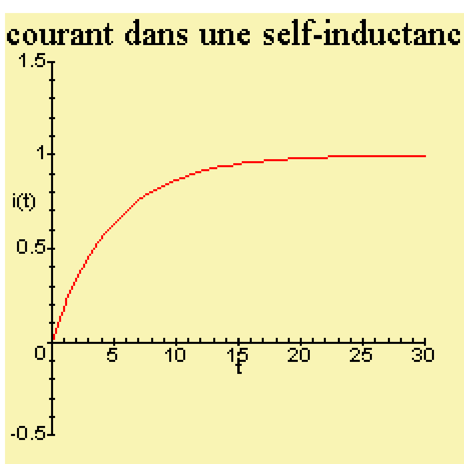
Si de plus, nous avons une condition initiale qui veut que le courant dans la self-inductance soit nul juste avant l'application de l'échelon de tension :

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{E_0}{R}$$

Ce qui nous permet d'obtenir une solution particulière au problème :

$$\boxed{i_p(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

D'où le graphe:



APPLICATION: COMPORTEMENT D'UN CIRCUIT R-L EN RÉGIME ALTERNATIF

Il s'agit du même circuit que précédemment, sauf qu'on changé la source de tension continue pour une tension alternative sinusoïdale: $E(t) = E_0 \sin \omega t$ pour tout $t > 0$.

SOLUTION:

La forme de la solution générale reste la même sauf que l'intégrale à évaluer est différente:

$$i_g(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}.\frac{E_0 \sin \omega\xi}{L}.d\xi + C\right] = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\sin\omega\xi.d\xi$$

Soit en intégrant par parties la section suivante:

$$\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\sin\omega\xi.d\xi = \left[-e^{\frac{R}{L}\xi}\frac{\cos\omega\xi}{\omega}\right]_{\xi=0}^{\xi=t} + \frac{R}{L\omega}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\cos\omega\xi.d\xi$$

De nouveau, par intégration par parties de la section à l'extrême droite:

$$\frac{R}{L\omega}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\cos\omega\xi.d\xi = \frac{R}{L\omega}\left\{\left[+e^{\frac{R}{L}\xi}\frac{\sin\omega\xi}{\omega}\right]_{\xi=0}^{\xi=t} - \frac{R}{L\omega}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\sin\omega\xi.d\xi\right\}$$

Ce qui nous amène finalement au résultat suivant:

$$\left(\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\sin\omega\xi.d\xi\right)\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} + e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{R}{L\omega^2}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]$$

par conséquence:

$$\begin{aligned}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{R}{L}\xi}\sin\omega\xi.d\xi &= \frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2} + e^{\frac{R}{L}t}\left[\left(\frac{L^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}\right)\left(\frac{R}{L\omega^2}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)\right] \\ &= \frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2} + e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{L}{R^2+L^2\omega^2}\right)(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)\end{aligned}$$

D'où la forme de la solution pour le courant:

$$\boxed{i_g(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{L\omega.E_0}{L^2\omega^2+R^2}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L^2\omega^2+R^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)}$$

Ce qui serait pareil si on écrit :

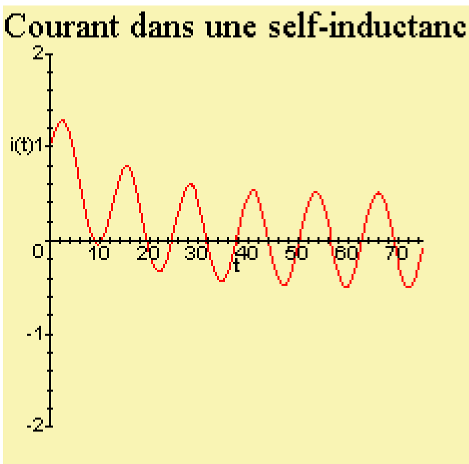
$$\boxed{i_g(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)}$$

En posant: $\begin{cases} R = r\cos\theta \\ L\omega = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right) \end{cases}$

On obtient une expression plus compacte:

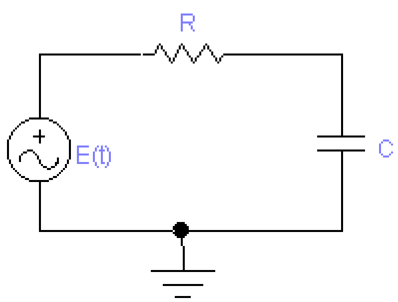
$$\begin{aligned} i_g(t) &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}(\cos\theta\sin\omega t - \sin\theta\cos\omega t) \\ &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}\sin(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

D'où le graphique pour le courant:



APPLICATION: COMPORTEMENT D'UN CIRCUIT R-C EN RÉGIME CONTINU

Le circuit R-C série est présenté en-dessous.



Il s'agit de trouver la courbe de courant qui traverse le condensateur, sachant que la tension appliquée est un échelon ($E(t) = E_0$ pour tout $t > 0$), et que : $V_C(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$.

SOLUTION:

Dressons l'équation qui représente ce circuit RC:

$$E(t) = V_R(t) + V_C(t) = R.i(t) + \frac{1}{C}\int i(t).dt$$

Soit en dérivant les 2 membres de l'équation:

$$\frac{dE(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t)$$

On obtient alors la forme canonique de résolution des équations différentielles du premier ordre:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{1}{R}\frac{dE(t)}{dt}$$

On identifie que:

$$\begin{cases} x = t \quad , \quad y(t) = i(t) \\ p(t) = \dfrac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad h(t) = \displaystyle\int p(t).dt = \dfrac{t}{RC} \\ r(t) = \dfrac{1}{R}\dfrac{dE(t)}{dt} \end{cases}$$

Et la solution générale se présente sous la forme:

$$i_g(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{1}{R}\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}}\frac{dE(\xi)}{d\xi}d\xi + C\right]$$

Dans ce cas ci où la source de tension est un échelon : $E(t) = E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = 0$, alors :

$$\boxed{i_g(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}}}$$

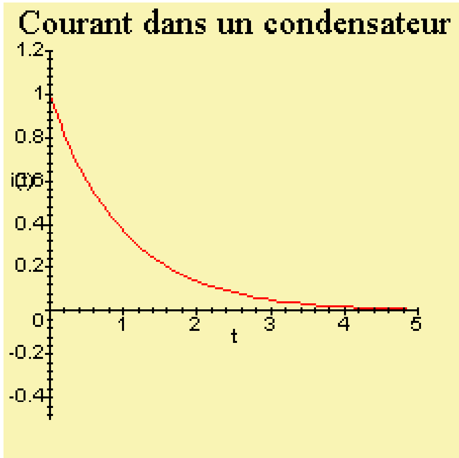
La condition initiale veut qu'à $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle et donc le courant n'est limité que par la résistance. Donc:

$$V_C(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad i(t = 0) = \frac{E_0}{R} \quad \rightarrow \quad C = \frac{E_0}{R}$$

d'où la solution particulière:

$$\boxed{i_p(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Graphique :



APPLICATION: COMPORTEMENT D'UN CIRCUIT R-C EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Il s'agit du circuit RC précédent, mais soumis à une source de tension sinusoïdale ($E(t) = E_0 \sin \omega t$ pour tout $t > 0$) et avec la même condition initiale $V_C(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$.

SOLUTION:

$$E(t) = E_0 \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = E_0 \omega \cos \omega t$$

Et la solution générale est:

$$i_g(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E_0 \omega}{R} \int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \cos \omega\xi . d\xi$$

Soit en intégrant la section suivante par parties:

$$\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \cos \omega\xi . d\xi = \left[e^{\frac{\xi}{RC}} \frac{\sin \omega\xi}{\omega} \right]_{\xi=0}^{\xi=t} - \frac{1}{RC\omega} \int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \sin \omega\xi . d\xi$$

Une deuxième intégration par parties sur la section à l'extrême droite :

$$\frac{-1}{RC\omega} \int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \sin \omega\xi . d\xi = \frac{-1}{RC\omega} \left\{ \left[-e^{\frac{\xi}{RC}} \frac{\cos \omega\xi}{\omega} \right]_{\xi=0}^{\xi=t} + \frac{1}{RC\omega} \int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \cos \omega\xi . d\xi \right\}$$

D'où le résultat:

$$\left(\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \cos\omega\xi . d\xi\right)\left(1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}\right)=\frac{-1}{RC\omega^2}+e^{\frac{t}{RC}}\left[\frac{1}{RC\omega^2}\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]$$

par conséquence :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{RC}} \cos\omega\xi . d\xi = -\left(\frac{RC}{1+R^2C^2\omega^2}\right)+e^{\frac{t}{RC}}\left[\left(\frac{R^2C^2\omega^2}{1+R^2C^2\omega^2}\right)\left(\frac{1}{RC\omega^2}\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{RC}{1+R^2C^2\omega^2}\right)+e^{\frac{t}{RC}}\left(\frac{1}{1+R^2C^2\omega^2}\right)\left(RC\cos\omega t+R^2C^2\omega\sin s\omega t\right)$$

D'où l'expression générale du courant :

$$\boxed{i_g(t)=Ce^{-\frac{t}{RC}}-\frac{E_0C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0\omega}{R}\left(\frac{1}{1+R^2C^2\omega^2}\right)\left(RC\cos\omega t+R^2C^2\omega\sin\omega t\right)}$$

ce qui est équivalent à écrire :

$$\boxed{i_g(t)=Ce^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}\left(\cos\omega t+RC\omega\sin\omega t\right)}$$

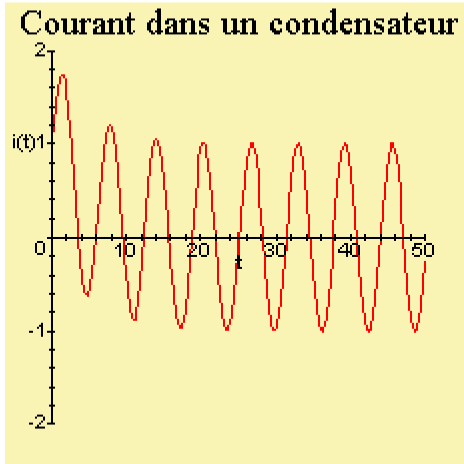
En posant: $\begin{cases} 1 = r\sin\theta \\ RC\omega = r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{1+R^2C^2\omega^2} \\ \theta=\arctan\left(\dfrac{1}{RC\omega}\right) \end{cases}$

On obtient une notation plus compacte:

$$i_g(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\left(\sin\theta\cos\omega t+\cos\theta\sin\omega t\right)$$

$$=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0C\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\sin(\omega t+\theta)$$

D'où le graphique pour le courant dans le condensateur:



APPLICATION: LES CIRCUITS RLC

Les circuits RLC sont des circuits qui comportent 2 éléments réactifs différents, de sorte qu'ils conduisent à une équation différentielle du second ordre. Nous les verrons alors dans les chapitres à venir.

EXERCICES

Donner les réponses numériques du courant dans l'élément passif-réactif pour les circuits série suivants (U(t) indique qu'il s'agit d'un échelon):

1. $R = 100 \quad \Omega$, $C = 0{,}01 \quad \mu F$, $E = 10.U(t) \quad Volts$.

2. $R = 1 \quad K\Omega$, $C = 0{,}22 \quad \mu F$, $E = 110\sqrt{2}\cos(2\pi \times 60 \times t) \quad Volts$.

3. $R = 100 \quad \Omega$, $L = 1 \quad mH$, $E = 20.U(t) \quad Volts$.

4. $R = 200 \quad \Omega$, $L = 100 \quad mH$, $E = 20\sqrt{2}\sin(2\pi \times 1000 \times t) \quad Volts$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

À l'aide de la loi de Kirchoff pour les tensions:

1. Déduire l'expression de la tension aux bornes du condensateur pour le circuit RC série.
2. Déduire l'expression de la tension aux bornes de la self-inductance pour le circuit RL série.
3. Déduire l'expression de la tension au bornes de la résistance pour le circuit RC série.
4. Déduire l'expression de la tension au bornes de la résistance pour le circuit RL série.

9. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2ÈME ORDRE HOMOGÈNES

Jusqu'à présent, nous avons considéré des équations différentielles du premier ordre, nous allons à présent aborder les équations linéaires du second ordre que nous écrivons sous la forme canonique suivante:

$$y''+p(x).y'+q(x).y = r(x)$$

Si $r(x) \neq 0$, l'équation est dite **non-homogène**.

Si $r(x) = 0$, l'équation est dite **homogène**.

EXEMPLES :

$y''+4y = e^x \sin x$: est une équation **non-homogène**.

$(1-x^2)y''-2xy'+6y = 0$: est une équation **homogène**.

$x(y''y + (y')^2) + 2y'y = 0$: est une équation homogène mais **non-linéaire**.

Trouver la solution à ce type d'équation, c'est trouver une fonction $y_h(x)$ qui vérifie l'équation dans un certain intervalle de x.

Contrairement aux équations du premier ordre, il n'y pas de solution générale toute faite. Par exemple, on peut dire que la fonction exponentielle a été inventée pour justement résoudre l'équation du premier ordre. Pour les équations différentielles du second ordre, il n'y pas de fonction attitrée qui permette d'exprimer la solution générale, seulement un emprunt de la fonction exponentielle dans certains cas simples que nous sommes obligés de nous restreindre (cas des coefficients constants dans les équations homogènes et non-homogènes). Nous commençons donc par le cas simple.

9.1. Résolution des équations homogènes : le principe de superposition des solutions

THÉORÈME :

Dans une équation différentielle linéaire et homogène, toute combinaison linéaire des solutions de l'équation est aussi solution de l'équation

DÉMONSTRATION :

Soit y_1 et y_2, deux solutions qui satisfont l'équation homogène :

$$y''+p(x).y'+q(x).y = 0$$

et soit $y = C_1y_1 + C_2y_2$, une combinaison linéaire de y_1 et de y_2. (donc C_1 et C_2 sont des constantes).

Il s'ensuit que les dérivées première et seconde sont :

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$
$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

et alors :

$$\begin{aligned} y''+p(x).y'+q(x).y &= (C_1y_1+C_2y_2)''+p(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+q(x)(C_1y_1+C_2y_2) \\ &= C_1y_1''+C_2y_2''+p(x)[C_1y_1'+C_2y_2']+q(x)[C_1y_1+C_2y_2] \\ &= C_1y_1''+p(x)[C_1y_1']+q(x)[C_1y_1]+C_2y_2''+p(x)[C_2y_2']+q(x)[C_2y_2] \\ &= C_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2] \\ &= C_1[0]+C_2[0] \end{aligned}$$

Donc :

$$y''+p(x).y'+q(x).y=0$$

ATTENTION :

Ce théorème ne s'applique pas dans le cas d'une équation non-homogène ou non-linéaire!!!

EXEMPLE : CAS D'UNE ÉQUATION HOMOGÈNE

Soit à savoir si une combinaison linéaire des solutions de $y''-y=0$ est aussi solution de la même équation.

SOLUTION :

On peut tester que $y_1=e^{+x}$ est une solution de cette équation, mais que $y_2=e^{-x}$ est aussi une solution. Voyons à présent si $y_3=-3e^{+x}+8e^{-x}$ est une solution :

$$y_3' = -3e^{+x}-8e^{-x}$$
$$y_3'' = -3e^{+x}+8e^{-x}$$

et :

$$y_3''-y_3=(-3e^{+x}-8e^{-x})-(-3e^{+x}-8e^{-x})=0$$

donc $y_3=-3e^{+x}+8e^{-x}$ est aussi une solution de $y''-y=0$.

EXEMPLE : CAS D'UNE ÉQUATION NON-HOMOGÈNE:

Soit à vérifier si une combinaison linéaire des solutions de $y''+y=1$ est aussi solution de la même équation.

SOLUTION :

On pourra vérifier que $y_1 = (1+\cos x)$ est une solution et que $y_2 = (1+\sin x)$ est aussi une solution. Par contre $y_3 = -2(1+\cos x)$ ou $y_4 = (1+\cos x)+(1+\sin x)$ ne sont pas solutions.

À compléter par l'étudiant en développant la dérivée première puis seconde et réintroduire dans l'équation.

EXEMPLE : CAS D'UNE ÉQUATION NON-LINÉAIRE

Soit à savoir si une combinaison linéaire des solutions de l'équation non linéaire suivante $y''y - xy' = 0$ est aussi solution de la même équation.

SOLUTION :

On pourra vérifier que $y_1 = x^2$ et $y_2 = 1$ sont tous deux solutions de l'équation $y''y - xy' = 0$, par contre il n'en est pas de même avec $y_3 = -x^2$ ou $y_4 = 1 + x^2$.

À compléter par l'étudiant en développant les dérivées de y_3 ou y_4 et réintroduire dans l'équation.

9.2. Problème avec conditions initiales

Équation du 1[er] ordre : Une condition initiale suffit pour trouver la solution particulière.

Équation du 2[ème] ordre : Deux conditions initiales sont nécessaires pour obtenir la solution particulière.

Dans le cas d'un équation homogène, la solution homogène est aussi la solution générale, donc :

$$y_g = y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

Pour obtenir la solution particulière, nous devons fixer les 2 constantes C_1 et C_2 à partir de :

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0) = k_0 \\ y'(x_0) = k_1 \end{cases}}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la solution de l'équation avec conditions initiales suivantes : $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

SOLUTION :

Nous savons déjà les deux solutions de l'équation homogène, d'où la solution générale :

$$y_g = y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Recherchons la solution particulière, pour cela, introduisons les 2 conditions initiales pour fixer les constantes C_1 et C_2.

$$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 e^{(0)} + C_2 e^{-(0)} = 5 \\ C_1 e^{(0)} - C_2 e^{-(0)} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 - C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

d'où la solution particulière :

$$\boxed{y_p = 4e^{x} + e^{-x}}$$

REMARQUE :

On remarquera que y_1 et y_2 sont 2 solutions indépendantes. Si par exemple on avait pris comme paire de solutions :

$$\begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = ke^{x} \end{cases}$$

alors $y_g = y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ n'est pas assez générale pour déterminer les constantes C_1 et C_2.

9.3. Définition : LA SOLUTION GÉNÉRALE

Une solution générale de l'équation homogène : $y''+p(x).y'+q(x).y = 0$ est une combinaison linéaire de 2 formes solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes. C'est à dire qu'on doit avoir :

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0\,.$$

9.4. Définition : LA SOLUTION PARTICULIÈRE

Une solution particulière est obtenue lorsque les constantes d'intégration C_1 et C_2 ont été résolues grâce aux conditions initiales.

9.5. Définition : BASE DE SOLUTION

Une base de solution est un jeu de solutions linéairement indépendantes.

EXEMPLES :

On peut voir que $y_1 = e^{+x}$ et $y_2 = e^{-x}$ forment une base de solutions pour l'équation : $y''-y=0$.

De même on pourra voir que $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$ forment une base de solutions pour : $y''+y=0$, car on a $\dfrac{y_1}{y_2} \neq Cte$ sur tout le domaine de définition de x.

9.6. Comment obtenir la base de solution, lorsqu'une seule des deux solutions est connue : réduction de l'ordre

Voici une méthode d'intérêt pratique lorsque nous avons réussi à obtenir une seule des deux solutions qui forme le base de solution de l'équation du second ordre. C'est la méthode de **réduction de l'ordre** de Lagrange[1].

Supposons que nous ayons réussi à obtenir d'une quelconque façon la solution y_1. Pour obtenir la solution y_2, nous allons poser $y_2 = u.y_1$, où u est bien sûr est une fonction (expliquez donc pourquoi elle ne peut être qu'une constante) que nous allons essayer de déterminer.

Soit donc :

$$y_2 = u.y_1$$

en dérivant une première fois:

$$y'_2 = u'.y_1 + u.y'_1$$

Une seconde fois :

$$y''_2 = u''.y_1 + 2u'.y'_1 + u.y''_1$$

De sorte qu'en les substituant dans l'équation homogène $y''+p(x).y'+q(x).y=0$:

$$(u''.y_1 + 2u'.y'_1 + u.y''_1) + p(x).(u'.y_1 + u.y'_1) + q(x).(u.y_1) = 0$$

Comme y_1 est connu, on peut regrouper les termes en fonction de la nouvelle variable u à résoudre :

$$u''[y_1] + u'[2y'_1 + p(x).y_1] + u\left[\underbrace{y''_1 + p(x).y'_1 + q(x).y_1}_{=0}\right] = 0$$

---

[1] *Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) était né à Turin en Italie, d'une famille d'immigrants français. Il obtint son premier poste d'enseignant à l'académie militaire de Turin à l'âge de 19 ans. Il migra ensuite à l'Académie de Berlin pour occuper le poste de directeur de la section des mathématiques à l'age de 40 ans, et finit son périple à Paris en 1787. Il nous a laissé une œuvre scientifique considérable: méthode des isopérimètres, calcul des variations, analyse basée sur l'emploi des développements en série de Taylor, théorie des approximations. Il intervint également dans la thérie des nombres, en algèbre, en mécanique des objets célestes. Il présida en 1790 à la commission chargée d'instaurer un système des poids et mesures demandée par l'Assemblée Constituante.*

Mais, puisque y_1 est solution de cette même équation, nous avons donc une expression simplifiée :

$$u''[y_1]+u'[2y'_1+p(x).y_1]=0$$

c'est aussi en divisant par y_1 :

$$u''+u'\frac{2y'_1+p(x).y_1}{y_1}=0$$

et finalement nous nous retrouvons à résoudre un équation du premier ordre en $U=u'$:

$$U'+\left(\frac{2y'_1+p(x).y_1}{y_1}\right)U=0$$

Cette équation est résolue par séparation des variables :

$$\frac{dU}{U}=-\left(\frac{2y'_1}{y_1}+p(x)\right)dx \quad\Rightarrow\quad \ln|U|=-2\ln|y_1|-\int p(x)dx$$

et en prenant les exponentielles :

$$U=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

d'où l'expression pour la seconde solution :

$$\boxed{y_2=y_1.\int\left(\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\right)dx}$$

EXEMPLE : TROUVER LA DEUXIÈME SOLUTION PAR RÉDUCTION DE L'ORDRE

Soit l'équation suivante, dont une solution évident est $y_1=x$:

$$x^2y''-xy'+y=0$$

SOLUTION :

Premièrement il faut mettre l'équation sous la forme canonique souhaitée, en divisant les 2 membres de l'équation par x^2 pour bien identifier le coefficient $p(x)$:

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0$$

donc $p(x)=-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad -\int p(x)dx=\ln x$, de sorte que :

$$U(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{x^2} e^{\ln x} = \frac{1}{x}$$

et finalement la solution y_2 recherchée est :

$$\boxed{y_2 = y_1 . \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \right) dx = x . \int \frac{dx}{x} = x . \ln x}$$

EXERCICES

Fausses équations du second ordre: Les équations suivantes, par un changement de variable approprié, se ramènent en fait à une équation du premier ordre. Réduire alors les équations suivantes à une équation du premier ordre et donner la solution générale:

1. $xy''-2y'=0$
2. $y''+3y'=0$
3. $y''=2y'$
4. $xy''+2y'=y'^2$
5. $yy''+y'^2=0$
6. $yy''-y'^2=0$
7. $y''+y'^2=0$
8. $y''+y'^3\cos y=0$
9. $y''+e^{2y}y'^3=0$
10. $y''+(1+y^{-1})y'^2=0$

Note: Pour certaines équations, il faut poser $y'(x)=z(x)=\dfrac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad y''(x)=z'(x)=\dfrac{dz}{dy}.\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dy}.z(x)$, ce qui permet de se ramener à une équation en $z(y)$, et où y devient la nouvelle variable indépendante.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Le principe de superposition des solutions est valide pour les équations homogènes? Non-homogènes? Refaites la démonstration.
2. Donner la forme de la solution homogène pour une équation du second ordre. Pour une équation du premier ordre. Il y a combien de coefficients à déterminer dans la solution homogène d'une équation du second ordre? Du premier ordre?
3. À quoi servent les conditions initiales? Il y a combien de conditions à imposer dans une équation du premier ordre? Du second ordre?
4. Qu'est ce que la solution particulière?
5. Redémontrer la méthode de réduction de l'ordre de Lagrange.

10. ÉQUATIONS LINÉAIRES HOMOGÈNES DE 2$^{\text{ÈME}}$ ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Lorsque nous avons une équation de la forme suivante :

$$\boxed{y''+ay'+by=0}$$

où a et b sont des scalaires, on parle d'une équation différentielle (parce que la devinette comporte les dérivées de la fonction), linéaire (parce que la devinette est une combinaison linéaire de la fonction et de ses dérivées), du second ordre (parce que la plus haute dérivée est d'ordre 2) homogène (le second membre est nul) et à coefficients constants. Pour résoudre une telle équation, on peut se rappeler que pour l'équation similaire du premier ordre ($y'+ky=0$) on avait comme forme générale de la solution : $y=e^{-kx}$. Il suffit donc d'essayer la forme de solution suivante :

$$y=e^{\lambda x}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} y=e^{\lambda x} \\ y'=\lambda e^{\lambda x} \\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

De sorte que l'équation devient :

$$y''+ay'+by=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 e^{\lambda.x})+a(\lambda e^{\lambda.x})+b(e^{\lambda.x})=0$$

L'équation de départ s'est transformée en équation dite **caractéristique** ou **auxiliaire** :

$$(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda.x}=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2+a\lambda+b=0}_{\textit{équation caractéristique}}$$

Ainsi, grâce l'introduction de la forme exponentielle, en lieu de résoudre une équation différentielle, on a transposé le problème en une équation ordinaire linéaire. Les racines de cette équation caractéristique ou auxiliaire étant :

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4.b}}{2} \\ \lambda_2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4.b}}{2} \end{cases}$$

de sorte qu'on obtient des fonctions solutions qui sont :

$$\begin{cases} y_1=e^{\lambda_1.x}=e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4.b}}{2}} \\ y_2=e^{\lambda_2.x}=e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4.b}}{2}} \end{cases}$$

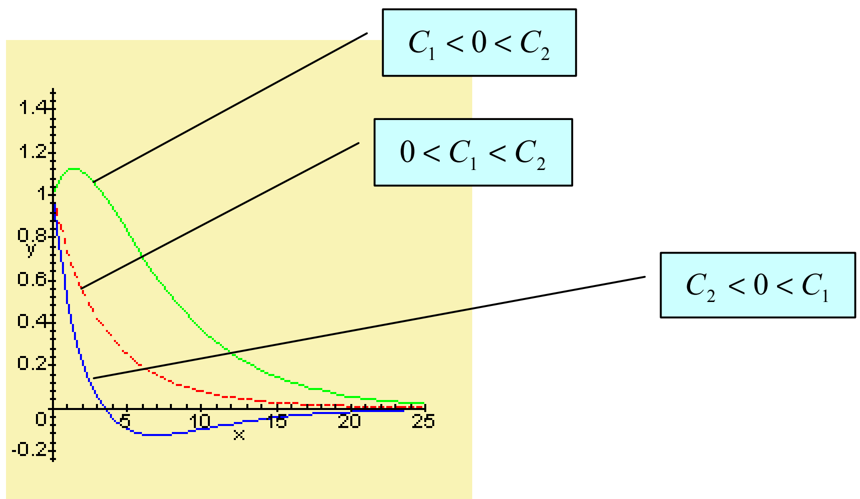
10.1. Discussion des cas pour les racines de l'équation caractéristique

Cas 1 : $(a^2 - 4b) > 0$ **:**

Dans ce cas, le discriminant est positif, de sorte la racine carrée est un réel, et les racines λ_1, λ_2 sont alors deux réels distincts ($\in R$), et la solution générale de l'équation homogène est formée par la combinaison linéaire des deux fonctions solutions y_1 *et* y_2 qui sont indépendantes :

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Généralement les composants physiques font en sorte que les racines caractéristiques λ_1 et λ_2 sont toutes les 2 négatives. Néanmoins à cause de différentes conditions initiales, on a les cas de figure suivants selon le signe de C_1 et de C_2.



EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation homogène avec conditions initiales suivante : $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Dresser l'équation caractéristique associée :

Sachant qu'en introduisant la forme exponentielle $y = e^{\lambda . x}$ nous obtenons une équation caractéristique qui a une forme semblable à l'équation différentielle de départ, il suffira pour dresser rapidement l'équation caractéristique, de remplacer y par λ et la puissance de chaque dérivée par le même facteur d'exposant :

$$\text{(équation homogène de départ)} \quad y'' - y = 0 \,\} \Rightarrow \{\, \lambda^2 - \lambda^0 = 0 \quad \text{(équation caractéristique associée)}$$

2) Trouver les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale de l'équation homogène :

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

4) Introduire les condition initiales pour fixer les constantes :

$$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = C_1 e^{1(0)} + C_2 e^{-1(0)} \\ y'(0) = (1) C_1 e^{1(0)} + (-1) C_2 e^{-1(0)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 - C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

5) Exprimer la solution particulière :

$$\boxed{y_p = 1e^{x} + 4e^{-x}}$$

Cas 2 : $(a^2 - 4b) = 0$ **:**

Dans ce cas on obtient une racine double pour l'équation caractéristique : $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2}$ et une seule forme de solution $y_1 = e^{\frac{-a}{2}x}$. Afin de trouver la deuxième forme, on applique la méthode de la variation de la constante (variation des paramètres). On pose donc :

$$y_2(x) = u(x).y_1(x)$$

de sorte que :

$$\begin{cases} y_2 = u.y_1 \\ y'_2 = u'.y_1 + u.y'_1 \\ y''_2 = u''.y_1 + 2.u'.y'_1 + u.y''_1 \end{cases}$$

et en remettant ces expressions dans l'équation homogène de départ :

$$(u''.y_1 + 2.u'.y'_1 + u.y''_1) + a.(u'.y_1 + u.y'_1) + b(u.y_1) = 0$$

et en regroupant en fonction de u :

$$u''.(y_1) + u'\underbrace{(2y'_1 + a.y_1)}_{=0} + u\underbrace{(y''_1 + a.y'_1 + b.y_1)}_{=0} = 0$$

Or le coefficient de u' est nul car :

$$2.y'_1 = -a.e^{\frac{-a}{2}x} = -a.y_1$$

Et le coefficient de u aussi est nul car y_1 est une forme de la solution. De sorte que finalement on a :

$$u''.\underbrace{y_1}_{\neq 0,\text{ car forme exponentielle}} = 0 \Rightarrow u''=0 \Rightarrow u'=Cte. \Rightarrow u = k_1 x + k_o$$

On a donc la deuxième forme de solution :

$$y_2(x) = (k_1 x + k_0) y_1(x)$$

Et la forme générale de la solution est alors :

$$y_h = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{-a}{2}x} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2}$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation homogène avec conditions initiales suivante : $\begin{cases} y''+8y'+16y=0 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Écrire l'équation caractéristique associée :

$$\underbrace{y''+8y'+16y=0}_{\text{équation homogène de départ}} \Rightarrow \underbrace{\lambda^2 + 8\lambda^1 + 16\lambda^0 = 0}_{\text{équation caractéristique associée}}$$

2) Trouver les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 8.\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta^2 = (8)^2 - 4.(16).(1) = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{-(8)}{2} = -4 \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale de l'équation homogène :

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{-a}{2}x} = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}$$

4) Fixer les coefficients à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = (C_1 + C_2(0))e^{-4(0)} \\ y'(0) = (0 + C_2)e^{-4(0)} + -4(C_1 + C_2(0))e^{-4(0)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ -4.C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 13 \end{cases}$$

5) Exprimer la solution particulière :

$$\boxed{y_p = (3+13x).e^{-4x}}$$

Cas 3 : $(a^2 - 4b) < 0$ **:**

Comme on ne peut prendre la racine carrée d'une quantité négative dans le domaine des réels, on introduit alors les nombres complexes. Ainsi, on sait que :

$$(i\omega)^2 = -\omega^2$$
$$(-i\omega)^2 = -\omega^2$$

où le i représente le vecteur unitaire sur l'axe des imaginaires. Il suffit alors de poser :

$$\Delta^2 = -4\omega^2 \Rightarrow \Delta = \sqrt{\Delta^2} = \sqrt{-4\omega^2}$$

soit $\Delta = \pm 2i\omega$

et les racines de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega \\ \lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\omega \end{cases}$$

et la solution générale de l'équation homogène :

$$y_h = C_1 e^{(-\frac{a}{2} + i\omega).x} + C_2 e^{(-\frac{a}{2} - i\omega).x}$$

y_h est à présent une solution dans le domaine des complexes. Lorsque les conditions initiales sont observables dans le monde physique, alors on obtient une solution particulière y_p dans le domaine des réels. C'est ce qu'on veut deviner en exprimant autrement la solution générale :

$$y_h = e^{-\frac{a}{2}.x}(C_1 e^{+i\omega.x} + C_2 e^{-i\omega.x})$$

comme :

$$e^{+i\omega.x} = \cos\omega x + i.\sin\omega x$$
$$e^{-i\omega.x} = \cos\omega x - i.\sin\omega x$$

alors :

$$\begin{aligned} y_h &= e^{-\frac{a}{2}.x}\left[C_1(\cos\omega x + i.\sin\omega x) + C_2(\cos\omega x - i.\sin\omega x)\right] \\ &= e^{-\frac{a}{2}.x}\left[(C_1 + C_2)\cos\omega x + i.(C_1 - C_2).\sin\omega x)\right] \\ &= e^{-\frac{a}{2}.x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) \end{aligned}$$

Les constantes A et B seront déterminées par les conditions initiales.

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation homogène avec conditions initiales suivante : $\begin{cases} y''-2y'+10y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=5 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Écrire l'équation caractéristique associée :

(équation homogène de départ) $y''-2y'+10y=0 \} \Rightarrow \{ \lambda^2-2\lambda^1+10\lambda^0=0$ (équation caractéristique associée)

2) Trouver les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2-2.\lambda+10=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta^2=(-2)^2-4.(10).(1)=-36 \\ \lambda_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{-36}}{2}=1+3i \\ \lambda_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{-36}}{2}=1-3i \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale de l'équation homogène :

$$y_h=e^{-\frac{a}{2}x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)=e^x(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

4) Fixer les coefficients à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{(0)}(A\cos 3(0)+B\sin 3(0))=1 \\ 1e^{(0)}(A\cos 3(0)+B\sin 3(0))+e^{(0)}(-3A\sin 3(0)+3B\cos 3(0))=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A+3B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{4}{3} \end{cases}$$

5) Exprimer la solution particulière :

$$\boxed{y_p=e^x(\cos 3x+\tfrac{4}{3}\sin 3x)}$$

REMARQUE :

Au lieu d'exprimer la somme d'un cosinus et d'un sinus, on exprime la solution sous la forme d'un seul cosinus avec déphasage en posant comme suit :

$$\begin{cases} 1=r\cos\theta \\ \frac{4}{3}=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{(1)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3} \\ \theta=\arctan\left(\frac{4/3}{1}\right)\approx 53^o \end{cases} \Rightarrow \quad y_p=\frac{5}{3}e^x\cos\left(3x-53^o\right)$$

EXERCICES

Trouver la solution générale pour chacune des équations homogènes à coefficients constants suivantes:

1. $y''+3y'+2y=0$.

2. $y''+2y'+y=0$.

3. $y''-6y'+9y=0$.

4. $y''=2y'+5y$.

5. $y''+6y'+9y=0$.

6. $y''+1{,}02.y'+3{,}51.y=0$.

Trouver la solution particulière pour chacune des équations homogènes, à coefficients constants, et avec conditions initiales suivantes:

7. $\begin{cases} y''-16y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=20 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} y''-4y'+4y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} y''+2\sqrt{2}\,y'+2y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=\sqrt{2} \end{cases}$.

10. $\begin{cases} 5y''+16y'+12{,}8.y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-2{,}3 \end{cases}$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Citez les différentes formes de solution possibles. Combien il y a de cas?

2. Comment forme-t-on l'équation caractéristique? Comment a-t-on posé la forme de la solution?

3. Combien il y a de formes solutions dans la solution générale d'une équation du second ordre? Du troisième ordre?

4. Quelle différence faites-vous entre la solution générale et la solution particulière?

5. Quelle différence faites-vous entre une forme solution et la solution générale?

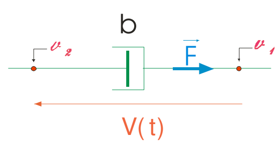
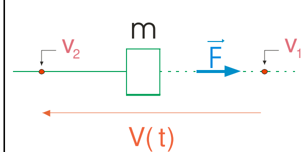
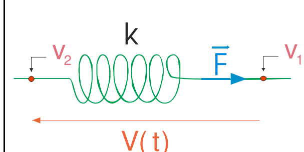
6. À quoi servent les conditions initiales?

11. APPLICATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE AUX SYSTÈMES MÉCANIQUES

Plusieurs systèmes physiques comportant au moins deux éléments dits réactifs (ne pouvant se réduire à un simple élément réactif : soit qu'il y ait deux types d'éléments réactifs différents, soit deux de même type mais non-adjacents, soit qu'il y ait deux de même type mais reliés par un noeud ayant au moins trois branches), sont décrits par une équation du second ordre.

11.1. Table de correspondance électrique-mécanique

Cette table montre la correspondance entre les éléments mécaniques et les éléments électriques. Ceux qui sont plus à l'aise en électrique doivent se servir de cette table pour convertir les significations mécaniques en homologues électriques et vice-versa pour ceux qui se sentent plus à l'aise en mécanique.

Type d'élément passif	Dénomination	Symbole Graphique	Équation d'élément	Équivalent électrique
Proportionnel (P) Passif-dissipatif	Amortisseur		$\mathsf{V}(t) = \frac{1}{b}.F(t)$	$v(t) = R.i(t)$
Intégral (I) Passif-réactif	Masse		$\mathsf{V}(t) = \frac{1}{m}\int F(t).dt$	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t).dt$
Dérivé (D) Passif-réactif	Ressort		$\mathsf{V}(t) = \frac{1}{k}\frac{dF(t)}{dt}$	$v(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$

Dans les équations éléments mécaniques de translation, $\mathsf{V}(t)$ représente la différence de vitesse entre les 2 points d'un élément, alors que dans les circuits électriques $v(t)$ représente la différence de potentiel (d.d.p) entre les bornes d'un élément. Il est à noter que dans le cas de la masse, l'autre borne v_1 est tout simplement la vitesse du référentiel dans lequel on observe le mouvement de la masse. C'est pourquoi la ligne de liaison au référentiel est en pointillé[1].

[1] *Voir en annexe de ce chapitre concernant la formation de ces équations d'élément. Cet annexe vous montre également la préférence d'utilisation de la vitesse* $\mathsf{V}(t)$ *en lieu de la position* $y(t)$ *comme variable aux bornes.*

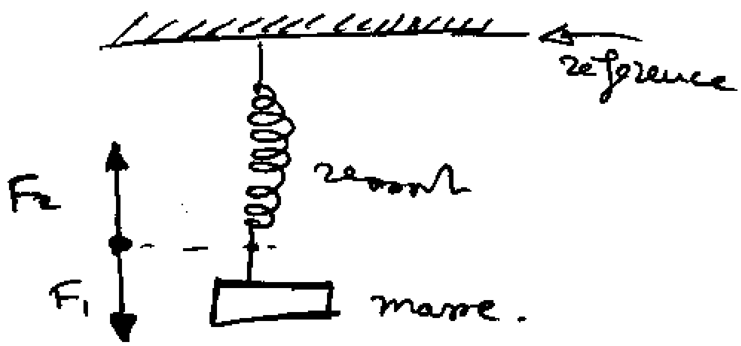
EXEMPLE : OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTÈME MASSE-RESSORT

Soit à considérer un système masse-ressort suspendu à référentiel en état d'apesanteur (soumis à aucun champ de gravitation). On veut alors connaître la position instantanée de la masse par rapport au référentiel auquel est suspendu le ressort.

SOLUTION :

1) Mise en équation :

Le mouvement de la masse d'inertie (on considère les éléments comme idéaux, c'est à dire que le ressort ne comporte aucune masse et que toute la masse est concentrée…dans l'élément de masse) dépend de la somme vectorielle des forces appliquées dessus. Dans notre problème il y aurait 2 forces, la force de gravitation appliquée par un champ (de gravitation) et la force de rappel du ressort :



D'où les équations d'élément: $\begin{cases} F_1 = m_g g \\ F_2 = -ky \end{cases}$ et la loi des nœuds (loi de Kirchoff pour les courants) :

$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = m_g g - ky = m_i \gamma$$

Ici F_1 constitue le second membre, car :

$$m_i \frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_1 = m_g g$$

Et si l'on considère que le système masse-ressort est plongé dans un milieu d'apesanteur (absence de champ de gravitation), nous obtenons alors une équation homogène :

$$m_i y'' + ky = 0$$

2) Résolution de l'équation :

Mettons l'équation sous la forme canonique reconnaissable et formulons son équation caractéristique associée :

$$y'' + \frac{k}{m_i} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 0.\lambda^1 + \frac{k}{m_i} \lambda^0 = 0$$

Et les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\Delta^2 = (0)^2 - \frac{4k}{m_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-0 + i.2\sqrt{\dfrac{k}{m_i}}}{2} = +i\sqrt{\dfrac{k}{m_i}} = +i\omega_0 \\ \lambda_2 = \dfrac{-0 - i.2\sqrt{\dfrac{k}{m_i}}}{2} = -i\sqrt{\dfrac{k}{m_i}} = -i\omega_0 \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale :

$$y_g = y_h = e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) \quad \Rightarrow \quad y_g(t) = e^{0.t}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)$$

4) Expression de la solution spécifique :

Il y a deux possibilités pour la solution spécifique : ou bien le système masse-ressort était originellement au repos, c'est à dire à position originelle et vitesse originelle nulles ($y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$), dès lors il y restera indéfiniment. Car :

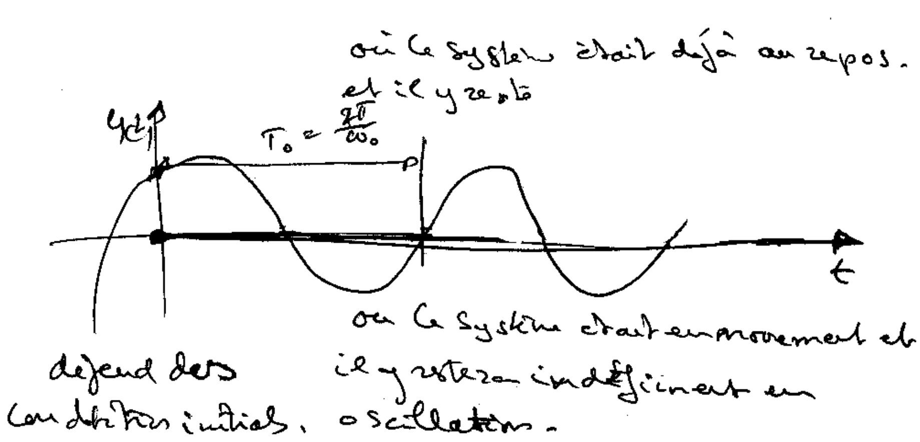
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{(0)}\left(A\cos\omega_0(0) + B\sin\omega_0(0)\right) = 0 \\ e^{(0)}\left(A\cos\omega_0(0) + B\sin\omega_0(0)\right) + e^{(0)}\left(-\omega_0 A\sin\omega_0(0) + \omega_0 B\cos\omega_0(0)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A + \omega_0 B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ou bien le système était déjà en mouvement ($y(0) \neq 0$ ou $y'(0) \neq 0$) et alors il y restera indéfiniment en oscillation sinusoïdale puisqu'alors :

$$\begin{cases} y(0) \neq 0 \\ \text{ou } y'(0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ \text{ou } A + \omega_0 B \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ \text{ou } B \neq 0 \end{cases}$$

5) Graphique récapitulatif :



REMARQUE : PASSAGE DE $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ À $C\cos(\omega_0 t - \theta)$:

Il suffit de poser : $\begin{cases} A = C\cos\theta \\ B = C\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \end{cases}$

Puisque : $C\cos\theta\cos\omega_0 t + C\sin\theta\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \theta)$

CONSTATATION :

Lorsque :

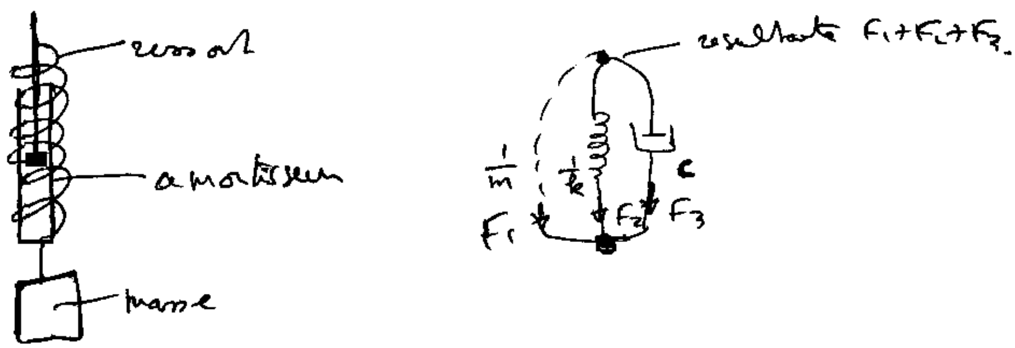
$$y''+0.y'+by = 0$$

Cette absence de y' implique qu'il s'agit d'un système non-amorti.

EXEMPLE : SYSTÈME MÉCANIQUE AVEC AMORTISSEMENT :

En réalité, comme le système masse-ressort est en contact avec l'air, il y a un frottement. De sorte que l'énergie va se dissiper au fur et à mesure par chauffage de l'air environnant.

Pour accentuer cette perte, on peut remplacer ce frottement minime par un frottement visqueux. Ce qui nous donne tout simplement l'ensemble amortisseur pour voitures.



Or dans un amortisseur, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse relative entre les 2 bornes :

$$F_3 = b.\mathrm{V}(t) = b.\frac{dy(t)}{dt}$$

et dans un milieu neutre:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \quad \text{(équation homogène)}$$

alors que dans un milieu sous influence de la gravitation, on aura :

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_g \quad \text{(équation non-homogène)}$$

SOLUTION :

1) Mise en équation :

Dans ce cas-ci, nous avons : $m_i \dfrac{d^2 y}{dt^2} + b\dfrac{dy}{dt} + ky = 0$

2) Résolution de l'équation :

Mettons cette équation sous la forme canonique et dressons son équation caractéristique associée :

$$y'' + \frac{b}{m_i} y' + \frac{k}{m_i} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{b}{m_i}\lambda^1 + \frac{k}{m_i}\lambda^0 = 0$$

et les racines caractéristiques sont : $\Delta^2 = \left(\dfrac{b}{m_i}\right)^2 - \dfrac{4k}{m_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4km_i}}{2m_i} \\ \lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4km_i}}{2m_i} \end{cases}$

Il y a quatre situations possibles :

Cas 1 : $\Delta^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 > 4km_i$: Le système est alors sur-amorti, et il y a 2 racines réelles λ_1 et λ_2.

Cas 2 : $\Delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4km_i$: Le système est amorti critique, et il y a une racine double λ_1.

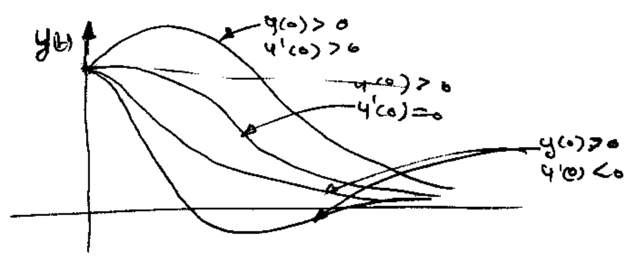
Cas 3 : $\Delta^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 < 4km_i$: Le système est sous-amorti, et il y a 2 racines complexes conjugées λ_1 et $\overline{\lambda_1}$.

Cas 4 : $b = 0$: Le système est non-amorti et il y a 2 racines imaginaires purs.

ÉTUDE DU CAS 1 : SYSTÈME SUR-AMORTI

En posant : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{b}{2m_i} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4km_i}}{2m_i} \end{cases}$, nous avons l'expression générale de la solution sous la forme:

$$y_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha-\beta)t}$$

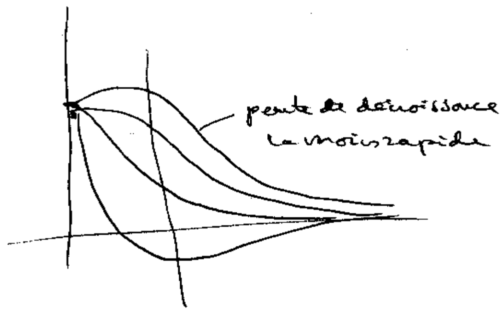


ÉTUDE DU CAS 2 : AMORTISSEMENT CRITIQUE

Nous avons alors l'expression suivante pour solution :

$$y_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$$

C'est celle qui permet la décroissance la moins rapide :



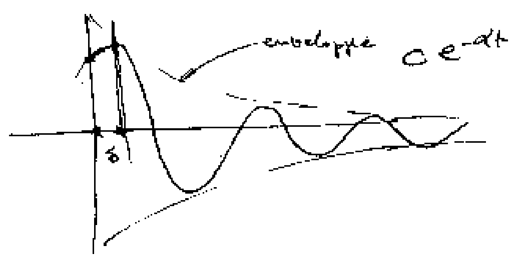
ÉTUDE DU CAS 3 : SYSTÈME SOUS-AMORTI (OSCILLATIONS AMORTIES)

Dans ce cas, on peut réécrire les racines caractéristiques par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha + i\omega^* \\ \lambda_2 = -\alpha - i\omega^* \end{cases} \quad \text{avec } \omega^* = \frac{\sqrt{4km_i - b^2}}{2m_i}$$

et la solution générale s'exprime par :

$$\begin{aligned} y_g(t) &= e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{+i\omega^* t} + C_2 e^{+i\omega^* t}\right) \\ &= e^{-\alpha t}\left(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t\right) \\ &= Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \theta) \end{aligned}$$



ÉTUDE DU CAS 4 : SYSTÈME NON-AMORTI

C'est que le cas que nous avions vu au début sans la constante d'amortissement b (ou désignée c selon certains auteurs) :

$$\begin{aligned}
y_g(t) &= \left(C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{+i\omega_0 t}\right) \\
&= \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right) \\
&= C\cos\left(\omega_0 t - \theta\right)
\end{aligned}$$

C'est une sinusoïde pure avec déphasage :

EXERCICES

Faire tracer les courbes de réponses suivantes avec MapleV pour au moins trois jeux distinctifs de valeurs pour (C_1, C_2) :

1. $y_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha-\beta)t}$

2. $y_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$

3. $y_g(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{+i\omega^* t} + C_2 e^{+i\omega^* t}\right) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \theta)$.

4. $y_g(t) = e^{0.t}\left(C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{+i\omega_0 t}\right) = (A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t - \theta)$

Note: c'est à vous de choisir les valeurs pour (λ_1, λ_2) dans chaque cas, pour montrer les courbes modèles.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Soit un jouet de bébé, de masse 0,3 Kg attaché au plafond par un ressort à boudin dont la constante de rappel est k=0,01 Kg/m. On néglige le frottement de l'ensemble dans l'air et la longueur au repos du ressort, mais la pesanteur à cet endroit est g=9,81 N/Kg . Déterminer alors l'équation de la position y(t) du jouet par rapport au plafond.

2. Le même jouet attaché au ressort à boudin est étiré à une distance initiale de 1,0 mètre du plafond (y(0)=1 m). Il est relâché avec une vitesse initiale nulle (y'(0)=0 m/s). Donner alors l'expression de la position du jouet par rapport au plafond en tout temps.

3. On considère maintenant que le jouet, en se déplaçant subit une force de friction avec l'air proportionnelle à sa vitesse de déplacement comme suit: $\vec{F}_r = -b\vec{v} = -0{,}02 \times \vec{v}$. Exprimer la nouvelle équation du mouvement du jouet.

4. Donner la solution de la position du jouet en fonction du temps, en considérant toujours les mêmes conditions initiales qu'en 2.

ANNEXE AU PRÉSENT CHAPITRE

Voici à présent comment nous sommes parvenus à déduire les équations d'élément pour les systèmes mécaniques de translation.

ÉQUATION D'ÉLÉMENT PASSIF-DISSIPATIF :

Cette relation provient de l'expression de la force de frottement qui est proportionnelle à la vitesse de déplacement de l'élément (qui est un amortisseur).

$$F = b.\mathrm{V}(t) = b.\frac{dy(t)}{dt}$$

Attention à ne pas confondre l'amortisseur qui est le cylindre à gaz, ou à huile avec un piston avec le ressort hélicoïdal qui l'entoure.

$$\boxed{\mathrm{V}(t) = \frac{1}{b}.F(t)}$$

ÉQUATION D'ÉLÉMENT PASSIF-RÉACTIF INTÉGRAL :

Elle origine de la loi de Newton :

$$F = m\gamma = \frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d\mathrm{V}}{dt}$$

d'où la relation entre la force et la vitesse :

$$\boxed{\mathrm{V}(t) = \frac{1}{m}\int F(t).dt}$$

ÉQUATION D'ÉLÉMENT PASSIF-RÉACTIF DÉRIVÉ :

Dans un ressort, la force de rappel est proportionnelle à l'élongation :

$$F = ky = k\int \frac{d\mathrm{V}}{dt}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = k\frac{dy}{dt} = k\mathrm{V}$$

d'où la relation entre la force et la vitesse :

$$\boxed{\mathrm{V}(t) = \frac{1}{k}\frac{dF(t)}{dt}}$$

12. LES ÉQUATIONS D'EULER-CAUCHY

Les équations différentielles à coefficients constants permettent de trouver la solution de l'équation sans passer par l'intégration. Lorsque les coefficients sont non-constants, certaines équations sont aussi susceptibles de nous alléger le travail. Par exemple la forme de l'équation d'Euler[1]-Cauchy[2] :

$$\boxed{x^2 y''+axy'+by=0 \qquad a,b \text{ étant des constantes.}}$$

Dès lors, il suffit d'introduire la forme de solution suivante : $y = x^m$. De sorte que :

$$\begin{aligned} y &= x^m \\ y' &= mx^{m-1} \\ y'' &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

et l'équation devient :

$$(x^2)m(m-1)x^{m-2} + (ax)mx^{m-1} + (b)x^m = 0$$

et en mettant x^m en facteur, on se retrouve avec une équation réduite :

$$m(m-1) + ax + b = 0$$

Il s'agit donc de résoudre une équation du second degré ordinaire en m :

$$\boxed{m^2 + (a-1)m + b = 0}$$

Il y a trois cas possibles selon la valeur des constantes a et b.

12.1. cas 1 : $(a-1)^2 > 4b$:

On a alors 2 racines réelles m_1 et m_2 : $\begin{cases} m_1 = \dfrac{1-a+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \\ m_2 = \dfrac{1-a-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \end{cases}$

et la forme de la solution est alors :

$$\boxed{y_g(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = C_1 x^{\frac{1-a+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-a-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}}}$$

---

[1] *Leonhard Euler (1707-1783) est né à Bâle en Suisse. C'est là qu'il fit ses études sous la direction de Johann Bernoulli et obtient en 1927 un poste de professeur de physique à Saint Petersburg en Russie. Il contribua à diverses branches des mathématiques notamment en liaison avec les problèmes physiques dont est issu un traité complet de la mécanique en 1736 et une collection de quelques 70 volumes sur ses travaux .*

[2] *Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) naît à Paris d'une famille de nobles (il était Baron). Il a contribué à des méthodes rigoureuses d'analyse sur les nombres complexes, les séries infinies et les équations différentielles. Durant sa vie il a publié quelques 800 articles.*

12.2. cas 2 : $(a-1)^2 = 4b$:

Dans ce cas on a 1 racine réelle double $m_1 = m_2$. La première forme de solution sera donnée par :

$$y_1 = x^{m_1} = x^{\frac{1-a}{2}}$$

Pour trouver la deuxième forme solution, nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante. Soit donc :

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$$

de sorte que : $\begin{cases} y_2 = u.y_1 \\ y'_2 = u'\,y_1 + uy'_1 \\ y''_2 = u''\,y_1 + 2u'\,y'_1 + uy''_1 \end{cases}$

et en réinjectant ces expressions dans l'équation de départ :

$$x^2(u''\,y_1 + 2u'\,y'_1 + uy''_1) + ax(u'\,y_1 + uy'_1) + b(u.y_1) = 0$$

et en regroupant en fonction de la variable u :

$\boxed{= y_1}$

$$x^2u''(y_1) + xu'\underbrace{(2xy'_1 + ay_1)}_{\neq 0} + u\underbrace{(y''_1 + ay'_1 + by_1)}_{=0} = 0$$

Or le coefficient de u est nul puisque y_1 est une forme solution de l'équation d'Euler-Cauchy. Par contre le coefficient de u' est non nul :

$$2xy'_1 + ay_1 = 2x\frac{(1-a)}{2}x^{\frac{(1-a)}{2}} + ax^{\frac{(1-a)}{2}} = x^{\frac{(1-a)}{2}} = y_1$$

Il s'agit de résoudre en bout de ligne, l'équation suivante où u est l'inconnue :

$$(x^2 y_1)u'' + (xy_1)u' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2u'' + xu' = 0 \\ \text{sur le domaine où } y_1 \text{ est non - nul} \end{cases}$$

La solution pour u est donc :

$$x^2u'' + xu' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u'| = -\ln x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \ln x + c$$

à la condition qu'on soit dans le domaine des $x \geq 0$ (sinon on n'aurait pas de solution dans le domaine des réels). Finalement la deuxième forme de solution est :

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x = x^{\frac{1-a}{2}} \ln x$$

et la solution générale est :

$$\boxed{y_g(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = \left(C_1 + C_2 \ln x\right) x^{\frac{1-a}{2}}}$$

12.3. cas 3 : $(a-1)^2 < 4b$:

Dans ce cas on a 2 racines complexes conjuguées m_1 et m_2 :

Mu

Nu

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{1-a+i\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2} = \mu + i\nu \\ m_2 = \dfrac{1-a-i\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2} = \mu - i\nu \end{cases}$$

et la solution générale s'écrit :

$$\boxed{y_g(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = x^{\frac{1-a}{2}}\left(C_1 x^{+i\frac{\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}} + C_2 x^{-i\frac{\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}}\right) = x^{\mu}\left(C_1 x^{+i\nu} + C_2 x^{-i\nu}\right)}$$

Or les propriétés sur les exposants et les logarithmes sont telles que :

exposant

$$x = \ln(y) \quad \rightleftarrows \quad y = e^{x}$$

Base népérienne(naturelle)

exposant

$$x = \log_{\alpha}(y) \quad \rightleftarrows \quad y = \alpha^{x}$$

Base alpha

On peut donc écrire que : $\begin{cases} x^{+i\nu} = e^{\ln(x^{+i\nu})} = e^{+i\nu\ln(x)} \\ x^{-i\nu} = e^{\ln(x^{-i\nu})} = e^{-i\nu\ln(x)} \end{cases}$

et la solution générale pourra s'écrire sous la forme :

$$y_g(x) = x^{\mu}\left(C_1 x^{+i\nu} + C_2 x^{-i\nu}\right) = x^{\mu}\left(C_1 e^{+i\nu\ln(x)} + C_2 e^{-i\nu\ln(x)}\right)$$

Or on sait combiner les exponentielles complexes pour former les cosinus et les sinus, de sorte que :

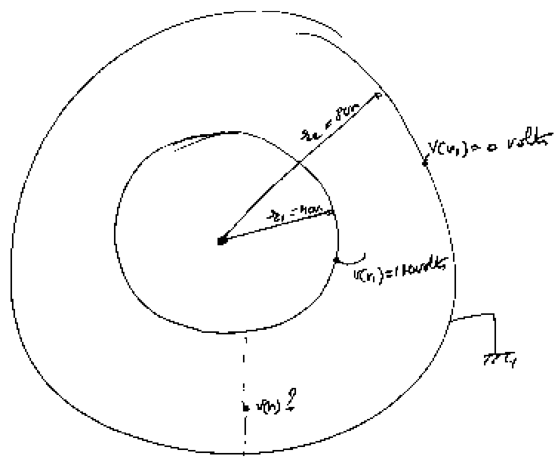
$$y_g(x) = x^{\mu}\left[C_1\left(\cos(\nu\ln x) + i\sin(\nu\ln x)\right) + C_2\left(\cos(\nu\ln x) - i\sin(\nu\ln x)\right)\right]$$

soit :

$$\boxed{y_g(x) = x^{\mu}\left[A\cos(\nu\ln x) + B\sin(\nu\ln x)\right]}$$

APPLICATION : POTENTIEL ENTRE 2 SPHÈRES CONCENTRIQUES

Soit à considérer 2 sphères métalliques concentriques l'une ayant un rayon $r_1 = 4$ cm et l'autre $r_2 = 8$ cm . La sphère intérieure est portée au potentiel de $V(r_1) = 110$ Volts , tandis que la sphère extérieure est reliée au potentiel de la terre ($V(r_2) = 0$ Volts). On veut connaître le potentiel en tout point dans l'espace compris entre ces 2 sphères métalliques.



INDICATIONS:

Vous verrez, dans un cours de **physique électromagnétique**, que le potentiel en tout point de l'espace vide de charges (ce qui est le cas entre les 2 sphères métalliques) doit satisfaire l'équation de **Laplace**, exprimée ici en cordonnées sphériques:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi}\right) = 0$$

Or pour le cas des sphères concentriques, la symétrie fait que le potentiel n'a pas de dépendance angulaire θ ou ϕ . Donc notre équation de Laplace se réduit à:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

SOLUTION :

1) Mise sous la forme de l'équation d'Euler-Cauchy:

Il suffit d'effectuer le développement de la dérivée: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}r^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}2r\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$

Puisqu'il s'agit d'une équation où les coefficients ne sont pas tous des constantes. De plus, ces coefficients respectent la forme d'Euler-Cauchy, ce qui nous permet de le mettre sous forme canonique appropriée pour la résoudre :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)+\frac{2}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad r^2 y''+2ry'+0.y=0$$

2) Trouver les racines de l'équation auxiliaire:

L'équation auxiliaire associée étant :

$$m^2+(a-1)m+b=0 \quad \Rightarrow \quad m^2+(2-1)m+0=0$$

alors les racines sont:

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale:

Puisque les racines sont réelles, nous tombons dans le premier cas, d'où l'expression de la solution générale correspondante :

$$\boxed{y_g(x)=C_1 x^{m_1}+C_2 x^{m_2} \quad \Rightarrow \quad V_g(r)=C_1 r^0+C_2 r^{-1}}$$

4) Fixer les constantes à partir des conditions initiales:

$$\begin{cases} V(r=0.04)=110 \\ V(r=0.08)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(0.04)^0+C_2(0.04)^{-1}=110 \\ C_1(0.08)^0+C_2(0.08)^{-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-110 \\ C_2=8.8 \end{cases}$$

d'où la solution particulière:

$$\boxed{V_p(r)=-110+\frac{8.8}{r} \quad \text{Volts} \quad (\text{avec } r \text{ en mètres})}$$

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations suivantes:

1. $xy''+4y'=0$.

2. $x^2y''+xy'-y=0$.

3. $x^2y''+3xy'+6y=0$.

4. $x^2y''+9xy'+16y=0$.

Trouver la solution particulière pour les équations suivantes avec conditions initiales:

5. $\begin{cases} x^2y''+4xy'+4y=0 \\ y(1)=2 \\ y'(1)=4 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 10x^2y''+46xy'+32{,}4y=0 \\ y(1)=0 \\ y'(1)=2 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x^2y''+xy'+0{,}01y=0 \\ y(1)=2 \\ y'(1)=0{,}1 \end{cases}$.

Ramener les équations à la forme d'Euler-Cauchy et les résoudre :

8. $2(3z+1)^2y''+21(3z+1)y'+18y=0$.

9. $(z-3)^2y''+6(z-3)y'+9y=0$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Trouver l'expression du potentiel entre 2 sphères métalliques concentriques, dont l'un a un rayon de $r_1=0{,}04$ mètre et porté à un potentiel de $V(r_1)=100$ Volts et l'autre a un rayon de $r_2=0{,}08$ mètre et un potentiel de $V(r_2)=10$ Volts.

2. Soit l'équation d'Euler-Cauchy: $x^2y''+axy'+by=0$, où $y=y(x)$. En posant $x=e^t$, transformer cette équation en une équation linéaire à coefficients constants: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\dfrac{dy}{dt}+by=0$, où $y=y(t)$.

13. EXISTENCE, UNICITÉ, INDÉPENDANCE LINÉAIRE ET WRONSKIEN

Soit une équation de la forme :

$$y''+p(x).y'+q(x).y=0$$

Le problème est de savoir dans quelles conditions on peut obtenir au moins une solution, avant même de la calculer, et dans quelles circonstances cette solution est unique.

13.1. Théorème d'existence :

Si $p(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle ouvert $I:\{a<x<b\}$ (on écrit aussi $x\in\,]a,b[$), alors il existe au moins une solution $y(x)$ sur cet intervalle.

DÉMONSTRATION :

La démonstration de ce théorème se trouve dans le livre « Ordinary Differential Equations » de E.L. Ince, Dover, 1956.

13.2. Théorème d'unicité :

Si en plus de $p(x)$ et $q(x)$ continues, on fixe 2 conditions initiales dans cet intervalle ouvert I :

$$x_0\in\,]a,b[\quad \text{tel que}\quad \begin{cases} y(x_0)=k_0 \\ y'(x_0)=k_1 \end{cases}$$

alors la solution est unique sur cet intervalle I.

DÉMONSTRATION :

La démonstration de ce théorème est présentée en annexe à ce chapitre.

13.3. Indépendance des solutions : le Wronskien.

La forme générale de la solution d'une équation du $2^{\text{ème}}$ degré est une combinaison linéaire de 2 formes indépendantes de solution $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

RAPPELS:

☞ On rappelle (voir algèbre linéaire : bases et dimension) que 2 vecteurs ou formes sont linéairement indépendants sur l'intervalle I, si :

$$\lambda_1.\vec{e}_1+\lambda_2.\vec{e}_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=0$$

☞ On rappelle inversement que si 2 éléments sont linéairement dépendants, alors on peut trouver un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que l'on puisse écrire $y_2 = \lambda y_1$ sur l'intervalle I.

Donc si y_2 est dépendant de y_1, alors on peut écrire:

$$\begin{aligned} y_2 &= \lambda y_1 \\ y'_2 &= \lambda y'_1 \end{aligned}$$

Le Wronskien

de sorte que :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \lambda(y_1 y_1' - y_1' y_1) = 0$$

DÉFINITION :

Le Wronskien est le déterminant formé par le vecteur transposé des formes solutions $(y_1, y_2, y_3, ...)$ et de ses dérivées successives $(y'_1, y'_2, y'_3, ...)$, $(y''_1, y''_2, y''_3, ...)$, etc..

THÉORÈME :

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ continues sur un certain intervalle ouvert I, les formes solutions trouvées y_1 et y_2 sont **linéairement indépendantes** si, et seulement si, le Wronskien formé par ces deux formes solutions est **non-nul**.

$$y_2 \neq \lambda y_1 \quad \Leftrightarrow \quad W(y_1, y_2) \neq 0$$

DÉMONSTRATION :

Il s'agit de résoudre l'équation : $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ pour trouver λ_1 et λ_2. Or si on dérive les 2 membres de cette équation, on se retrouve avec : $\lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 = 0$. C'est à dire qu'on a un système de 2 équations, où les inconnues recherchées sont λ_1 et λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 = 0 \end{cases}$$

En utilisant par exemple la méthode de Cramer, on voit que le déterminant principal est le Wronskien :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

Si le Wronskien est non nul, alors il existe un couple unique (λ_1, λ_2) qui satisfait le système d'équations :

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = 0 \qquad et \qquad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = 0$$

On en conclue alors que :

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

c'est à dire que y_2 et y_1 sont linéairement indépendants.

COROLLAIRE 1:

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ continues sur un certain intervalle ouvert I, alors les formes solutions trouvées y_1 et y_2 sont **linéairement dépendantes** si et seulement si le Wronskien formé par ces deux solutions est **nul**.

$$y_2 = \lambda y_1 \quad \Leftrightarrow \quad W(y_1, y_2) = 0$$

DÉMONSTRATION :

Il s'agit toujours de résoudre les système $\begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 = 0 \end{cases}$ pour trouver λ_1 et λ_2 .

Or si le Wronskien est nul, la 2$^{\text{ème}}$ ligne n'est qu'une réplique de la 1$^{\text{ère}}$ ligne. De sorte que le système d'équations se réduit à une seule équation.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \text{une seule équation} \end{cases}$$

Dès lors il est possible de choisir arbitrairement λ_1 (ou λ_2) et d'ajuster λ_2 (ou λ_1) en conséquence pour que :

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1$$

D'où la conclusion que y_1 et y_2 sont linéairement dépendants

COROLLAIRE 2 :

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ continues sur un certain intervalle ouvert I. Si en un seul point x_o de cet intervalle le Wronskien est nul, alors il est identiquement nul sur tout l'intervalle I. Il s'ensuit que les solutions y_2 et y_1 sont linéairement dépendantes (identiques à une constante près) sur cet intervalle.

DÉMONSTRATION :

Soit donc : $\begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ y'_1(x_o) & y'_2(x_o) \end{vmatrix} = 0$

donc au point x_o, on peut écrire : $\begin{cases} y_1(x_o) = \lambda\, y_2(x_o) \\ y'_1(x_o) = \lambda\, y'_2(x_o) \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} \lambda_1\, y_1(x_o) = -\lambda_2\, y_2(x_o) \\ \lambda_1\, y'_1(x_o) = -\lambda_2\, y'_2(x_o) \end{cases}$

en ayant réparti le coefficient scalaire $\lambda \neq 0$ en $\lambda_1 \neq 0$ et $-\lambda_2 \neq 0$. Ainsi au point x_o, on peut écrire :

$$\begin{cases} \lambda_1\, y_1(x_o) + \lambda_2\, y_2(x_o) = 0 \\ \lambda_1\, y'_1(x_o) + \lambda_2\, y'_2(x_o) = 0 \end{cases}$$

En gardant ces mêmes coefficients, on peut constituer une fonction :

$$\begin{cases} y(x) = \lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) \\ y'(x) = \lambda_1\, y'_1(x) + \lambda_2\, y'_2(x) \end{cases}$$

Une telle fonction $y(x)$, d'après le théorème sur la combinaison linéaire des formes solutions pour une équation homogène, est aussi solution de l'équation homogène. Et ses conditions initiales sont :

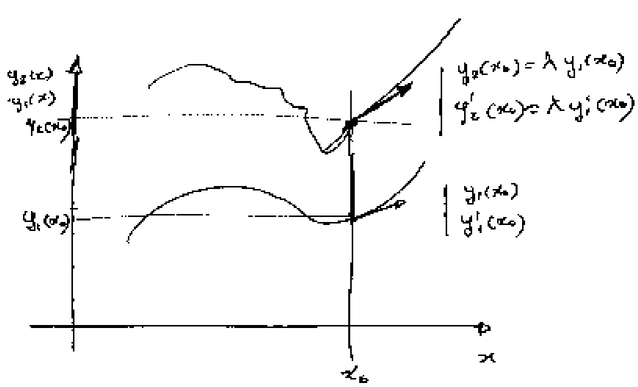
$$\begin{cases} y(x_o) = \lambda_1\, y_1(x_o) + \lambda_2\, y_2(x_o) = 0 \\ y'(x_o) = \lambda_1\, y'_1(x_o) + \lambda_2\, y'_2(x_o) = 0 \end{cases}$$

Mais on voit que la solution triviale $y_t(x) \equiv 0$ avec les mêmes conditions initiales $y_t(x_0) = 0$ et $y'_t(x_0) = 0$, est aussi solution de l'équation homogène. Or on sait, du fait que $p(x)$ et $q(x)$ sont continues, que cette solution est unique. Donc on conclue qu'on doit avoir :

$$y(x) = y_t(x) \equiv 0$$

sur tout l'intervalle I, il en découle alors :

$$y(x) = \lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) \equiv 0 \qquad \forall x \in I$$



donc y_2 et y_1 sont linéairement dépendantes sur l'intervalle entier de I.

13.4. Solution générale pour une équation linéaire du 2ème ordre homogène.

THÉORÈME D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION GÉNÉRALE :

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ continues sur un certain intervalle ouvert I, alors il existe au moins une solution générale y_h sur I.

DÉMONSTRATION :

En partant du théorème d'existence précédent pour $p(x)$ et $q(x)$ continues, et en appliquant les conditions initiales, alors on sait que la solution particulière est unique. Soit donc les 2 formes uniques de solution y_2 et y_1 suivantes (à cause de 2 jeux de conditions initiales différents) :

$$\left.\begin{array}{r} y_1(x_o)=0 \\ y'_1(x_o)=1 \end{array}\right\} \quad \text{première solution unique et :} \quad \left.\begin{array}{r} y_2(x_o)=1 \\ y'_2(x_o)=0 \end{array}\right\} \quad \text{deuxième solution unique .}$$

en prenant le Wronskien au point x_o :

$$W(y_1,y_2)_{x_o} = \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ y'_1(x_o) & y'_2(x_o) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ainsi les solutions y_2 et y_1 sont indépendantes, et forment alors une base de solutions. Donc la solution générale y_h de l'équation homogène existe. Elle s'écrit :

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \forall x \in I$$

THÉORÈME D'UNICITÉ DE LA SOLUTION GÉNÉRALE (UNICITÉ DE LA FORME GÉNÉRALE) :

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ continues sur un certain intervalle ouvert I, alors toute forme solution de l'équation homogène peut être issue que de la solution générale y_h.

On veut entendre par ce théorème que la forme de la solution $y_h(x)$ représente toutes les solutions possibles de l'équation homogène, c'est à dire qu'on ne devrait pas trouver une forme spéciale $Y(x)$ qui ne puisse se ramener finalement à la forme générale $y_h(x)$.

DÉMONSTRATION :

En effet, soit $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad , \forall x \in I$, la forme générale de la solution de l'équation homogène. Soit maintenant une fonction $Y(x)$ qui satisfait aussi à l'équation homogène. Il s'agit de prouver qu'en fin de compte $Y(x)$ doit être écrit comme une combinaison linéaire de y_2 et y_1.

Pour cela on est obligé de faire un crochet par l'unicité de la solution par les condition initiales. On sait déjà que la forme générale $y_h(x)$ mute en solution particulière unique, lorsqu'on fixe les conditions initiales :

$$\begin{cases} y_h(x_o) = K_o \\ y'_h(x_o) = K_1 \end{cases}$$

C'est à dire qu'on va pouvoir fixer les constantes d'intégration c_1 et c_2 (c minuscules : constantes à fixer) qui vont devenir C_1 et C_2 (C majuscules: valeurs numériques explicites), par exemple par la méthode de Cramer. Donc :

$$y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

est unique. Parallèlement, si on pouvait exprimer la fonction solution spéciale $Y(x)$ par une expression en fonction de y_2 et y_1 :

$$Y(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x)$$

Et qui satisfait aussi les conditions initiales :

$$\begin{cases} Y(x_o) = K_0 = C_1 y_1(x_o) + C_2 y_2(x_o) \\ Y'(x_o) = K_1 = C_1 y'_1(x_o) + C_2 y'_2(x_o) \end{cases}$$

En effectuant la même démarche que pour fixer les constantes c_1 et c_2 de la solution spécifique, on arrive à trouver β_1 et β_2 uniques, qui se trouvent être de nouveau C_1 et C_2, donc on en conclue que:

$$Y(x) \equiv y_p(x)$$

Ainsi on a pu exprimer $Y(x)$ à partir de la forme générale.

EXERCICES

Bases de solution et Wronskien : trouver le Wronskien pour les bases ci-dessous et vérifiez le théorème de l'indépendance linéaire ou de la dépendance linéaire sur tout l'intervalle I.

1. $(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x})$.

2. $(1, e^{x})$.

3. $(e^{-\frac{a}{2}x}\cos 3x, e^{-\frac{a}{2}x}\sin 3x)$.

4. (x^{m_1}, x^{m_2}) .

5. $(x^4, x^4 \ln x)$.

6. $(e^{\lambda x}, xe^{\lambda x})$.

7. $(x^{\mu}\cos(2\ln x), x^{\mu}\sin(2\ln x))$.

8. $(e^{-x}\cos \omega x, e^{-x}\sin \omega x)$.

Trouver une équation du second ordre homogène pour laquelle, les bases suivantes sont solution. Déterminer le Wronskien pou vérifier l'indépendance linéaire.

9. (e^{3x}, xe^{3x}) .

10. (x^5, x^{-5}) .

11. $(x^2, x^2 \ln x)$.

12. $(\cosh 2x, \sinh 2x)$.

13. $(x^2, x^{\frac{1}{2}})$.

14. $(1, e^{-2x})$.

15. $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

16. $(\cos(\ln x), \sin(\ln x))$.

17. $(x^{+\frac{3}{2}}, x^{-\frac{3}{2}})$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Comme corollaire, prouver que les solutions d'une base de solutions ne peuvent être nulles en même temps au même point.

2. Comme corollaire, prouver que les solutions de la base ne peuvent atteindre en même temps un maximum (ou un minimum) au même point.

ANNEXE

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE L'UNICITÉ DE LA SOLUTION:

L'objectif ici consiste à démontrer que dans un système avec conditions initiales:

$$\begin{cases} y''+p(x).y'+q(x).y=0 \\ y(x_0)=K_0 \\ y'(x_0)=K_1 \end{cases}$$

Si nous obtenons une solution particulière $y_{p1}(x)$ et une autre solution particulière $y_{p2}(x)$, alors leur différence $y_p(x)=y_{p1}(x)-y_{p2}(x)$ doit être identiquement nulle. Ainsi la solution particulière sera donc unique.

Pour cela nous considérons donc la fonction :

$$y_p(x)=y_{p1}(x)-y_{p2}(x)$$

Cela implique, du fait que $y_{p1}(x)$ et $y_{p1}(x)$ satisfont les même conditions initiales, que nous avons :

$$\begin{cases} y_p(x_0)=0 \\ y'_p(x_0)=0 \end{cases}$$

Considérons de plus la fonction auxiliaire suivante :

$$z(x)=y_p^2(x)+y'^2_p(x)$$

de sorte que nous avons :

$$z'(x)=2y'_p(x)y_p(x)+2y'_p(x)y''_p(x) \quad \text{et} \quad z(x_0)=0\,.$$

Or de l'équation différentielle homogène du second ordre, nous pouvons tirer la relation suivante qui est satisfaite par y_p, puisque $y_{p1}(x)$ et $y_{p2}(x)$ sont des solutions de cette même équation homogène :

$$y''_p=-p.y'_p-q.y_p$$

soit en substituant par la variable z :

$$z'(x)=2y'_p\,y_p-2y'_p\left[-py'_p-qy_p\right]$$

D'autre part, si on assume que y_p et y'_p sont des fonctions dans l'espace des réels, alors:

$$\left(y_p\pm y'_p\right)^2=y_p^2\pm 2y_py'_p+y'^2_p\geq 0$$

Ce qui nous permet d'obtenir 2 inégalités:

$$z = y_p^2 + y'^2_p \geq -2y_p y'_p \quad \text{et} \quad z = y_p^2 + y'^2_p \geq 2y_p y'_p$$

et après une retouche de signe, nous pouvons écrire:

$$-z \leq 2y_p y'_p \quad \text{et} \quad z \geq 2y_p y'_p$$

soit :

$$\left|2y_p y'_p\right| \leq z$$

c'est à dire, en substituant dans $z'(x) = 2y'_p\, y_p - 2y'_p\left[-py'_p - qy_p\right]$, et en sachant entre autres que : $-2qy_p y'_p \leq \left|2qy_p y'_p\right| \leq |q|\left|2y_p y'_p\right| \leq |q|z$ et que : $-p \leq |p|$:

$$z'(x) \leq z + 2|p|y'^2_p + |q|z$$

Mais comme on peut borner y'^2_p :

$$y'^2_p \leq y_p^2 + y'^2_p = z$$

Donc on peut écrire:

$$z'(x) \leq z + 2|p|z + 2|p|z = (1 + 2|p| + |q|)z = hz$$

Cette inégalité est équivalente à écrire les 2 inégalités suivantes :

$$z' - hz \leq 0 \text{ et } z' + hz \geq 0.$$

Si $h(x)$ est continu sur l'intervalle I, $\int h(x)dx$ existe et on peut poser :

$$F_1 = e^{-\int h(x)dx}, \; F_2 = e^{+\int h(x)dx}$$

Comme F_1 et F_2 sont des quantité toujours positives, nous pouvons les multiplier sans changer le signe des inégalités :

$$F_1(z' - hz) = \left(F_1 z\right)' \leq 0 \text{ et } F_2(z' + hz) = \left(F_2 z\right)' \geq 0$$

Ce qui veut dire que $F_1 z$ est monotone décroissante ou nulle sur I tandis que $F_2 z$ est monotone croissante ou nulle sur I. Comme : $z(x_0) = 0$, et si nous considérons les moments $x \leq x_0$ sur I, nous aurons :

$$\left(F_1 z\right)_{x \leq x_0} \geq \left(F_1 z\right)_{x_0} = 0 \text{ et } \left(F_2 z\right)_{x \leq x_0} \leq \left(F_2 z\right)_{x_0} = 0.$$

De même si l'on considère les moments $x \geq x_0$ sur I :

$$\left(F_1 z\right)_{x \geq x_0} \leq \left(F_1 z\right)_{x_0} = 0 \text{ et } \left(F_2 z\right)_{x \geq x_0} \geq \left(F_2 z\right)_{x_0} = 0$$

En divisant respectivement par F_1 et F_2 qui sont des quantité toujours positives, nous trouvons que :

$$z \leq 0 \text{ et } z \geq 0$$

Pour tout $x \in I$. Ce qui implique que nous devons avoir :

$$z(x) = y_p^2(x) + y'^2_p(x) \equiv 0 \quad , \forall x \in I \ .$$

Comme nous sommes dans l'espace des réels, nous ne pouvons avoir de carré de $y_p(x)$ ou $y'_p(x)$ qui soit négatif pour compenser l'autre, de sorte que la seule solution possible est que :

$$y_p(x) \equiv 0 \text{ et } y'_p(x) \equiv 0 \ .$$

Ce qui veut dire qu'en fin de compte :

$$\boxed{y_{p1}(x) \equiv y_{p2}(x)}$$

14. ÉQUATIONS NON-HOMOGÈNES: PROCÉDURE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LES SOLUTIONS

Lorsque le second membre d'une équation est non nulle, nous sommes en présence d'une équation dite non-homogène :

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad \rightarrow \qquad y_s, y_g}$$

Le terme non-homogène indique que $r(x)$ est la fonction qui va induire la perturbation (ou forcer le situation) au système représenté par cette équation différentielle.

Avant même de parler d'une quelconque méthode pour trouver les solutions à cette équation, nous devons tirer des propriétés générales à partir de ce que nous connaissons déjà avec les équations homogènes.

Supposons que nous obtenons la solution générale $y_h(x)$ pour l'équation homogène associée :

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_h}$$

Dès lors nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME :

La somme d'une solution de l'équation non-homogène (aussi appelée équation générale) et d'une solution de l'équation homogène associé est une solution de l'équation non-homogène (aussi appelée équation générale).

DÉMONSTRATION :

Soit $y_h(x)$ la solution de l'équation homogène associée : $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, et soit $y_s(x)$ la solution de l'équation non-homogène originelle : $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$.

C'est à dire que nous avons :

$$y_h''+p(x)y_h'+q(x)y_h=0 \text{ , et } y''_s+p(x)y'_s+q(x)y_s=r(x) \text{ .}$$

dès lors :

$$\left(y_h''+p(x)y_h'+q(x)y_h\right)+\left(y''_s+p(x)y'_s+q(x)y_s\right)=0+r(x) \text{ .}$$

C'est à dire , en regroupant les termes :

$$\left(y_h''+y''_s\right)+p(x)\left(y_h'+y'_s\right)+q(x)\left(y_h+y_s\right)=0+r(x) \text{ .}$$

Donc si on pose la somme suivante : $y_g=y_h+y_s$, nous avons bien :

$$\begin{cases} y_g = y_h + y_s \\ y'_g = y'_h + y'_s \\ y''_g = y''_h + ''y_s \end{cases}$$

et effectivement nous obtenons :

$$y''_g + p(x)y'_g + q(x)y_g = r(x)$$

Donc que cette combinaison y_g est bien solution de l'équation non-homogène originelle.

COROLLAIRE 1:

La différence entre deux solutions de l'équation non-homogène est une solution de l'équation homogène associée.

DÉMONSTRATION :

À faire en exercice par l'étudiant.

DÉFINITIONS :

La **solution générale** d'une équation non-homogène, notée y_g est la somme de la solution de l'équation homogène associée, notée y_h et de toute solution singulière y_s qui satisfait l'équation avec second membre :

$$y_g = y_h + y_s .$$

La **solution particulière** est la solution y_p obtenue à partir de la solution générale y_g en introduisant les conditions initiales pour fixer les constantes auparavant arbitraires dans y_g .

La **solution singulière** y_s est une solution de l'équation générale (avec second-membre) qui ne peut être déduite de y_h .

THÉORÈME :

Si $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont toutes des fonctions continues sur l'intervalle I, alors toute solution particulière y_p est obtenue en assignant les valeurs appropriées aux constantes arbitraires qui sont dans la solution générale de l'équation avec second membre.

DÉMONSTRATION :

Soit donc $\tilde{y}(x)$ une solution de l'équation avec second membre $y''+p(x)y'+q(x)y = r(x)$, et soit $y_g(x)$ la solution générale de cette même équation avec second membre (cette solution générale existe sur I du fait de la continuïté des fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$).

Or le corollaire_1 prouve que la différence $Y(x) = \tilde{y}(x) - y_s(x)$ est une solution de l'équation homogène.

Cette solution $Y(x)$ est obtenue en assignant les conditions initiales à y_h de l'équation homogène.

Donc il s'ensuit que :

$\tilde{y}(x) = Y(x) + y_s(x)$

Donc les constantes c_1 et c_2 qui sont fixées dans la solution générale homogène donne la solution particulière.

ATTENTION!

Ce théorème n'indique pas qu'il faut fixer les constantes en introduisant les conditions initiales dans la solution y_h de l'équation homogène associée. Les constantes sont déterminées en introduisant les conditions initiales dans la solution générale y_g de l'équation avec second membre.

EXEMPLE

Les méthodes pour trouver les solutions singulières $y_s(x)$ se trouvent dans les chapitres suivants. Pour l'instant nous supposons que nous connaissons ces solutions singulières et nous allons appliquer la méthode générale pour arriver à la solution particulière.

Trouver la solution particulière pour le problème avec conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} y''+2y'+101y = 10.4e^x \\ y(0)=1.1 \\ y'(0)=-0.9 \end{cases}$$

SOLUTION :

1) Trouver la solution homogène :

$$y''+2y'+101y = 0 \qquad \text{(équation homogène associée)}$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 101 = 0 \qquad \text{(équation caractéristique associée)}$$

les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-2+\sqrt{(2)^2-4\times 101}}{2} = -1+10i \\ \lambda_2 = \dfrac{-2-\sqrt{(2)^2-4\times 101}}{2} = -1-10i \end{cases} \qquad \text{(2 racines complexes conjuguées)}$$

Donc la solution homogène est :

$$y_h(x) = e^{-x}\left(A\cos 10x + B\sin 10x\right)$$

2) Trouver la solution singulière $y_s(x)$ de l'équation non-homogène:

identifier la forme de $r(x)$:

$$r(x) = k.e^x \quad \rightarrow \quad y_s(x) = Ke^x$$

Vérifier si une telle forme n'existe pas déjà dans la solution homogène $y_h(x)$:

Ce n'est pas le cas.

Déterminer les coefficients :

les dérivées successives :

$$\begin{cases} y_s(x) = Ke^x \\ y_s'(x) = Ke^x \\ y_s''(x) = Ke^x \end{cases}$$

réintroduire dans l'équation :

$$(Ke^x) + 2(Ke^x) + 101(Ke^x) = 10.4e^x$$

déduction des coefficients :

$$104(Ke^x) = 10.4e^x \quad \rightarrow \quad k = 0.1$$

l'expression de $y_s(x)$:

$$y_s(x) = 0.1e^x$$

3) Exprimer la solution générale :

La solution générale est simplement la somme des 2 solutions :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = e^{-x}\left(A\cos 10x + B\sin 10x\right) + 0.1e^x$$

4) Trouver la solution particulière $y_p(x)$:

Introduction des conditions initiales pour fixer les coefficients :

$$\begin{cases} y_g(0)=1.1 \\ y'_g(0)=-0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-(0)}\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) + 0.1e^{(0)} = 1.1 \\ e^{-(0)}\left(-10A\sin(0) + 10B\cos(0)\right) - e^{-(0)}\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) + 0.1e = -0.9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

d'où la solution particulière :

$$\boxed{y_p(x) = e^{-x}\cos 10x + 0.1e^x}$$

EXERCICES

Vérifier que les $y_s(x)$ suivants sont bien des solutions singulières et trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes :

1. $y'' - y = 8e^{-3x}, \quad y_p = e^{-3x}$

2. $y'' - y = 8e^{-3x}, \quad y_p = e^{-3x} - 3e^{3x}$

3. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2, \quad y_p = 2x^2 - 6x + 7$

4. $y'' - 2y' + 5y = 5x^3 - 6x^2 + 6x, \quad y_p = x^3$

5. $(D^2 + 3D - 4)y = 8\cos 2x + 6\sin 2x, \qquad y_p = -\cos 2x$

6. $(D^2 - 4D + 4)y = x^2 \cos x, \qquad y_p = -\dfrac{1}{2}e^x \sin x$

7. $(D^2 + 1)y = -x^{-2} + \ln \pi x, \qquad y_p = \ln \pi x$

8. $(8D^2 - 6D + 1)y = 6\cosh x, \qquad y_p = \dfrac{1}{5}e^{-x} + e^x$

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales, connaissant la solution singulière :

9. $\begin{cases} y'' + y = 2e^{2x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 8 \\ y_p = 2x \end{cases}$.

10. $\begin{cases} y'' - y = 2\cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -0.2 \\ y_p = -\cos x \end{cases}$.

11. $\begin{cases} y'' - y = 2e^x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \\ y_p = xe^x \end{cases}$.

12. $\begin{cases} (D^2 + 4)y = -12\sin 2x \\ y(0) = 1.8 \\ y'(0) = 5.0 \\ y_p = 3x\cos 2x \end{cases}$.

13. $\begin{cases} (x^2D^2 - 3xD + 3)y = -3\ln x - 4 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y_p = \ln x \end{cases}$

15. ÉQUATIONS NON-HOMOGÈNES: MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

Afin de trouver une solution particulière à l'équation non-homogène à coefficients constants:

$$y''+a.y'+b.y=r(x) \qquad \rightarrow \qquad y_s$$

Il existe une méthode générale et une méthode plus pratique, plus directe, qui s'applique aux équations de second et premier degré linéaires. C'est la méthode des coefficients indéterminés, grâce à la table ci-dessous :

si $r(x)$ est de la forme	utiliser la forme suivante pour $y_s(x)$
Exponentielle : $ke^{\gamma.x}$	Exponentielle : $Ke^{\gamma.x}$
Polynômiale : kx^n	Polynômiale du même ordre : $K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \ldots + K_1 x^1 + K_0 x^0$
Polynômiale modulée: $ke^{\gamma x}x^n$	Polynômiale du même ordre modulée: $e^{\gamma x}.\left(K_n.x^n + K_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + K_1.x^1 + K_0.x^0\right)$
Sinusoïdale : $k\cos\omega x$ $k\sin\omega x$	Sinusoïdale : $K_c\cos\omega x + K_s\sin\omega x$
Ondulation modulée : $ke^{\gamma x}\cos\omega x$ $ke^{\gamma x}\sin\omega x$	Ondulation modulée : $e^{\gamma x}(K_c\cos\omega x + K_s\sin\omega x)$

15.1. Fonctionnement de la méthode des coefficients indéterminés :

PROCÉDURE : TROUVER LA SOLUTION SINGULIÈRE PAR LES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

1) Si la forme du second membre $r(x)$ est dans la table, utiliser la forme $y_s(x)$ correspondant.

2) Si la forme $y_s(x)$ était déjà aussi une forme solution de l'équation homogène associée, modifier $y_s(x)$ en la multipliant par x (par x^2 si c'était déjà une solution double de l'équation homogène, par x^3 si c'était déjà une solution triple de l'équation homogène, par x^4 ...).

3) Si la forme de $r(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions de la table, prendre pour forme de $y_s(x)$ une combinaison linéaire des éléments correspondants.

REMARQUE IMPORTANTE:

En général si une exponentielle simple de type $e^{\gamma x}$ multiplie, soit un polynôme d'ordre limité, soit une fonction sinusoïdale, il est encore possible d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés. Le terme exponentiel ne laissera alors sa trace que par le coefficient supplémentaire γ. Autrement, le nombre de coefficients à déterminer serait trop grand ou même infini, ce qui détruit l'intérêt pour la méthode, car on tombe alors dans la détermination d'un trop grand nombre de coefficients d'une série.

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation non-homogène suivante: $y''+4y=8x^2$

SOLUTION :

1) Trouver la solution homogène :

$$y_h(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$$

2) Identifier la forme de $r(x)$ et déduire la forme de la solution singulière $y_s(x)$:

$$r(x)=k.x^2 \qquad \to \qquad y_s(x)=K_2x^2+K_1x^1+K_0x^0$$

3) Vérifier qu'une telle forme n'existe pas déjà dans la solution homogène :

Ce n'est pas le cas.

4) Déterminer les coefficients :

les dérivées successives :

$$\begin{aligned} y_s(x)&=K_2x^2+K_1x+K_0\\ y_s'(x)&=2K_2x+K_1\\ y_s''(x)&=2K_2 \end{aligned}$$

réintroduire dans l'équation :

$$(2K_2)+0+4.(K_2x^2+K_1x+K_0)=8x^2$$

mise en facteurs de puissance :

$$(4K_2).x^2+(4.K_1).x+(2K_2+4K_0)=8x^2$$

déduction des coefficients :

$$\begin{cases} 4K_2=8\\ 4K_1=0\\ 4K_0+2K_2=0 \end{cases} \to \begin{cases} K_2=2\\ K_1=0\\ K_0=-1 \end{cases}$$

l'expression de $y_s(x)$:

$$y_s(x) = 2x^2 - 1$$

5) Exprimer la solution générale :

La solution générale est simplement la somme des 2 solutions :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation non-homogène suivante: $y'' - 3y' + 2y = e^x$

SOLUTION :

1) Trouver la solution de l'équation homogène :

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 0 \qquad \text{(équation homogène associée)} \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \qquad \text{(équation caractéristique associée)} \end{aligned}$$

les racines de l'équation caractéristique sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3 + \sqrt{(3)^2 - 4\times 2}}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \dfrac{3 - \sqrt{(3)^2 - 4\times 2}}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{(2 racines réelles)}$$

Donc la solution homogène est :

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^x$$

2) Rechercher la solution particulière :

identifier la forme de $r(x)$:

$$r(x) = k.e^x \quad \to \quad y_s(x) = Ke^x$$

3) Vérifier si une telle forme n'existe pas déjà dans la solution homogène :

Elle y est déjà . C'était une racine simple. Donc nous devons modifier la forme en le multipliant par x.

$$\begin{cases} y_s(x) = Kxe^x \\ y_s'(x) = Ke^x + Kxe^x \\ y_s''(x) = Ke^x + (Ke^x + Kxe^x) \end{cases}$$

4) Identification des coefficients :

réintroduire dans l'équation non-homogène :

$$(2Ke^x + Kxe^x) - 3(Ke^x + Kxe^x) + 2(Kxe^x) = e^x$$

mise en facteurs de puissance :

$$(2K - 3K)e^x + (K - 3K + 2K)xe^x = e^x$$

et déduction des coefficients :

$$K = -1$$

l'expression de $ys(x)$:

$$y_s(x) = -xe^x$$

5) Exprimer la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = Ae^{2x} + Be^x - xe^x$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation non-homogène avec conditions initiales suivantes : $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Recherche de la solution homogène :

On peut remarquer en utilisant l'opérateur dérivée qui est un opérateur linéaire :

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^2 y = 0}_{\text{équation avec opérateur dérivée}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(\lambda - 1)^2 = 0}_{\text{équation caractéristique associée}}$$

Remarquez comment on passe de l'opérateur dérivée à l'inconnue λ par substitution dans l'équation caractéristique.

On trouve une racine double :

$$\{\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \text{(1 racine réelle double)}$$

la forme de la solution homogène est donc :

$$y_h(x) = (A + Bx).e^{1.x}$$

2) Recherche de la solution particulière :

2-1) Identifier la forme de $r(x)$:

$$r(x) = e^x + x \qquad \rightarrow \qquad y_s(x) = Ke^x + M_1 x + M_0$$

2-2) Vérifier si une telle forme n'existe pas déjà dans la solution homogène :

Une telle forme existe déjà et même comme racine double, nous devons alors utiliser la forme suivante :

$$y_s(x) = Kx^2 e^x + M_1 x + M_0$$

2-3) Dérivées successives :

$$\begin{cases} y_s(x) = Kx^2 e^x + M_1 x + M_0 \\ y_s\,'(x) = 2Kxe^x + Kx^2 e^x + M_1 \\ y_s\,''(x) = 2Ke^x + 4Kxe^x + Kx^2 e^x \end{cases}$$

2-4) Réintroduire dans l'équation non-homogène et mise en facteurs de puissance :

$$(2Ke^x + 4Kxe^x + Kx^2 e^x) - 2.(2Kxe^x + Kx^2 e^x + M_1) + (Kx^2 e^x + M_1 x + M_0) = e^x + x$$

soit encore:

$$(2K + 4Kx + Kx^2 - 4Kx - 2Kx^2 + Kx^2).e^x + (M_1).x + (-2M_1 x + M_0) = e^x + x$$

2-5) Déduction des coefficients :

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2} \\ M_1 = 1 \\ M_0 = 2 \end{cases}$$

2-6) Expression de la solution singulière:

$$y_s(x) = \frac{x^2}{2} e^x + x + 2$$

3) Expression de la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right).e^x + x + 2$$

4) Détermination de la solution particulière :

4-1) Introduction des conditions initiales pour fixer les coefficients:

$$\begin{cases} y_g(0)=1 \\ y'_g(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(A+B.(0)+\frac{(0)^2}{2}\right).e^{(0)}+(0)+2=1 \\ \left(B+(0)\right).e^{(0)}+1+e^{(0)}.\left(A+B.(0)+\frac{(0)^2}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=0 \end{cases}$$

4-2) Expression de solution particulière :

$$y_p(x)=\left(\frac{x^2}{2}-1\right).e^x+x+2$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation non-homogène suivante : $y''+2y'+5y=16e^x+\sin x$

SOLUTION :

1) Forme de la solution homogène :

$$y''+2y'+5y=0 \qquad \text{(équation homogène associée)}$$
$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \qquad \text{(équation caractéristique associée)}$$

les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-2+\sqrt{(2)^2-4\times 5}}{2}=-1+2j \\ \lambda_2=\dfrac{-2-\sqrt{(2)^2-4\times 5}}{2}=-1-2j \end{cases} \qquad \text{(2 racines complexes conjuguées)}$$

la solution homogène est alors :

$$y_h(x)=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

2) Forme de la solution particulière :

2-1) Identifier la forme de $r(x)$:

$$r(x)=16e^x+\sin 2x \qquad \to \qquad y_s(x)=Ke^x+M_c\cos 2x+M_s\sin 2x$$

2-2) Vérifier si un des éléments de $y_s(x)$ n'existait pas déjà dans la solution homogène :

C'est non! Car bien que la forme $\sin 2x$ existait dans la solution homogène, elle était multipliée par un facteur e^{-x}, ce qui la rendait différente!

2-3) Dérivées successives :

$$\begin{cases} y_s(x) = Ke^x + M_c \cos 2x + M_s \sin 2x \\ y_s'(x) = Ke^x - 2M_c \sin 2x + 2M_s \cos 2x \\ y_s''(x) = Ke^x - 4M_c \cos 2x - 4M_s \sin 2x \end{cases}$$

2-4) Réintroduction dans l'équation non-homogène et mise en facteurs de puissance:

$$(K + 2K' + 5K).e^x + (-4M_c + 4M_s + 5M_c).\cos 2x + (-4M_s - 4M_c + 5M_s).\sin 2x = 16e^x + \sin x$$

2-5) Identification des termes :

$$\begin{cases} K = 2 \\ M_c + 4M_s = 0 \\ -4M_c + M_s = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K = 2 \\ M_c = -\dfrac{4}{17} \\ M_s = +\dfrac{1}{17} \end{cases}$$

2-6) Expression de la solution singulière:

$$y_s(x) = 2e^x - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

3) Expression de la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + 2e^x - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

EXERCICE GUIDÉ I:

Résoudre l'équation **non-homogène** suivante : $y''+2y=3x^2$

GUIDE DE SOLUTION I:

1) Rechercher d'abord la solution homogène :

(équation homogène associée): $y''+(\qquad)y'+(\qquad)y=0$

(équation caractéristique associée): $\lambda^2+(\qquad)\lambda^1+(\qquad)\lambda^0=0$

1-1) Trouver les racines caractéristiques :

$$\begin{cases}\lambda_1 = \\ \\ \lambda_2 = \end{cases}.$$

Il s'agit du cas $\begin{cases}\text{Cas 1: 2 racines réelles} \\ \text{Cas2 : 1 racine double} \\ \text{Cas 3: 2 racines complexes conjuguées.} \\ \text{Cas 4: 2 racines imaginaires pures.}\end{cases}$. (encercler le bon cas!)

1-2) Écrire la solution homogène correspondante (l'écrire avec les vrais valeurs données dans votre problème):

$y_h(x) =$

2) Recherche de la forme singulière de solution :

2-1) Identifier la forme de $r(x)$ et prendre le $y_s(x)$ correspondant:

puisque $r(x) =$
alors $y_s(x) =$

2-2) Vérifier si la forme $y_s(x)$ n'existait pas déjà dans la solution homogène :

Oui, comme racine double, alors multiplions par x^2 : $y_s(x) = x^2.(\qquad\qquad)$

Oui, comme racine simple, alors multiplions par x^1 : $y_s(x) = x^1.(\qquad\qquad)$

Non, alors on laisse tel quel (multiplions par x^0) : $y_s(x) = x^0.(\qquad\qquad)$

2-3) Exprimer les dérivées successives de $y_s(x)$:

$$\begin{cases} y_s(x) = \\ y_s'(x) = \\ y_s''(x) = \end{cases}$$

2-4) Réintroduire dans l'équation avec second membre :

$$(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad).(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad).(\qquad\qquad)=$$

2-5) Mise en facteurs de puissance:

$$(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad).(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad).(\qquad\qquad)=$$

2-6) Identification des coefficients :

$$\begin{cases} (\qquad\qquad) = \\ (\qquad\qquad) = \\ (\qquad\qquad) = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad = \\ \quad = \\ \quad = \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

2-7) Expression de la solution singulière:

$y_s(x) =$

3) Exprimer la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) =$$

Si votre réponse est bien :

$$y_g(x) = A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

Alors tout est OK! Sinon ou c'est vous ou c'est le texte qui est incorrect! Discutons pour trouver où nous avons fait erreur dans notre démarche!

EXERCICE GUIDÉ II:

Résoudre l'équation **non-homogène** avec **conditions initiales** suivante : $\begin{cases} y''+2y'+5y=e^{-x}\cos 2x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

GUIDE DE SOLUTION II:

1) Rechercher d'abord la solution homogène :

(équation homogène associée): $y''+(\qquad)y'+(\qquad)y=0$
(équation caractéristique associée): $\lambda^2+(\qquad)\lambda^1+(\qquad)\lambda^0=0$

1-1) Trouver les racines caractéristiques :

$\begin{cases} \lambda_1 = \\ \\ \lambda_2 = \end{cases}$.

Il s'agit du cas $\begin{cases} \text{Cas 1: 2 racines réelles} \\ \text{Cas2 : 1 racine double} \\ \text{Cas 3: 2 racines complexes conjuguées.} \\ \text{Cas 4: 2 racines imaginaires pures.} \end{cases}$. (encercler le bon cas!)

1-2) Écrire la solution homogène correspondante :

$y_h(x)=$

2) Recherche de la forme singulière de solution :

2-1) Identifier la forme de $r(x)$ et prendre le $y_s(x)$ correspondant:

puisque $r(x)=$
alors $y_s(x)=$

2-2) Vérifier si la forme $y_s(x)$ n'existait pas déjà dans la solution homogène :

Oui, comme racine double, alors multiplions par x^2 : $y_s(x) = x^2.(\qquad\qquad)$

Oui, comme racine simple, alors multiplions par x^1 : $y_s(x) = x^1.(\qquad\qquad)$

Non, alors on laisse tel quel (multiplions par x^0) : $y_s(x) = x^0.(\qquad\qquad)$

2-3) Exprimer les dérivées successives de $y_s(x)$:

$$\begin{cases} y_s(x) = \\ y_s'(x) = \\ y_s''(x) = \end{cases}$$

2-4) Réintroduire dans l'équation avec second membre :

$$\begin{aligned} &(\qquad\qquad\qquad\qquad) \\ +&(\qquad\qquad).(\qquad\qquad) \\ +&(\qquad\qquad).(\qquad\qquad) = \end{aligned}$$

2-4) Mise en facteurs de puissance :

$$\begin{aligned} &(\qquad\qquad\qquad\qquad) \\ +&(\qquad\qquad).(\qquad\qquad) \\ +&(\qquad\qquad).(\qquad\qquad) = \end{aligned}$$

2-5) Identification des coefficients :

$$\begin{cases} (\qquad\qquad) = \\ (\qquad\qquad) = \\ (\qquad\qquad) = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \\ \qquad = \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3) Exprimer la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) =$$

4) Trouver la solution particulière :

4-1) Introduire les conditions initiales dans la solution générale et résoudre les coefficients :

$$\begin{cases} y_g(0) = \\ y'_g(0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \\ C_2 = \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$

4-2) Exprimer la solution particulière :

$$y_p(x) =$$

Comparez ensuite avec le résultat suivant :

$$y_p(x) = e^{-x}\cos 2x + (\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x)e^{-x}\sin 2x$$

Si c'est identique, alors tout est OK! Sinon ou c'est vous ou il y a erreur dans ce texte! Regardons si nous ne pouvons pas ramener votre solution à forme souhaitée ci-dessus!

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes avec la méthode des coefficients indéterminés :

1. $y''+4y=3x^3$

2. $y''-4y=e^{3x}$

3. $y''+6y'+9y=18\cos 3x$

4. $y''+6y'+9y=9\cosh 3x$

5. $y''-y'-2y=e^x+x$

6. $y''-2y'-2y=e^x\sin x$

7. $y''+2y'+5y=5x^2+x$

8. $(D^2+D-1)y=\cos 2x$

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales, à partir de la méthode d'identification des coefficients :

9. $\begin{cases} (D^2-D-2)y=3e^{2x} \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} (D^2-D-2)y=10\sin x \\ y(\frac{\pi}{2})=-3 \\ y'(\pi)=-3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y''+y'-2y=-6\sin 2x-18\cos 2x \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

16. ÉQUATIONS NON-HOMOGÈNES : MÉTHODE DE LA VARIATION DES PARAMÈTRES

Cette méthode est plus générale que la méthode des coefficients indéterminés afin de trouver la solution singulière de l'équation non-homogène. La méthode des coefficients indéterminés était valide seulement lorsqu'on avait affaire à des équations linéaires à coefficients constants. Cette méthode s'appliquera aussi lorsque les coefficients seront **non-constants**.

L'idée consiste à partir des solutions de l'équation homogène $y_1(x)$ et $y_2(x)$ pour trouver $y_s(x)$ en appliquant la relation suivante :

$$y_s(x) = -y_1 \cdot \int \frac{y_2 . r(x).dx}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + y_2 \cdot \int \frac{y_1 . r(x).dx}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

EXEMPLE :

soit à résoudre : $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

SOLUTION :

1) Déterminer d'abord les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ (i.e. trouver la solution homogène $y_h(x)$):

$$\left.\begin{matrix} y''+y=0 \\ \lambda^2+1=0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = +i \\ \lambda_2 = -i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'_1 = -\sin x \\ y'_2 = \cos x \end{cases}$$

dès lors le Wronskien est :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

2) Appliquer la méthode pour trouver la solution singulière :

$$y_s(x) = -\cos x . \int \frac{\sin x . \frac{1}{\cos x} .dx}{1} + \sin x . \int \frac{\cos x . \frac{1}{\cos x} .dx}{1}$$

$$y_s(x) = \cos x . \ln|\cos x| + x . \sin x$$

3) Solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = \left(A + \ln|\cos x|\right) . \cos x + (B + x) . \sin x$$

16.1. Comment est-on parvenu à cette méthode ?

Ce serait Louis Lagrange[1] qui en ait eu l'idée. En effet, si la solution générale est :

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Alors en remplaçant les coefficients par des fonctions (méthode de la variation des paramètres), on obtient :

$$\begin{aligned} y_s(x) &= u(x).y_1(x) + v(x).y_2(x) \\ y'_s &= u'.y_1 + u.y'_1 + v'.y_2 + v.y'_2 \end{aligned}$$

Si on continuait de dériver ainsi pour obtenir y''_s, ce serait lourd. Or on doit remarquer que l'équation générale (non-homogène) n'impose qu'une seule condition sur le lien entre $u(x)$ et $v(x)$. Alors que pour fixer $u(x)$ et $v(x)$, il faut une seconde condition (système de 2 équations à 2 inconnues u et v). Dans le but de simplifier la recherche, on peut imposer que cette condition supplémentaire soit :

$$u'.y_1 + v'.y_2 = 0$$

Il s'ensuit que l'expression de la dérivée seconde est alors plus simple.

$$\begin{aligned} y_s &= u.y_1 + v.y_2 \\ y_s' &= u.y_1' + 0 + v.y_2' \\ y_s'' &= u'.y_1' + u.y_1'' + v'.y_2' + v.y_2'' \end{aligned}$$

Et en réinjectant dans l'équation générale :

$$(u'.y_1' + u.y_1'' + v'.y_2' + v.y_2'') + p(x).(u.y_1' + v.y_2') + q(x).(u.y_1 + v.y_2) = r(x)$$

soit :

$$u.\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x).y_1)}_{=0} + v.\underbrace{(y_2'' + p(x).y_2' + q(x).y_2)}_{=0} + u'y_1' + v'.y_2' = r(x)$$

Nous avons donc un système de 2 équations à 2 inconnues u et v à résoudre :

$$\begin{cases} u'y_1' + v'.y_2' = r(x) \\ u'y_1 + v'.y_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

et si les solutions y_1 et y_2 sont indépendantes , le Wronskien est non nul. Il est donc possible de fixer un couple unique de fonctions u et v :

[1] *Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) était né à Turin en Italie, d'une famille d'immigrants français. Il obtint son premier poste d'enseignant à l'académie militaire de Turin à l'âge de 19 ans. Il migra ensuite à l'Académie de Berlin pour occuper le poste de directeur de la section des mathématiques à l'âge de 40 ans, et finit son périple à Paris en 1787. Il nous a laissé une œuvre scientifique considérable: méthode des isopérimètres, calcul des variations, analyse basée sur l'emploi des développements en série de Taylor, théorie des approximations. Il intervint également dans la thérie des nombres, en algèbre, en mécanique des objets célestes. Il présida en 1790 à la commission chargée d'instaurer un système des poids et mesures demandée par l'Assemblée Constituante.*

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2.r(x)}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} \quad \rightarrow \quad u = -\int \frac{y_2.r(x).dx}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{+y_1.r(x)}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} \quad \rightarrow \quad v = +\int \frac{y_1.r(x).dx}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

d'où la forme proposée de la solution :

$$y_p(x) = -y_1 . \int \frac{y_2.r(x).dx}{W} + y_2 . \int \frac{y_1.r(x).dx}{W}$$

REMARQUE IMPORTANTE :

La forme de la solution pour $y_s(x)$ décrite n'est valable qu'à la condition qu'on utilise toujours la forme canonique pour décrire $r(x)$. Si la forme de l'équation générale n'est pas la forme canonique avec $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$, il faut refaire toutes les démonstrations. Je laisse cet exercice à ceux d'entre-vous qui se destinent à être des grands mathématiciens.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation d'Euler-Cauchy non-homogène suivante : $x^2 y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x^4}$

SOLUTION

1) Chercher la solution homogène:

Comme il s'agit d'une équation type d'Euler-Cauchy, c'est à dire à coefficients non-constants d'une forme singulière, posons l'équation auxiliaire associée:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + (-4-1)m + 6 = 0$$

Les racines de cette équation auxiliaire sont :

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-(-4-1) + \sqrt{(-4-1)^2 - 4 \times 6 \times 1}}{2} = 3 \\ m_2 = \dfrac{-(-4-1) - \sqrt{(-4-1)^2 - 4 \times 6 \times 1}}{2} = 2 \end{cases}$$

d'où la solution homogène (ici on est dans le cas de 2 racines réelles):

$$y_h(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} = C_1 x^3 + C_2 x^2$$

2) Recherche de la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

Puisqu'ici nous avons les 2 formes solutions $y_1(x) = x^3$ et $y_2(x) = x^2$, nous allons d'abord former le Wronskien :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix} = -x^4$$

Puis la solution singulière. Pour cette dernière il est important de savoir que l'expression développée dans la méthode correspond à la forme standard de l'équation. Puisqu'ici nous avons la forme d'Euler-Cauchy, soit nous la transformons pour la ramener à la forme standard :

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = \frac{r(x)}{x^2}$$

soit nous développons l'expression particulière à la forme d'Euler-Cauchy. Quoiqu'il en soit la forme de la solution singulière sera :

$$y_s(x) = -y_1 . \int \frac{y_2 . r(x) . dx}{x^2 . W} + y_2 . \int \frac{y_1 . r(x) . dx}{x^2 . W}$$

Il y a donc un facteur supplémentaire x^2 au dénominateur. C'est à dire dans notre cas :

$$y_s(x) = -x^3 \int \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^4}\right) dx}{x^2 \left(-x^4\right)} + x^2 \int \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^4}\right) dx}{x^2 \left(-x^4\right)} = x^3 \int \frac{dx}{\left(x^8\right)} - x^2 \int \frac{dx}{\left(x^7\right)} = -x^3 \frac{x^{-7}}{7} + x^2 \frac{x^{-6}}{6}$$

3) D'où la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{x^{-4}}{42}$$

EXERCICE GUIDE: ÉQUATION NON-HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Résoudre l'équation **non-homogène** avec **conditions initiales** suivant : $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

SOLUTION GUIDE:

1) Rechercher toujours et d'abord la solution homogène :

(équation homogène associée):	$y'' + (\qquad) y' + (\qquad) y = 0$
(équation caractéristique associée):	$\lambda^2 + (\qquad) \lambda^1 + (\qquad) \lambda^0 = 0$

1-1) Trouver les racines caractéristiques :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \\ \\ \lambda_2 = \end{cases}.$$

Il s'agit du cas $\begin{cases} \text{Cas 1: 2 racines réelles} \\ \text{Cas2 : 1 racine double} \\ \text{Cas 3: 2 racines complexes conjuguées.} \\ \text{Cas 4: 2 racines imaginaires pures.} \end{cases}$. (encercler le bon cas!)

1-2) Écrire la solution homogène correspondante :

$$y_h(x) =$$

2) Recherche de la forme singulière de solution (par la méthode de variation des paramètres):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \end{vmatrix}$$

$$y_s(x) = -(\qquad).\int \frac{(\qquad)(\qquad)dx}{(\qquad)} + (\qquad).\int \frac{(\qquad)(\qquad)dx}{(\qquad)}$$

3) Exprimer la solution générale :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) =$$

4) Trouver la solution particulière :

4-1) Introduire les conditions initiales dans la solution générale et résoudre les coefficients :

$$\begin{cases} y_g(0)= \\ y'_g(0)= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \\ C_2 = \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$

4-2) Exprimer la solution particulière :

$$y_p(x) =$$

Comparez ensuite avec le résultat suivant :

$$y_p(x) = e^{-x}\cos 2x + (\frac{3}{2} + \frac{1}{4}x)e^{-x}\sin 2x$$

Si c'est identique, alors tout est OK! Sinon ou c'est vous, ou il y a erreur dans ce texte! Regardons si nous ne pouvons pas ramener votre solution à forme souhaitée ci-dessus!

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes avec la méthode de variation des paramètres :

1. $y''+4y=3x^3$.

2. $y''-4y=e^{3x}$.

3. $y''+6y'+9y=18\cos 3x$.

4. $y''+6y'+9y=9\cosh 3x$.

5. $y''-y'-2y=e^x+x$.

6. $y''-2y'-2y=e^x\sin x$.

7. $y''+2y'+5y=5x^2+x$.

8. $(D^2+D-1)y=\cos 2x$.

9. $y''+4y=\dfrac{2}{\cos 2x}$.

10. $y''+6y'+9y=18\cos 3x$.

11. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

12. $y''-4y'+5y=\dfrac{2e^{2x}}{\sin x}$.

13. $y''-4y'+4y=e^x(3x^2+2)$.

14. $y''+6y'+95y=\dfrac{8e^{-3x}}{x^2+1}$.

15. $(D^2+9)y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.

16. $(D^2+2D+2)y=\dfrac{e^x}{\cos^3 x}$.

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales, à partir de la méthode de variation des paramètres :

17. $\begin{cases}(D^2-D-2)y=3e^{2x}\\ y(0)=-1\\ y'(0)=1\end{cases}$.

18. $\begin{cases}(D^2-D-2)y=10\sin x\\ y(\frac{\pi}{2})=-3\\ y'(\pi)=-3\end{cases}$.

19. $\begin{cases}y''+y'-2y=-6\sin 2x-18\cos 2x\\ y(0)=-2\\ y'(0)=2\end{cases}$.

La plupart des problèmes sont les mêmes que pour la méthode des **coefficients indéterminés**, ce qui permet de juger par vous-même celle qui est la plus commode pour vous, puisqu'il s'agit d'équations à **coefficients constants**.

À présent voici des équations d'Euler-Cauchy non-homogènes, trouver la solution générale par la méthode de variation des paramètres (on vous conseille avant de vous tromper, de remettre l'équation dans la forme canonique de résolution, c'est à dire ramener le facteur de y'' à 1) :

20. $x^2y''-2xy'+2y=x^4$

21. $4x^2y''+4xy'-y=\dfrac{12}{x}$

22. $(x^2D^2-4xD+6)y=-7x^4\sin x$

23. $(x^2D^2-D)y=e^x(x+3)$

24. $(x^2D^2-2)y=9x^2$

QUESTIONS & PROBLÈMES

25. Pourquoi dans cette méthode de variation des paramètres, on ne se préocccupe plus du tout de l'histoire de dégénérescence des solutions, alors que dans la méthode des coefficients indéterminés, il fallait parfois multiplier par x ou x^2 si on trouvait cette forme dans la solution homogène?

26. Pourquoi a t'on introduit la résolution des équations d'Euler-Cauchy non-homogènes par la méthode de variation des paramètres alors qu'on ne l'a pas fait avec la méthode des coefficients indéterminés?

27. Qu'arrive-t-il si on ne remettait pas les équations d'Euler-Cauchy non homogènes sous la forme canonique, avant de résoudre pour trouver la solution singulière?

28. Développer votre propre formalisme pour résoudre l'équation d'Euler-Cauchy non-homogène dans la forme canonique suivante : $x^2y''+axy'+by=r(x)$.

17. APPLICATION DES MÉTHODES DE RECHERCHE DE LA SOLUTION SINGULIÈRE AUX SYSTÈMES MÉCANIQUES EN TRANSLATION ET AUX SYSTÈMES ÉLECTRIQUES.

17.1. APPLICATION: le système de suspension d’une automobile :

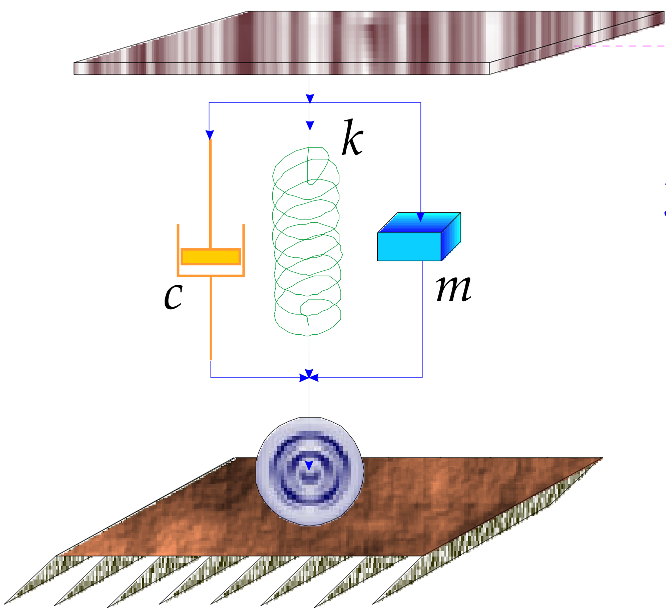
La loi des nœuds nous dit que la concurrence de toutes les forces en un point de donné est nulle. Ainsi au point d’attache entre le châssis de la voiture (à l’intérieur de la carrosserie, sous le capot du moteur) et le système de suspension, nous avons différentes forces qui s’exercent :

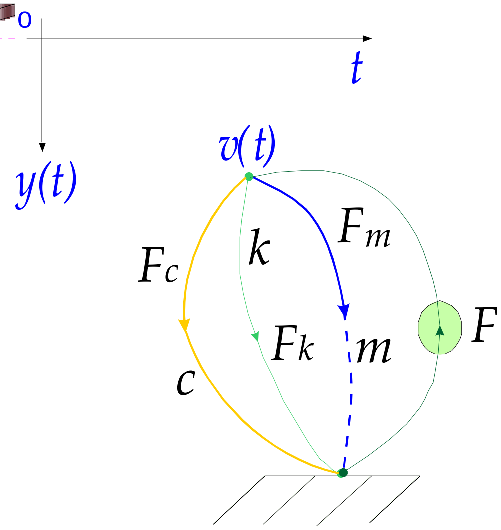
$F = f(x)$ (force du balèse qui s'est jeté dans l'automobile - i.e. l'input).

$F_m = m.y''$ (force de contre-réaction par la masse d'inertie de l'automobile).

$F_c = c.y'$ (force de contre-réaction par le frottement de l'amortisssseur proprement dit).

$F_k = k.y$ (force de contre-réaction par le ressort à boudin).





Graphe linéaire associé

L’équation des forces (l’équivalent de la loi des courants de Kirchoff) nous permet d’écrire :

$$F_m + F_c + F_k = F$$

d’où l’équation du second ordre à résoudre :

$$m.y'' + c.y' + k.y = f(t)$$

Tout dépend évidemment du type d’input. Si le balèse impose une oscillation sinusoïdale (ou encore que le chemin comporte des nids de poule en forme sinusoïdale) :

$$f(t) = F_o \cos \omega t$$

PROBLÈME MODÉLISÉ-NORMALISÉ:

Il s'agit donc de résoudre le système non-homogène suivant: $y''+\frac{c}{m}y'+\frac{k}{m}y=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$

SOLUTION :

1) Déterminer la solution homogène :

$$\left.\begin{matrix} y''+\frac{c}{m}y'+\frac{k}{m}y=0 \\ \lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-\frac{c}{m}+\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2-4\left(\frac{k}{m}\right)}}{2}=\dfrac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m} \\ \lambda_2=\dfrac{-\frac{c}{m}-\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2-4\left(\frac{k}{m}\right)}}{2}=\dfrac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m} \end{cases}$$

d'où l'expression de la solution homogène :

$$y_h(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1e^{+\frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}t}\right)$$

2) Solution singulière :

Étant donné que l'équation ne comporte que des coefficients constants, on peut y aller au plus court par la méthode des coefficients indéterminés :

$$r(x)=\frac{F_o}{m}\cos\omega t \quad \rightarrow \quad y_s(x)=K_c\cos\omega t+K_s\sin\omega t$$

pour déterminer les coefficients K_c et K_s, il faut dériver la forme de $y_s(t)$:

$$\begin{cases} y_s(t)=K_c\cos\omega t+K_s\sin\omega t \\ y_s'(t)=-\omega K_c\sin\omega t+\omega K_s\cos\omega t \\ y_s''(t)=-\omega^2K_c\cos\omega t-\omega^2K_s\sin\omega t \end{cases}$$

et le réinjecter dans l'équation générale :

$$(-\omega^2K_c\cos\omega t-\omega^2K_s\sin\omega t)+\frac{c}{m}(-\omega K_c\sin\omega t+\omega K_s\cos\omega t)+\frac{k}{m}(K_c\cos\omega t+K_s\sin\omega t)=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

c'est à dire après mise en évidence des facteurs de puissance

$$(-\omega^2K_c+\frac{c}{m}\omega K_s+\frac{k}{m}K_c).\cos\omega t+(-\omega^2K_s-\frac{c}{m}\omega K_c+\frac{k}{m}K_s)\sin\omega t=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

Nous avons donc un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre en K_c et en K_s :

$$\begin{cases} (k-m\omega^2).K_c+(c\omega).K_s=F_o \\ (-c\omega).K_c+(k-m\omega^2).K_s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_c=F_o\dfrac{(k-m\omega^2)}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2} \\ K_s=F_o\dfrac{(c\omega)}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2} \end{cases}$$

et en posant : $\omega_o=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (on verra en physique qu'il s'agit de la fréquence de pulsation libre du système, i.e. sans entrée forcée). On peut alors exprimer les coefficients d'une façon plus élégante :

$$\begin{cases} K_c=\dfrac{F_o}{m}.\dfrac{(\omega_o^2-\omega^2)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\dfrac{c}{m}\omega)^2} \\ K_s=\dfrac{F_o}{m}.\dfrac{(\dfrac{c}{m}\omega)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\dfrac{c}{m}\omega)^2} \end{cases}$$

Et la solution générale sera alors la somme des solutions homogène et singulière. Mais avant d'en arriver là, il faut discuter des cas possibles des racines de l'équation caractéristique. Car il se peut que la solution singulière existe déjà dans la solution homogène, Auquel cas il faut modifier (on dit lever la dégénérescence) dans la solution singulière.

Cas 4-H + 1-P : p(x)=0 (pas d'amortisseur du tout) et input $\omega\neq\omega_o=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$:

4-H signifie le cas_4 pour la solution homogène et 1-P signifie pas de dégénérescence à traiter pour la solution singulière. En fait, cela se traduit par l'absence totale de frottement par l'amortisseur (Ca m'a coûté $$$ pour les faire changer @« /% @*& !), et que la pulsation imprimée ω par le balèse ne correspond pas à la pulsation propre $\omega_o=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ de l'automobile. Dans ce cas l'équation générale est :

$$y''+0+\omega_o^2 y=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

Fréquences différentes

Dès lors, on a pas de problème de dégénérescence à traiter puisque la solution homogène est :

$$y_h(t)=A\cos\omega_o t+B\sin\omega_o t=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

alors que la solution singulière sera :

$$y_s(t)=K_c\cos\omega t+K_s\sin\omega t=\frac{F_o}{m}\left(\frac{(\omega_o^2-\omega^2)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\dfrac{0}{m}\omega)^2}\cos\omega t+\frac{(\dfrac{0}{m}\omega)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\dfrac{0}{m}\omega)^2}\sin\omega t\right)$$

Le net résultat est une oscillation combinée de 2 ondes sinusoïdales à pulsations différentes :

$$y_g(t) = y_h(t) + y_s(t) = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t + \frac{F_o}{m}.\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$
$$= C\cos(\omega_o t - \theta) + \frac{F_o}{m}.\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

On s'aperçoit par passage à la limite, lorsque que $\omega \to \omega_o$, que l'oscillation va en augmentant, on atteint alors la fréquence dite de résonance, et l'amplitude devient très grand (C'est à ce moment là qu'on débarque de la route.. @# ! C'est pour cela que j'ai dû changer mes amortisseurs @# !).

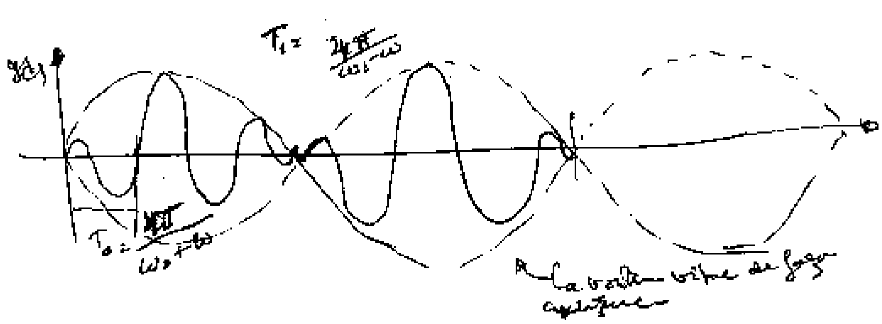
Dans le cas très particulier où les conditions initiales sont : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$, alors la solution particulière est :

$$y_p(t) = -\frac{F_o}{m}.\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos(\omega_o t - 0^o) + \frac{F_o}{m}.\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$
$$= \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_o t)$$

Et en remaniant par relation trigonométrique :

$$\boxed{y_p(t) = \frac{2F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}\sin\left(\frac{\omega + \omega_o}{2}\right)t \times \sin\left(\frac{\omega - \omega_o}{2}\right)t}$$

Il s'agit alors d'une oscillation sinusoïdale de pulsation $\left(\frac{\omega + \omega_o}{2}\right)$ (fréquence porteuse), modulée par une autre oscillation de pulsation $\left(\frac{\omega - \omega_o}{2}\right)$ (fréquence de modulation).



CAS 4H + 2-P : p(x)=0 (pas d'amortisseur du tout) et $\omega = \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

C'est le cas précis où le balèse imprime une pulsation identique à la fréquence propre (fréquence de résonance) de la voiture. L'équation générale devient :

Fréquences identiques

$$y'' + 0 + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{m}\cos\omega_o t$$

Dans ce cas il y a une dégénérescence à lever. Il faut donc poser :

$$\begin{cases} y_s(t) = t.(K_c \cos\omega_o t + K_s \sin\omega_o t) \\ y_s\,'(t) = -\omega_o t.(K_c \sin\omega_o t - K_s \cos\omega_o t) + (K_c \cos\omega_o t + K_s \sin\omega_o t) \\ y_s\,''(t) = -\omega_o^2 t.(K_c \cos\omega_o t + K_s \sin\omega_o t) + 2\omega_o.(K_c \sin\omega_o t - K_s \cos\omega_o t) \end{cases}$$

on réintroduit ces expressions dans l'équation générale pour déterminer K_c et K_s :

$$-\omega_o^2 t(K_c \cos\omega_o t + K_s \sin\omega_o t) + 2\omega_o(K_c \sin\omega_o t - K_s \cos\omega_o t) + \omega_o^2 t(K_c \cos\omega_o t + K_s \sin\omega_o t) = \frac{F_o}{m}\cos\omega_o t$$

Soit par la mise en facteurs de puissance :

$$(-\omega_o^2 t.K_c + 2\omega_o.K_s + \omega_o^2 t.K_c).\cos\omega_o t + (-\omega_o^2 t.K_s - 2\omega_o.K_c + \omega_o^2 t.K_s).\sin\omega_o t = \frac{F_o}{m}\cos\omega_o t$$

d'où on identifie les coefficients de la solution singulière:

$$\begin{cases} 2\omega_o.K_s = \dfrac{F_o}{m} \\ -2\omega_o.K_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_c = 0 \\ K_s = \dfrac{F_o}{2m\omega_o} = \dfrac{F_o}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

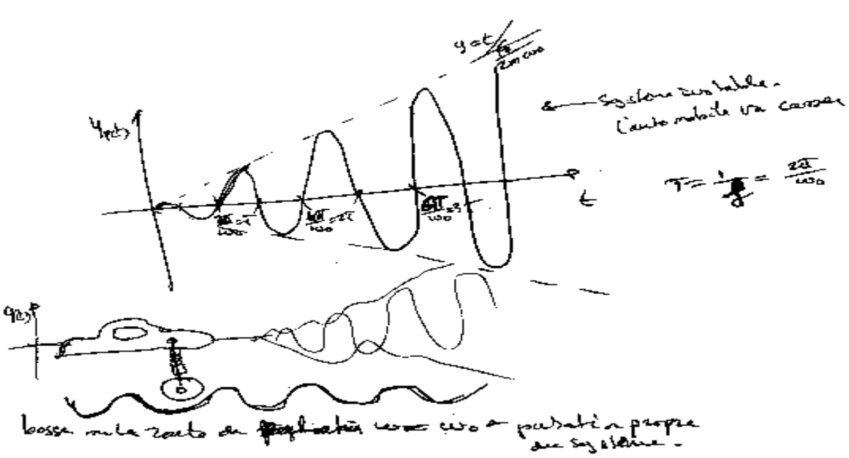
Et la solution singulière est alors :

$$y_s(t) = \frac{F_o}{2\sqrt{km}}t.\cos\omega_o t$$

d'où l'expression de la solution générale :

$$\boxed{y_g(t) = y_h(t) + y_s(t) = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t + \frac{F_o}{2\sqrt{km}}t.\cos\omega_o t}$$

Ainsi au fur et à mesure que le temps passe l'oscillation s'amplifie à cause de la variable t (Devinez ce qui arriva au balèse et au conducteur qui lui donna ce lift ?).



CAS 3 : il y a un sous-amortissement $c^2 < 4km$:

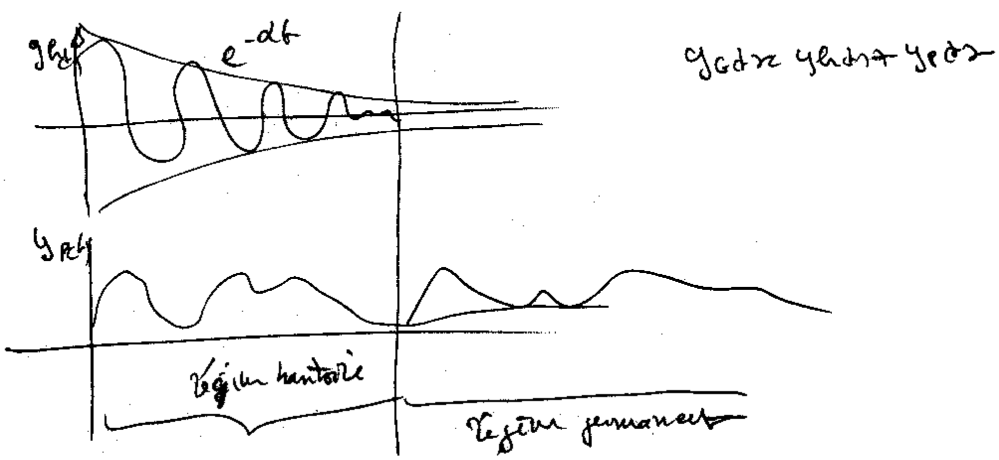
Dans le cas où il y a un coefficient d'amortissement $c \neq 0$ ($c > 0$) alors notre forme solution devient :

$$y_h(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1 e^{+i\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t} + C_2 e^{-i\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t}\right) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}\right)t + B\sin\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}\right)t\right)$$

$$= e^{-\frac{c}{2m}t} C\cos\left(\omega^* t - \theta\right)$$

Il s'agit donc d'une onde sinusoïdale de pulsation $\omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{m}\right)^2}$ modulée par une exponentielle décroissante $e^{-\frac{c}{2m}.t}$. Après un certains temps qu'on appelle le **régime transitoire**, vient le **régime permanent** où toute oscillation propre au système (ω^*) a disparu. Ainsi si votre voiture fait quelques oscillations après avoir pris une bosse unique, c'est que vos amortisseurs sont usés. Mais attention la voiture continue quand même à faire des siennes si l'input forcée n'est pas une bosse unique. Ainsi si la balèse continue à faire osciller la voiture à une pulsation ω, cette pulsation se retrouve dans la solution singulière et non pas dans la solution homogène, de sorte que dans la solution générale, le régime permanent ne comporte plus que la solution singulière.

Il est tentant d'associer le **régime permanent** à la **solution singulière** uniquement, mais il faut **éviter cette association** car il se peut que la solution homogène subsiste, comme c'était le cas lorsqu'on n'avait aucun amortisseur, et on avait alors une double fréquence d'oscillation, celle ω imposée par le balèse et celle ω_0 propre au système !



17.2. Les courbes d'amplitude et de phase (vers les diagrammes de Bode):

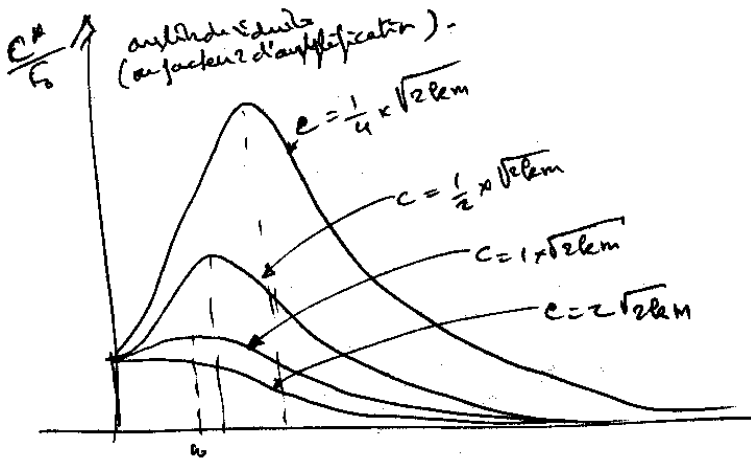
Au lieu de regarder tous les cas possibles une à une et d'exprimer leur solution, nous pouvons faire une analyse plus globale en fonction d'un type d'entrée forcée singulière : l'entrée sinusoïdale. Ainsi si nous regardons uniquement l'amplitude C^* ou la phase η de la solution singulière $y_s(t)$:

$$y_s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C^*\cos\left(\omega t - \eta\right)$$

Nous observons, dans le cas de notre système amortisseur pour automobile, que :

$$\begin{cases} C^* = \sqrt{A^2 + B^2} = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 c^2}} \\ \eta = \arctan\left(\dfrac{B}{A}\right) = \dfrac{\omega c}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \end{cases}$$

Ce qui nous permet de dresser les courbes d'amplitude réduite $\dfrac{C^*}{F_0} = \dfrac{1}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 c^2}}$ en fonction de la fréquence sinusoïdale de l'input ω :



condition d'existence d'un extremum :

Il suffit de dériver l'expression et chercher à savoir, pour quelle fréquence de l'input, la dérivée s'annule :

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{C^*}{F_0}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 c^2\right)^{-3/2}\left(2m^2(\omega^2 - \omega_0^2).2\omega + 2\omega.c^2\right) = 0$$

c'est-à-dire qu'il faut qu'on ait :

$$2m^2(\omega^2 - \omega_0^2) + c^2 = 0$$

l'extremum n'existe donc que si :

$$2m^2\omega^2 = 2m^2\omega_0^2 - c^2$$

or comme le membre de gauche est positif, il faut donc que l'on ait :

$$2m^2\omega_0^2 - c^2 > 0$$

$$2m^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 - c^2 > 0$$

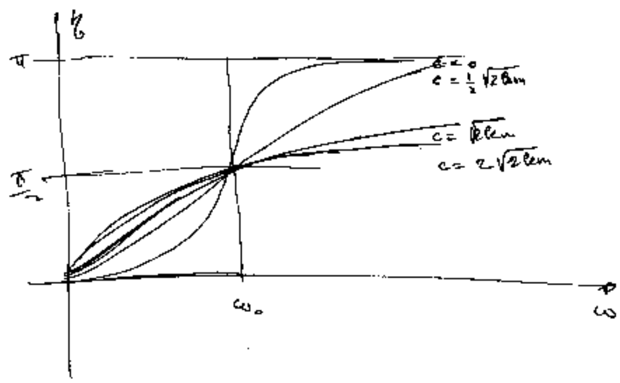
C'est à dire :

$$c^2 < 2km$$

et cet extremum vaut alors:

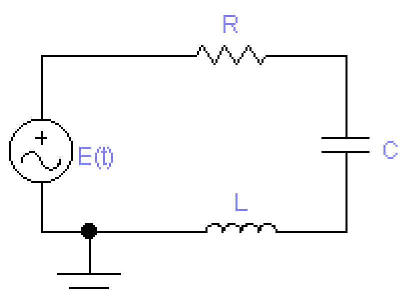
$$\frac{C^*(\omega_{\max})}{F_0} = \frac{2m}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

il suffit pour cela de remplacer ω par $\omega_{\max} = \frac{2m^2\omega_0^2 - c^2}{2m^2}$ dans l'expression de l'amplitude réduite $\frac{C^*(\omega)}{F_0}$.
Voici les courbes de phase correspondantes :



17.3. APPLICATION: excitation sinusoïdale d'un circuit RLC:

Considérons un circuit RLC série suivant :



excité par une tension sinusoïdale :

$$E(t) = E_o \sin \omega t \qquad \text{(forme de la force électromotrice)}$$

Les équations d'éléments étant :

$E_R(t) = Ri(t)$ (d.d.p. développé aux bornes de la résistance).

$E_L(t) = L\dfrac{di}{dt}$ (d.d.p. développé aux bornes de la self-inductance).

$E_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt$ (d.d.p. développé aux bornes du condensateur).

L'équation des mailles (loi des tensions de Kirchoff) nous dit que la somme des tensions le long d'un parcours fermé doit être nul, c'est à dire que nous devons avoir :

$$E_R(t) + E_L(t) + E_C(t) = E(t)$$

d'où l'équation à résoudre :

$$Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}\int i(t).dt = E_o \sin \omega t$$

C'est une équation du second ordre, pour la mettre en évidence sous forme canonique, il suffit de dériver l'équation :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{E_o \omega}{L}\cos \omega t$$

On rappelle que pour ceux qui sont plus familiers avec la modélisation en mécanique, qu'il suffit d'utiliser la table de correspondance entre système mécanique et système électrique (voir au chapitre 15).

PROBLÈME MODÉLISÉ-NORMALISÉ:

Soit donc à résoudre : $i'' + \dfrac{R}{L}i' + \dfrac{1}{LC}i = \dfrac{E_o \omega}{L}\cos \omega t$

SOLUTION :

1) Déterminer la solution homogène :

$$\left.\begin{array}{l} i'' + \dfrac{R}{L}i' + \dfrac{1}{LC}i = 0 \\ \lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{-\dfrac{R}{L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\dfrac{1}{LC}\right)}}{2} = \dfrac{-R + \sqrt{R^2 - \dfrac{4L}{C}}}{2L} \\ \lambda_2 = \dfrac{-\dfrac{R}{L} - \sqrt{\left(\dfrac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\dfrac{1}{LC}\right)}}{2} = \dfrac{-R - \sqrt{R^2 - \dfrac{4L}{C}}}{2L} \end{array}\right.$$

et la forme de la solution dépend de chacun des cas suivant la valeur des éléments physiques R, L, et C :

Cas 4-H : ($R = 0$) (système non amorti) (2 racines imaginaires pures):

$$i_h(t) = C_1 e^{+i.\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + C_2 e^{-i.\frac{1}{\sqrt{LC}}t} = A\cos \omega_o t + B \sin \omega_o t = C\cos(\omega_o t - \delta_h)$$

Cas 1-H : ($R \neq 0 \quad et \quad R^2 - \frac{4L}{C} > 0$) (système sur-amorti) (2 racines réelles λ_1 et λ_2 distinctes) :

$$i_h(t) = C_1 e^{\left(\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right).t} + C_2 e^{\left(\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right).t}$$

Cas 2-H : ($R \neq 0 \quad et \quad R^2 - \frac{4L}{C} = 0$) (système amorti-critique) (1 racine réelle double) :

$$i_h(t) = C_1 e^{\left(\frac{-R}{2L}\right).t} + C_2 t.e^{\left(\frac{-R}{2L}\right).t} \text{ ou encore } i_h(t) = C_1 e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} + C_2 t.e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}}$$

Cas 3-H : ($R \neq 0 \quad et \quad R^2 - 4\frac{L}{C} < 0$) (système sous-amorti) (2 racines complexes conjuguées) :

$$i_h(t) = C_1 e^{\left(\frac{-R+i.\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}\right).t} + C_2 e^{\left(\frac{-R-i.\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}\right).t} = e^{\left(\frac{-R}{2L}\right)t}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right).t + B\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right).t\right)$$

$$= e^{\left(\frac{-R}{2L}\right)t}.C\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.t - \delta_h\right)$$

2) Solution singulière :

Étant donné que l'équation ne comporte que des coefficients constants, on peut y aller au plus court par la méthodes des coefficients indéterminés. Cependant la solution singulière dépend toujours de ce qu'il y a déjà dans la solution homogène :

Cas 1-P : ($\omega \neq \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) (pas de dégénérescence)

Ce cas se présente lorsque nous partons des **cas 1-H**, **cas 2-H**, **cas 3-H** pour la solution homogène ou bien encore du **cas 4-H**, mais uniquement lorsque l'entrée forcée, bien que sinusoïdale, n'a pas une pulsation ω qui soit identique la pulsation propre (ou caractéristique) $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ du système. Dans ce cas le choix de la forme de $i_s(t)$ est simple :

$$r(t) = \frac{E_o\omega}{L}\cos\omega t \quad \rightarrow \quad i_s(t) = K_c\cos\omega t + K_s\sin\omega t$$

pour déterminer les coefficients K_c et K_s, il faut dériver la forme de $i_s(t)$:

$$\begin{cases} i_s(t) = K_c \cos\omega t + K_s \sin\omega t \\ i_s'(t) = -\omega K_c \sin\omega t + \omega K_s \cos\omega t \\ i_s''(t) = -\omega^2 K_c \cos\omega t - \omega^2 K_s \sin\omega t \end{cases}$$

et le ré-injecter dans l'équation générale :

$$(-\omega^2 K_c \cos\omega t - \omega^2 K_s \sin\omega t) + \frac{R}{L}(-\omega K_c \sin\omega t + \omega K_s \cos\omega t) + \frac{1}{LC}(K_c \cos\omega t + K_s \sin\omega t) = \frac{E_o\omega}{L}\cos\omega t$$

C'est à dire après mise en évidence des facteurs de puissance :

$$(-\omega^2 K_c + \frac{R}{L}\omega K_s + \frac{1}{LC}K_c).\cos\omega t + (-\omega^2 K_s - \frac{R}{L}\omega K_c + \frac{1}{LC}K_s)\sin\omega t = \frac{E_o\omega}{L}\cos\omega t$$

Nous avons donc un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre en K_c et K_s :

$$\begin{cases} -\omega^2 K_c + \frac{R}{L}\omega K_s + \frac{1}{LC}K_c = \frac{E_o\omega}{L} \\ -\omega^2 K_s - \frac{R}{L}\omega K_c + \frac{1}{LC}K_s = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} (\frac{1}{LC} - \omega^2)K_c + (\frac{R\omega}{L})K_s = \frac{E_o\omega}{L} \\ (-\frac{R\omega}{L})K_c + (\frac{1}{LC} - \omega^2)K_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_c = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{E_o\omega}{L} & +\frac{R\omega}{L} \\ 0 & \frac{1}{LC} - \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{LC} - \omega^2 & +\frac{R\omega}{L} \\ -\frac{R\omega}{L} & \frac{1}{LC} - \omega^2 \end{vmatrix}} = -\frac{E_o\omega}{L}.\dfrac{(\frac{1}{LC} - \omega^2)}{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2} \\ K_s = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{1}{LC} - \omega^2 & \frac{-E_o\omega}{L} \\ -\frac{R\omega}{L} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{LC} - \omega^2 & +\frac{R\omega}{L} \\ -\frac{R\omega}{L} & \frac{1}{LC} - \omega^2 \end{vmatrix}} = +\frac{E_o\omega}{L}.\dfrac{(\frac{R\omega}{L})}{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2} \end{cases}$$

et en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\frac{L}{\omega}$ on exprime de façon plus élégante les coefficients K_c et K_s :

$$\begin{cases} K_c = E_o(\frac{\omega}{L})\dfrac{(\frac{1}{LC}-\omega^2)\times(\frac{L}{\omega})}{\left((\frac{1}{LC}-\omega^2)^2+(\frac{R\omega}{L})^2\right)\times(\frac{L}{\omega})} = -E_o\dfrac{(L\omega-\frac{1}{C\omega})}{(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2+R^2} \\ K_s = E_o(\frac{\omega}{L})\dfrac{(\frac{R\omega}{L})\times(\frac{L}{\omega})}{\left((\frac{1}{LC}-\omega^2)^2+(\frac{R\omega}{L})^2\right)\times(\frac{L}{\omega})} = +E_o\dfrac{R}{(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2+R^2} \end{cases}$$

Dans un cours plus particulier aux circuits électriques, la partie $\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)=S$ est appelée la réactance. D'où l'expression standard des coefficients :

$$\begin{cases} K_c = -E_o\dfrac{S}{S^2+R^2} \\ K_s = +E_o\dfrac{R}{S^2+R^2} \end{cases}$$

Et la solution singulière s'écrit alors :

$$i_s(t) = K_c\cos\omega t + K_s\sin\omega t = -E_o\frac{S}{S^2+R^2}\cos\omega t + E_o\frac{R}{S^2+R^2}\sin\omega t$$

si on pose :

$$\begin{cases} K_c = -E_o\dfrac{S}{S^2+R^2} = -I_o\sin\delta_p \\ K_s = +E_o\dfrac{R}{S^2+R^2} = +I_o\cos\delta_p \end{cases}$$

l'expression de la solution singulière s'écrira plus simplement :

$$i_s(t) = I_o.\sin(\omega t-\delta_s) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} I_o = \sqrt{(-E_o\dfrac{S}{S^2+R^2})^2+(E_o\dfrac{R}{S^2+R^2})^2} = \dfrac{E_o}{\sqrt{S^2+R^2}} = \dfrac{E_o}{|Z|} \\ \delta_p = \arctan\left(-\dfrac{(-E_o\frac{S}{S^2+R^2})}{(E_o\frac{R}{S^2+R^2})}\right) = \arctan\left(\dfrac{S}{R}\right) \end{cases}$$

$|Z|=\sqrt{S^2+R^2}$ est appelée l'impédance du circuit face à la pulsation forcée ω. Et la solution générale est selon le cas de la solution homogène:

$$i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C\cos(\omega_o t-\delta_h) + I_o\sin(\omega t-\delta_s)$$

$$\text{ou } i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C_1 e^{\left(\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right).t} + C_2 e^{\left(\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}\right).t} + I_o \sin(\omega t - \delta_s)$$

$$\text{ou } i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C_1 e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} + C_2 t.e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} + I_o \sin(\omega t - \delta_s)$$

$$\text{ou } i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = e^{\left(\frac{-R}{2L}\right)t} C \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t - \delta_h\right) + I_o \sin(\omega t - \delta_s)$$

Cas 2-p : ($\omega = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) (dégénérescence simple) ($R = 0$) :

Attention : il faut tenir compte que l'input étant une sinusoïde pure, la seule façon d'avoir une dégénérescence, c'est que la solution homogène soit aussi une sinusoïde pure, c'est à dire que seul le **cas 4-H** doit nous mener au **cas 2-P**. À cause de la forme sinusoïdale de l'input, on ne peut avoir de cas de dégénérescence plus élevée. Ainsi seul le **cas 2-H** peut nous mener au **cas 3-P** mais à condition que l'input soit aussi un exponentielle décroissante.

$$r(t) = \frac{E_o \omega_o}{L} \cos \omega_o t \quad \rightarrow \quad i_s(t) = t.(K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t)$$

pour déterminer les coefficients K_c et K_s, il faut dériver la forme de $i_s(t)$:

$$\begin{cases} i_s(t) = t.(K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t) \\ i_s'(t) = -\omega_o t.(K_c \sin \omega_o t - K_s \cos \omega_o t) + (K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t) \\ i_s''(t) = -\omega_o^2 t.(K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t) + 2\omega_o.(K_c \sin \omega_o t - K_s \cos \omega_o t) \end{cases}$$

on réintroduit les expressions dans l'équation générale pour déterminer K_c et K_s :

$$(-\omega_o^2 t.(K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t) + 2\omega_o.(K_c \sin \omega_o t - K_s \cos \omega_o t)) + \omega_o^2 (t.(K_c \cos \omega_o t + K_s \sin \omega_o t)) = \frac{E_o \omega_o}{L} \cos \omega_o t$$

Soit par mise en facteurs de puissance :

$$(-\omega_o^2 t.K_c + 2\omega_o.K_s + \omega_o^2 t.K_c).\cos \omega_o t + (-\omega_o^2 t.K_s - 2\omega_o.K_c + \omega_o^2 t.K_s).\sin \omega_o t = \frac{E_o \omega_o}{L} \cos \omega_o t$$

d'où on identifie que :

$$\begin{cases} 2\omega_o.K_s = \frac{E_o \omega_o}{L} \\ -2\omega_o.K_c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K_c = 0 \\ K_s = \frac{E_o}{2L} = \frac{E_o \omega_o}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{E_o \omega_o}{2|Z_o|} \end{cases}$$

et la solution singulière est alors :

$$i_s(t) = \frac{E_o}{2|Z_o|}\omega_o t.\sin\omega_o t$$

$|Z_0| = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ est appelée l'impédance caractéristique du circuit. La solution générale est alors:

$$i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C\cos(\omega_o t - \delta_h) + \frac{E_o}{2|Z_o|}\omega_o t.\sin\omega_o t$$

Ou, plus explicitement en fonction des composantes :

$$i_g(t) = C\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \delta_h\right) + \frac{E_o}{2L}.\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Cas 3-p : (dégénérescence double) ($R \neq 0 \quad et \quad R^2 - \dfrac{4L}{C} = 0$) :

Ce cas ne peut se présenter que lorsque nous partons d'une racine double pour la solution homogène, c'est à dire du **cas 2-H**. Mais alors, il faut aussi que l'entrée forcée soit aussi une exponentielle décroissante de la forme:

$$r(t) = \frac{E_o}{L}\frac{-1}{\sqrt{LC}}e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} \quad \rightarrow \quad i_s(t) = Ke^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}}$$

et alors la solution générale serait :

$$i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C_1 e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} + C_2 t.e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} + I_o\sin(\omega t - \delta_s)$$

Cependant un tel cas ne peut se présenter lors d'une excitation sinusoïdale d'un circuit de second ordre.

EXEMPLE PRATIQUE:

Soit à résoudre le cas pratique où la source d'énergie est :

$$E(t) = 110\sqrt{2}\cos(2\pi.60).t \qquad \text{Volts}$$

avec la valeur suivante des composants :

$$\begin{cases} R = 100\ \Omega & \text{(Ohms)} \\ L = 0{,}1\ \text{H} & \text{(Henrys)} \\ C = 10^{-3}\ \text{F} & \text{(Farads)} \end{cases}$$

Et les conditions initiales sont telles qu'il n'y avait aucune énergie stockée, ni dans la self-inductance ($I_L(0^-) = 0$), ni dans le condensateur ($V_C(0^-) = 0$)

SOLUTION :

1) Solution homogène :

À cause de la valeur des composants, nous sommes situés dans le **cas 1-H** : $R \neq 0 \quad et \quad R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$. La solution homogène est alors constituée de 2 exponentielles décroissantes :

$$i_h(t) = C_1.e^{\left(\frac{-R+\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}\right).t} + C_2.e^{\left(\frac{-R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}\right).t} = C_1.e^{-10t} + C_2.e^{-990t}$$

2) Solution singulière :

Comme la solution homogène comporte 2 exponentielles décroissantes et que la forme de $r(t)$ est sinusoïdale, il n'y aura pas de problème de dégénérescence à traiter. Aussi la forme de la solution singulière sera :

$$i_s(t) = \frac{E_o}{\sqrt{(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 + R^2}}.\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)\right) \approx 1,463.\sin(377.t - 0,34). \quad \text{Amperes}$$

pour tout t ≥ 0

3) Solution générale :

$$i_g(t) = i_h(t) + i_s(t) = C_1.e^{-10.t} + C_2.e^{-990t} + 1,463.\sin\left(377t - 0,34\right)$$

4) Solution particulière :

Ce que nous devons savoir ce sont les valeurs initiales $I(0^+) = ?$ et $I'(0^+) = ?$ à partir des conditions initiales données : $I_L(0^-) = 0$ et $V_C(0^-) = 0$, car l'expression de la solution générale n'est valide qu'à partir de l'instant $t = 0^+$.

Pour déterminer $I(0^+)$ nous savons qu'il s'agit du même courant qui traverse la self-inductance. Or la physique de la self-inductance montre qu'il ne peut y avoir de variation instantanée de courant au travers d'une self-inductance, de sorte que :

$$I(0^+) = I_L(0^+) = I_L(0^-) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I(0^+) = 0$$

Pour déterminer $I'(0^+)$, il faut le déduire à partir de l'intégration de l'équation entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$ comme suit :

$$R\int_{t=0^-}^{t=0^+} i'(t).dt + L\int_{t=0^-}^{t=0^+} \frac{d^2i}{dt^2}.dt + \frac{1}{C}\int_{t=0^-}^{t=0^+} i(t).dt = \int_{t=0^-}^{t=0^+} E_o\omega\cos\omega t.dt$$

Soit :

$$R.\left[i(0^+)-i(0^-)\right]+L\left[i'(0^+)-i'(0^-)\right].+\frac{1}{C}.\left[Q(0^+)-Q(0^-)\right]=E_o[\sin\omega t]_{t=0^-}^{t=0^+}$$

Comme la fonction sinus est une fonction bornée, le second membre est nul.

$$[\sin\omega t]_{t=0^-}^{t=0^+}=0$$

De plus nous savons que physiquement la variation de charge d'un condensateur ne peut subir de discontinuité donc :

$$Q(0^+)=Q(0^-)$$

Finalement comme $i(t)$ doit être continu, nous aurons :

$$i(0^+)=i(0^-)$$

c'est à dire que nous nous retrouvons avec :

$$0+L.\left[i'(0^+)-i'(0^-)\right]+0=0$$

comme $i'(0^-)=0$, ceci qui nous permet de conclure sur la valeur initiale :

$$i'(0^+)=0$$

Nous avons à présent tout en mains pour déterminer la valeur des coefficients :

$$\begin{cases} i'(0^+)=-10C_1-990.C_2+1,463\times377\times\cos(377\times0-0,34)=0 \\ i(0^+)=C_1+C_2+1,463\times\sin(377\times0-0,34)=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1=-0,042 \\ C_2=+0,526 \end{cases}$$

D'où la solution particulière :

$$i_p(t)=-0,042.e^{-10.t}+0,526.e^{-990t}+1,463.\sin\left(377t-0,34\right)$$

Les composantes exponentielles disparaissent après un certain temps et il ne subsiste que la composante ondulatoire forcée par l'input : c'est le régime permanent.

EXERCICES

Trouver l'expression du courant en régime permanent pour les cas du circuit RLC série suivant :

1. $R = 2$ Ohms, $L = 1$ Henry, $C = 0.5$ Farad, $E = 25\sin t$ Volts.

2. $R = 8$ Ohms, $L = 2$ Henrys, $C = 10^{-2}$ Farad, $E = 425.\sin 4t$ Volts.

3. $R = 4$ Ohms, $L = 1$ Henry, $C = 2.10^{-4}$ Farad, $E = 220.U(t)$ Volts.

Trouver l'expression du courant en régime transitoire pour les cas de circuit RLC série suivant :

4. $R = 40$ Ohms, $L = 0.5$ Henry, $C = 1/750$ Farad, $E = 50\sin t$ Volts.

5. $R = 20$ Ohms, $L = 5$ Henrys, $C = 0.01$ Farad, $E = 425\sin 4t$ Volts.

6. $R = 10$ Ohms, $L = 0.1$ Henry, $C = 1/340$ Farad, $E = e^{-t}(169.9\sin t - 160.1\cos t)$ Volts

Trouver les solutions particulières pour le cas des circuits RLC série suivants, sachant que le courant initial dans la self, ainsi que la charge initiale dans le condensateur sont nuls :

7. $R = 80$ Ohms, $L = 10$ Henrys, $C = 0.004$ Farad, $E = 240.5\sin 10t$ Volts.

8. $R = 8$ Ohms, $L = 2$ Henrys, $C = 0.1$ Farad, $E = 10.U(t)$ Volts.

9. $R = 3$ Ohms, $L = 0.5$ Henry, $C = 0.08$ Farad, $E = 12\cos 50t$ Volts.

Trouver l'expression du courant dans les circuits résonnants LC suivants (en réalité, les circuits électriques réels comportent toujours une résistivité résiduelle que l'on a négligé) :

10. $R \approx 0$ Ohm, $L = 10$ Henrys, $C = 0.1$ Farad, $E = 10t$ Volts.

11. $R \approx 0$ Ohm, $L = 2$ Henrys, $C = 50$ μFarad, $E = 110.U(t)$ Volts.

12. $R \approx 0$ Ohm, $L = 2$ Henrys, $C = 50000$ μFarad, $E = 220\sin(4t)$ Volts.

13. Trouver l'expression de la charge dans le condensateur en intégrant à partir de l'expression du courant obtenu pour l'exercice 11, puis en vérifier en partant de l'équation directe pour la charge.

18. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE N>2

18.1. Cas général d'une équation non-homogène

De façon générale, une équation différentielle **linéaire** d'ordre n s'écrit de la façon suivante:

$$\boxed{y^{(n)} + P_{n-1}(x).y^{(n-1)} + \ldots + P_i(x).y^{(i)} + \ldots + P_1(x).y^{(1)} + P_0(x).y^{(0)} = r(x) \quad \text{avec} \quad y^{(i)} = \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right) y}$$

Une solution de cette équation est une fonction $y_g(x)$ qui serait n fois dérivables sur un intervalle ouvert I non-nul, et qui substitué à y, satisfait cette équation sur tout l'intervalle I.

Cependant pour trouver cette solution, nous devons procéder selon la règle habituelle, c'est à dire commencer par résoudre l'équation homogène associée pour trouver la solution dite homogène ou complémentaire.

18.2. Cas de l'équation homogène

L'équation homogène associée est :

$$\boxed{y^{(n)} + P_{n-1}(x).y^{(n-1)} + \ldots\ldots + P_1(x).y^{(1)} + P_0(x).y^{(0)} = 0}$$

THÉORÈME : PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Dans une équation homogène, toute combinaison linéaire de fonctions solutions est aussi solution de cette même équation homogène.

DÉMONSTRATION :

Il suffit d'étendre la démonstration faite pour les équations homogènes du second ordre, à plus que deux fonctions solutions. Cette démonstration est donc laissée aux soins de l'étudiant (à faire avec au moins trois fonctions solutions).

DÉFINITIONS :

La **solution générale** de l'équation homogène est une combinaison linéaire des n formes solutions $y_1, \ldots\ldots, y_n$ toutes linéairement indépendantes :

$$y_h = c_1 y_1 + \ldots\ldots + c_n y_n \,.$$

On dit que les fonctions $y_1, \ldots\ldots, y_n$ sont tous **linéairement indépendants** si : $k_1 y_1 + \ldots\ldots + k_n y_n = 0$ implique que tous les coefficients $k_1, \ldots\ldots, k_n$ doivent être tous nuls.

Inversement, on dira que les fonctions $y_1, \ldots\ldots, y_n$ sont **linéairement dépendants** s'il existe au moins un coefficient non-nul qui satisfait $k_1 y_1 + \ldots\ldots + k_n y_n = 0$.

Lorsque les fonctions $y_1,......,y_n$ sont tous linéairement indépendants, on dit que l'ensemble $\{ y_1,......,y_n \}$ forme une **base de solutions**.

Attention : La forme des $y_1,......,y_n$ exige l'évaluation d'intégrales si les coefficients $P_{n-1}(x),...,P_0(x)$ ne sont pas tous réduits à des constantes. Pour cela vous devez trouver une première forme solution, les autres formes solutions seront ensuite déduites par la méthode de variation des paramètres pour la solution homogène.

18.3. Problème avec conditions initiales

Un **problème avec conditions initiales** consiste en une équation différentielle homogène ou non-homogène d'ordre n et de n conditions initiales comme suit :

$$\begin{cases} y^{(n)}+P_{n-1}(x).y^{(n-1)}+...+P_i(x).y^{(i)}+...+P_1(x).y^{(1)}+P_0(x).y^{(0)}=r(x) \\ y_g^{(0)}(0)=K_0 \\ . \\ ...=... \\ . \\ y_g^{(n-1)}(0)=K_{n-1} \end{cases}$$

THÉORÈME : EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Si les fonctions $P_{n-1}(x),...,P_0(x)$ sont toutes continues sur un intervalle ouvert I, alors il existe au moins une solution non-nulle qui est la solution générale $y_g(x)$. Si de plus le problème possède n conditions initiales, alors il existe un solution unique $y_p(x)$ sur cet intervalle I.

DÉMONSTRATION :

Pour prouver l'existence, comme pour les équations du second ordre, il faut se référer au livre « Ordinary Differential Equations » de E.L. Ince, Dover, 1956.

Pour prouver l'unicité, se référer à l'annexe du chapitre 13.

EXEMPLE : L'ÉQUATION D'EULER-CAUCHY D'ORDRE 3

Soit à résoudre le problème avec conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} x^3y^{(3)}-3x^2y^{(2)}+6x.y^{(1)}-6y^{(0)}=0 \\ y_g^{(0)}(1)=2 \\ y_g^{(1)}(1)=1 \\ y_g^{(2)}(1)=-4 \end{cases}$$

sur un intervalle contenant $x=1$.

SOLUTION :

1) Trouver la solution générale de l'équation homogène :

On commence par poser $y = x^m$. De sorte qu'après dérivation successives et substitutions dans l'équation :

$$\begin{cases} y^{(0)} = x^m \\ y^{(1)} = mx^{m-1} \\ y^{(2)} = m(m-1)x^{m-2} \\ y^{(3)} = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \end{cases}$$

$$x^3 m(m-1)(m-2)x^{m-3} - 3x^2 m(m-1)x^{m-2} + 6x.mx^{m-1} - 6x^m = 0 .$$

soit en mettant x^m en facteur :

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0 .$$

Les racines pour m sont :

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \\ m_3 = 3 \end{cases}$$

de sorte que le solution générale s'écrit :

$$\boxed{y_h(x) = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3}$$

2) Trouver la solution particulière :

$$\begin{cases} y_h^{(0)}(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \\ y_h^{(1)}(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 \\ y_h^{(2)}(x) = 2c_2 + 6c_3 x \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} y_h^{(0)}(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ y_h^{(1)}(1) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ y_h^{(2)}(1) = 2c_2 + 6c_3 = -4 \end{cases}$$

c'est un système de trois équations à trois inconnues c_1, c_2, c_3. On peut résoudre ce système d'équations grâce à la méthode de Cramer et on trouve que :

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

d'où la solution particulière (qui est unique) :

$$\boxed{y_p(x) = 2x^1 + x^2 - x^3}$$

18.4. Indépendance linéaire des formes solutions et Wronskien

THÉORÈME :

Si toutes les fonctions $P_{n-1}(x),...,P_0(x)$ sont toutes continues sur un intervalle ouvert I, alors les n formes solutions sont toutes linéairement indépendantes si le Wronskien formé par ces solutions est non-nul.

Inversement si le Wronskien est nul en 1 point x_0 sur cet intervalle I, il est nul sur tout l'intervalle, et les fonctions solutions $y_1,......,y_n$ sont linéairement dépendants.

DÉMONSTRATION :

Soit à prouver que si : $k_1 y_1 + ... + k_n y_n = 0$, et que les fonctions $y_1,......,y_n$ sont toutes linéairement indépendantes, alors on doit nécessairement trouver que les $k_1,......,k_n$ sont tous nuls. Pour cela dérivons successivement cette équation :

$$\begin{cases} k_1 y_1 + ... + k_n y_n = 0 \\ k_1 y'_1 + ... + k_n y'_n = 0 \\ .... = 0 \\ k_1 y_1^{(n-1)} + ... + k_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

nous avons donc un système de n équations à n inconnues qui sont $k_1,......,k_n$. Pour le résoudre nous pouvons appliquer la méthode de Cramer en formant le déterminant qui n'est autre le Wronskien :

$$\Delta = W(x) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & y_i^{(0)} & . & y_n^{(0)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & . & y_i^{(n-1)} & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ . \\ j \\ . \\ n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad . \quad & i & \quad . \quad & n \end{matrix} \end{array}$$

Donc si ce déterminant (Wronskien) est non-nul il est possible de trouver un ensemble de valeurs unique pour $k_1,......,k_n$, qui si on effectue le calcul , nous amène à trouver qu'ils ont tous nuls comme suit :

$$k_i = \frac{W_i(x)}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & 0 & . & y_n^{(0)} \\ . & . & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . & . \\ . & . & 0 & . & . \\ y_1^{(n-1)} & . & 0 & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & y_i^{(0)} & . & y_n^{(0)} \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(k)} & . & y_i^{(k)} & . & y_n^{(k)}. \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & . & y_i^{(n-1)} & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = 0$$

18.5. Existence d'une solution générale :

THÉORÈME :

Si les fonctions $P_{n-1}(x),...,P_0(x)$ sont toutes continues sur un intervalle ouvert I, alors il existe une solution générale $y_g(x)$ qui représente toutes les solutions.

DÉMONSTRATION :

On peut choisir un point x_0 telle que les conditions initiales forment la matrice identité pour le Wonskien :

$$\begin{array}{cc} W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1^{(0)}(x_0)=1 & 0 & y_i^{(0)}(x_0)=0 & 0 & y_n^{(0)}(x_0)=0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0 & 0 & y_i^{(n-1)} & 0 & y_n^{(n-1)}(x_0)=1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ . \\ j \\ . \\ n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad\quad 1 & \quad\quad . & \quad\quad i & \quad\quad . & \quad\quad n \end{matrix} & \end{array}$$

Comme le Wronskien est non-nul, ces fonctions forment une base de solutions. Avec des constantes arbitraires $c_1,......c_n$, $y_g(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_iy_i + ... + c_ny_n$ représente toutes les solutions.

THÉORÈME : UNICITÉ DE CETTE SOLUTION GÉNÉRALE

La forme de la solution générale est unique :

DÉMONSTRATION :

Même démonstration que dans le chapitre 13. On suppose que l'on a une solution $Y(x)$ qui en x_0 donnent les conditions initiales. On démontre qu'en fin de compte $y_g(x)$ conduit à une solution particulière $y^*(x)$ avec les même conditions initiales. De par le théorème d'unicité de la solution particulière, si $y^*(x)$ et $Y(x)$ sont identique au point x_0, il sont identiques sur tout l'intervalle I. dOnc on pa ut démonter que $y_g(x)$ conduit à $Y(x)$. Donc $y_g(x)$ est bien la solution générale.

EXEMPLE : LES POUTRES FLEXIBLES

À faire un peu plus tard.

18.6. Récapitulation de la méthode :

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre n :

$$\boxed{y^{(n)}+P_{n-1}(x).\,y^{(n-1)}+\ldots+P_i(x).y^{(i)}+\ldots+P_1(x).y^{(1)}+P_0(x).y^{(0)}=r(x)}$$

D'abord résoudre l'équation homogène associé :

SOLUTION HOMOGÈNE :

$$y^{(n)}+P_{n-1}(x).y^{(n-1)}+\ldots\ldots+P_1(x).y^{(1)}+P_0(x).y^{(0)}=0$$

la solution homogène s'écrira :

$$y_h=C_1y_1+\ldots\ldots+C_ny_n$$

SOLUTION SINGULIÈRE :

(appliquer la méthode de variation des paramètres qui est plus générale lorsque les coefficients $P_{n-1}(x),\ldots,P_0(x)$ sont non-constants)

$$y^{(n)}+P_{n-1}(x).\,y^{(n-1)}+\ldots+P_i(x).y^{(i)}+\ldots+P_1(x).y^{(1)}+P_0(x).y^{(0)}=r(x)$$

soit :

$$y_s(x)=y_1(x)\int\frac{W_1(x).r(x).dx}{W(x)}+\ldots+y_n(x)\int\frac{W_n(x).r(x).dx}{W(x)}$$

avec :

$$W(x)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & y_k^{(0)} & . & y_n^{(0)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & . & y_k^{(n-1)} & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\begin{array}{l} 0 \\ . \\ j \\ . \\ n-1 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & . & k & . & n \end{array}\end{array} \quad \text{et} \quad W_i(x)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & 0 & . & y_n^{(0)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0. & . & . \\ y_1^{(n-1)} & . & 1 & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\begin{array}{l} 0 \\ . \\ j \\ . \\ n-1 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & . & i & . & n \end{array}\end{array}$$

SOLUTION GÉNÉRALE :

$$y_g=y_h+y_s$$

SOLUTION PARTICULIÈRE :

Puisqu'il s'agit d'une équation d'ordre n , il faut fixer n conditions initiales :

$$\begin{cases} y_g^{(0)}(0)=k_0 \\ . \\ ...=... \\ . \\ y_g^{(n-1)}(0)=k_{n-1} \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer les $C_1,......,C_n$ coefficients dans la solution générale. On obtient alors la solution particulière :

$$\boxed{y_p(x)=C_1y_1(x)+....+C_ny_n(x)+y_1(x)\int\frac{W_1(x).r(x).dx}{W(x)}+...+y_n(x)\int\frac{W_n(x).r(x).dx}{W(x)}}$$

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes :

1. $y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y = x^3$
2. $y^{(4)} - y = 30e^{2x} - x^2$
3. $(D^4 - D)y = \sinh x$
4. $(D^4 + 4)y = 0$
5. $x^3 y^{(3)} + 3x^2 y^{(2)} + 2xy^{(1)} = x$

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales :

6. $\begin{cases} (D^3 - D)y = \cosh x \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -1.25 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} (x^3 D^2 + x^2 D^2 - 2xD - 1)y = x^3 \ln x \\ y(1) = \dfrac{25}{32} \\ y'(1) = \dfrac{47}{32} \\ y''(1) = \dfrac{42}{32} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = \dfrac{12}{x} \\ y(1) = 2.5 \\ y'(1) = 6.5 \\ y''(1) = 5 \end{cases}$

Utiliser Maple V pour vérifier les résultats de tous ces exercices.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Soit l'équation homogène d'ordre 3 à coefficients non-constants suivant :

$$y^{(3)} + P_2(x).y^{(2)} + P_1(x).y^{(1)} + P_0(x).y^{(0)} = 0$$

Et soit $y_1(x)$ une première forme solution à cette équation. En appliquant la méthode de variation des paramètres, montrer qu'alors la deuxième forme solution $y_2(x)$ sera déterminée en résolvant l'équation d'ordre réduite suivante (ou $u = \int U$ est l'inconnue) :

$$U''\left(y_1^{(0)}\right) + U'.\left(3.y_1^{(1)} + 2P_2(x).y_1^{(0)}\right) + U.\left(3y_1^{(2)} + 2P_1(x).y_1^{(1)} + P_0(x).y_1^{(0)}\right) = 0$$

19. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE N>2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'écrit de façon générale :

$$\boxed{y^{(n)} + P_{n-1}.y^{(n-1)} + ...+ P_1.y^{(1)} + P_0.y^{(0)} = r(x) \quad avec \quad P_i = cte}$$

Dans ce cas plus simple, pour la résoudre, nous pouvons emprunter les mêmes techniques déployées pour les équations du second ordre à coefficients constants. C'est à dire commencer par résoudre l'équation homogène associée pour trouver la solution dite homogène ou complémentaire.

SOLUTION HOMOGÈNE :

Équation homogène associée :

$$y^{(n)} + P_{n-1}.y^{(n-1)} + ...+ P_1.y^{(1)} + P_0.y^{(0)} = 0$$

Équation caractéristique : on pose $y = e^{\lambda x}$, ce qui donne :

$$\lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + ...+ P_1\lambda + P_o = 0$$

Les différents cas pour chacune des n racines :

$$\begin{array}{rcl}
\text{si } \lambda_i \text{ est une racine simple} & \rightarrow & y_i = e^{\ i.x} \\
\text{si } \lambda_i \text{ est une racine double} & \rightarrow & y_i = e^{\ i.x},\ y_{i+1} = x.e^{\ i.x} \\
\text{si } \lambda_i \text{ est une racine triple} & \rightarrow & y_i = e^{\ i.x},\ y_{i+1} = x.e^{\ i.x},\ \ y_{i+2} = x^2.e^{\ i.x} \\
 & .... &
\end{array}$$

$$\text{si} \begin{cases} \lambda_i = \alpha + j\beta & \text{sont des racines complexes simples} \\ \lambda_{i+1} = \alpha - j\beta & \text{(les complexes vont par paires)} \end{cases} \rightarrow \quad y_i = e^{\alpha.x}\cos\beta x,\ y_{i+1} = e^{\alpha.x}\sin\beta x$$

$$\text{si} \begin{cases} \lambda_i = \alpha + j\beta \\ \lambda_{i+1} = \alpha - j\beta \end{cases} \text{sont des racines complexes doubles} \rightarrow \quad \begin{array}{c} y_i = e^{\alpha.x}\cos\beta x, \quad y_{i+1} = e^{\alpha.x}\sin\beta x \\ y_{i+2} = x.e^{\alpha.x}\cos\beta x,\ y_{i+3} = x.e^{\alpha.x}\sin\beta x \end{array}$$

$$....$$

d'où l'expression de la solution homogène :

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + ...+ C_n e^{\lambda_n x}$$

SOLUTION SINGULIÈRE

Étant donné que les coefficients sont tous des constantes, on peut appliquer, en outre la méthode de variation des paramètres, la méthode des coefficients indéterminés que nous allons démontrer ici. Il suffit d'utiliser le même tableau déjà cité au chapitre 15 (méthode des coefficients indéterminés) pour les équations du second ordre:

si $r(x)$ est de la forme	**utiliser la forme suivante pour $y_s(x)$**
Exponentielle : $k e^{\gamma . x}$	Exponentielle : $K e^{\gamma . x}$
Polynômiale : $k x^n$	Polynômiale du même ordre : $K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + ... + K_1 x^1 + K_0 x^0$
Polynômiale modulée: $k e^{\gamma x} x^n$	Polynômiale du même ordre modulée: $e^{\gamma x} . \left(K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + ... + K_1 x^1 + K_0 x^0 \right)$
Sinusoïdale : $k \cos \omega x$ $k \sin \omega x$	Sinusoïdale : $K_c \cos \omega x + K_s \sin \omega x$
Ondulation modulée : $k e^{\gamma x} \cos \omega x$ $k e^{\gamma x} \sin \omega x$	Ondulation modulée : $e^{\gamma x} (K_c \cos \omega x + K_s \sin \omega x)$

Dans cette méthode, il faut vérifier si $y_s(x)$ n'existait pas déjà dans comme forme $y_i(x)$ dans la solution homogène. Auquel cas il faut multiplier $y_s(x)$ par x^m pour lever la dégénérescence d'ordre m (existence d'une racine $m - tuple$ dans l'équation caractéristique)

SOLUTION GÉNÉRALE :

$$y_g = y_h + y_s$$

SOLUTION PARTICULIÈRE :

Introduire les n conditions initiales pour fixer les $C_1, ..., C_n$ dans la **solution générale** ($C_1, ..., C_n$) qui proviennent de la forme de la solution homogène. Faites bien attention à ne pas introduire les condition initiales dans la solution homogène uniquement ce qui donnerait une expression **inexacte** de la solution particulière).

EXEMPLE

Soit à trouver la solution générale de : $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y^{(0)} = e^x x^{1/2}$

SOLUTION :

1) Trouver la solution homogène :

Équation caractéristique associée : $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda^1 - \lambda^0 = 0$

Mise en facteurs : $(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0$. Pour les besoins de simplification dans ce cours, les racines ont toujours des valeurs simples, alors qu'en ingénierie réelle, il faudra passer cette équation à un calculateur qui trouvera des racines avec tout plein de chiffres après la virgule (i.e. : $\lambda_i = 1,23456789 \times 10^{-2,345678}$).

Donc, les racines sont ici : $\begin{cases}\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1\end{cases}$. C'est à dire qu'il s'agit d'une racine triple.

Aussi la forme de la solution homogène s'écrira :

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x.e^x + C_3 x^2.e^x$$

2) Trouver la solution singulière (par une méthode appropriée):

a) Essayons d'abord par la méthode des coefficients indéterminés :

$$r(x) = x^{1/2} e^x \quad \to \quad y_s(x) = K x^{1/2} e^x \ ?$$
$$ou \quad \to \quad y_s(x) = K_{1/2} x^{1/2} e^x + K_{-1/2} x^{-1/2} e^x + K_{-3/2} x^{-3/2} e^x + \ldots ?$$

On voit que dès qu'on sort du tableau préconisé, il est difficile de trouver le nombre des coefficients à déterminer ainsi que la nature des éléments constitutifs de $y_s(x)$ par cette méthode.

b) Essayons alors par la méthode plus générale de variation des paramètres :

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x) r(x).dx}{W(x)} + y_2(x)\int \frac{W_2(x) r(x).dx}{W(x)} + y_3(x)\int \frac{W_3(x) r(x).dx}{W(x)}$$

avec :

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2 e^x \\ e^x & (1+x)e^x & x(2+x)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{bmatrix} +(1+x)(x^2+4x+2) + x^2(2+x) + x^2(2+x) \\ -x^2(1+x) - x(2+x)^2 - x(x^2+4x+2) \end{bmatrix}$$
$$= 2e^{3x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x & x^2 e^x \\ 0 & (1+x)e^x & x(2+x)e^x \\ 1 & (2+x)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}\left[x^2(2+x) - x^2(1+x)\right] = x^2 e^{2x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 & x^2 e^x \\ e^x & 0 & x(2+x)e^x \\ e^x & 1 & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}\left[x^2 - x(2+x)\right] = -2xe^{2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (1+x)e^x & 0 \\ e^x & (2+x)e^x & 1 \end{vmatrix} = e^{2x}\left[(1+x) - x\right] = e^{2x}$$

donc :

$$y_p(x) = e^x \int \frac{x^2 e^{2x}\left(x^{1/2} e^x\right)dx}{2e^{3x}} + xe^x \int \frac{-2x e^{2x}.\left(x^{1/2} e^x\right)dx}{2e^{3x}} + x^2 e^x \int \frac{e^{2x}\left(x^{1/2} e^x\right)dx}{2e^{3x}}$$

$$= e^x \int \frac{x^{5/2}dx}{2} + xe^x \int \frac{-x^{3/2}dx}{1} + x^2 e^x \int \frac{x^{1/2}dx}{2}$$

$$= e^x \left[\frac{1}{7}x^{7/2} - x.\frac{2}{3}x^{5/2} + x^2.x^{3/2}\right] = \frac{8}{105}x^{7/2}e^x$$

3) Et la solution générale est :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x\left[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{8}{105}x^{7/2}\right]$$

REMARQUE :

La solution de l'exemple ci-dessus se résolve de façon moins fastidieuse en utilisant un calculateur symbolique comme MAPLE_V (c'est ce que j'ai fait pour confirmer mes calculs effectués à la mitaine).

EXERCICE GUIDE

Soit à trouver la solution générale de : $y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y^{(0)} = e^x$

SOLUTION GUIDE:

1) Trouver la solution homogène :

Écrire l'équation homogène : $\boxed{y^{(3)} + (\qquad\qquad)y^{(2)} + (\qquad\qquad)y^{(1)} + (\qquad\qquad)y^{(0)} = 0}$

Écrire l'équation caractéristique associée : $\boxed{\lambda^3 + (\qquad\qquad)\lambda^2 + (\qquad\qquad)\lambda^1 + (\qquad\qquad)\lambda^0 = 0}$

Mettre en facteurs : $\boxed{(\lambda- \text{ .... })(\lambda- \text{ .... })(\lambda- \text{ .... }) = 0}$

Et les racines sont alors : $\boxed{\begin{cases}\lambda_1 = \\ \lambda_2 = \\ \lambda_3 = \end{cases}}$

D'où l'expression de la solution homogène

$y_h(x) =$

2) Trouver la solution singulière:

a) Essayer par la méthode des coefficients indéterminés (lorsque c'est possible):

si $r(x) =$
alors $y_s(x) =$

Vérifier ensuite si la forme n'existe pas déjà dans la solution homogène et multiplier par le facteur de dégénérescence correspondant.

Oui, racine triple dans solution homogène alors : $y_s(x) = x^3.(\qquad)$
Oui, racine double dans solution homogène, alors : $y_s(x) = x^2.(\qquad)$
Oui, racine simple dans solution homogène, alors : $y_s(x) = x^1.(\qquad)$
Non, pas de dégénérescence : $y_s(x) = x^0.(\qquad)$

Dériver successivement $y_s(x)$:

$$\begin{cases} y_s(x) = \\ y_s'(x) = \\ y_s''(x) = \\ y_s'''(x) = \end{cases}$$

Réintroduire dans l'équation avec second membre :

$$\begin{aligned} &(\qquad) \\ &+(\qquad).(\qquad) \\ &+(\qquad).(\qquad) \\ &+(\qquad).(\qquad) = (\qquad) \end{aligned}$$

Mettre en facteurs de puissance :

$$
\begin{array}{l}
\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \\
+\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right).\left(\qquad\qquad \right) \\
+\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right).\left(\qquad\qquad \right) \\
+\left(\qquad\qquad\qquad \right).\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \left(\qquad\qquad\qquad \right)
\end{array}
$$

Identifier les coefficients :

$$
\begin{cases}
\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \\
\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \\
\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\qquad\qquad = \\
\qquad\qquad = \\
\qquad\qquad = \\
\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Exprimer la solution singulière :

$$y_s(x) =$$

b) Essayer par la méthode plus générale de variation des paramètres :

$$y_s(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x).r(x).dx}{W(x)} + y_2(x)\int \frac{W_2(x).r(x).dx}{W(x)} + y_3(x)\int \frac{W_3(x).r(x).dx}{W(x)}$$

avec :

$$W(x) = \begin{vmatrix} (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \end{vmatrix} =$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} (0) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \\ (0) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \\ (1) & (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \end{vmatrix} =$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} (\qquad\qquad) & (0) & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (0) & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (1) & (\qquad\qquad) \end{vmatrix} =$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (0) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (0) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) & (1) \end{vmatrix} =$$

donc :

$y_s(x) =$

4) Et la solution générale est :

$y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) =$

Comparer avec le résultat suivant :

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_2 . e^x + C_3 x . e^x + \frac{1}{4} x^2 e^x - \frac{1}{4} x . e^x + \frac{1}{8} e^x$$

Est-ce que tout est correct? Pas correct? Qui a fait des erreurs?

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes :

1. $y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y = x^3$

2. $y^{(4)} - y = 30e^{2x} - x^2$

3. $(D^4 - D)y = \sinh x$

4. $(D^4 + 4)y = 0$

5. $x^3 y^{(3)} + 3x^2 y^{(2)} + 2xy^{(1)} = x$

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales :

6. $\begin{cases} (D^3 - D)y = \cosh x \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -1.25 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x^3 D^2 + x^2 D^2 - 2xD - 1)y = x^3 \ln x \\ y(1) = \dfrac{25}{32} \\ y'(1) = \dfrac{47}{32} \\ y''(1) = \dfrac{42}{32} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = \dfrac{12}{x} \\ y(1) = 2.5 \\ y'(1) = 6.5 \\ y''(1) = 5 \end{cases}$

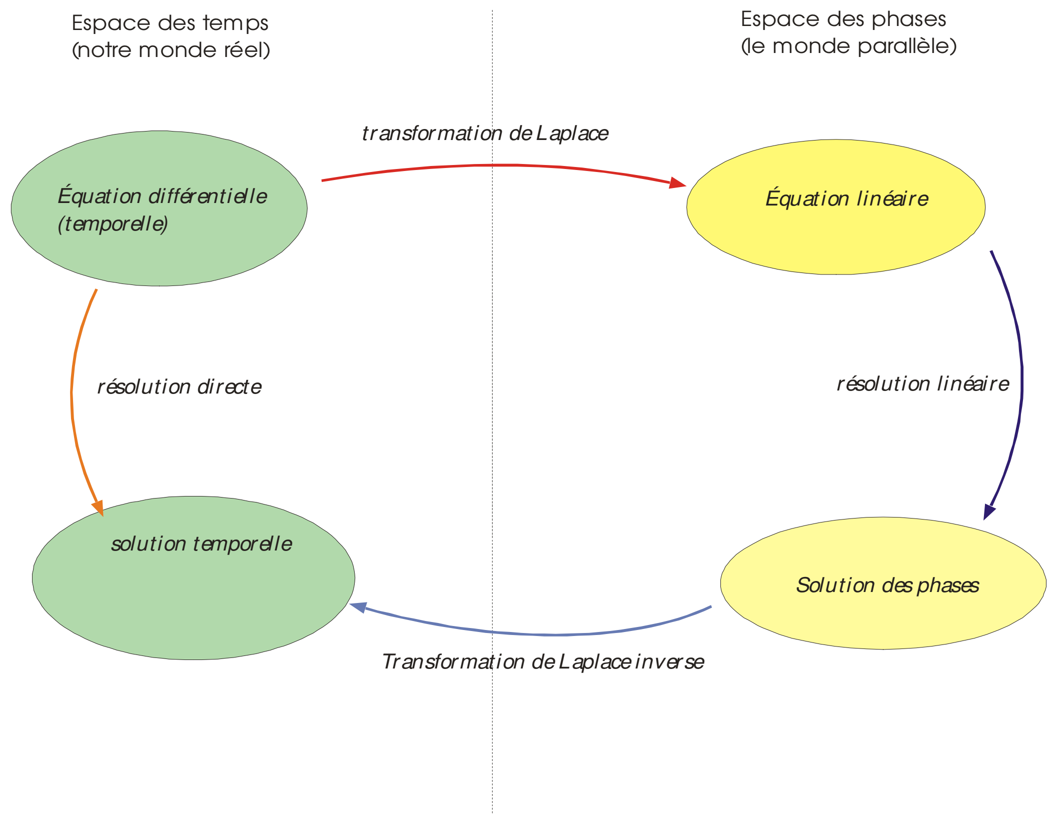
Utiliser Maple V pour vérifier les résultats de tous ces exercices.

20. LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

20.1. Introduction :

La transformée de Laplace permet de transformer une équation différentielle en une équation linéaire où disparaissent les formes dérivées. On se rappellera qu'en posant la solution sous la forme d'une exponentielle, on avait transmuté le problème vers une équation ordinaire dite équation caractéristique. Eh bien! la transformée de Laplace est la généralisation de cette idée.

Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace des temps (notre monde temporel), vers un espace dit des phases (un monde parallèle), de le résoudre dans cet espace, puis de transposer de nouveau la solution vers le monde réel (l'espace temporel de nouveau). Voici un diagramme de cette transposition :



20.2. Définition :

La transformée de Laplace est une application, qui à une fonction $f(t)$ de l'espace des temps, est associée une fonction $F(s)$ de l'espace des phases telle que :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt}$$

$$\mathcal{L}$$

Transformée de Laplace — Espace vectoriel des fonctions du temps $\longmapsto$ Espace vectoriel des fonctions de phase

$$f(t) \longmapsto F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}.f(t).dt$$

La transformée inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$ sera précisée plus tard.

20.3. Transformée de quelques fonctions usuelles :

EXEMPLE : CALCUL DE LA TRANSFORMÉE D'UN ÉCHELON UNITÉ

$$\begin{cases} f(t)=0 \quad , \quad \forall t<0 \\ f(t)=1 \quad , \quad \forall t\geq 0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}.1.dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{1}{s}$$

EXEMPLE : CALCUL DE LA TRANSFORMÉE D'UNE RAMPE EXPONENTIELLE

$$\begin{cases} f(t)=0 \quad , \quad \forall t<0 \\ f(t)=e^{at} \quad , \quad \forall t\geq 0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{at}.dt=\left[\frac{-1}{(s-a)}.e^{-(s-a).t}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{1}{(s-a)}$$

THÉORÈME :

La transformée de Laplace est une application (transformation) linéaire. C'est à dire qu'elle satisfait à la condition :

$$\mathcal{L}\left[a.f(t)+b.g(t)\right]=a.\mathcal{L}\left[f(t)\right]+b.\mathcal{L}\left[g(t)\right]$$

DÉMONSTRATION :

À cause de la propriété de sommation des intégrales et la multiplication d'une intégrale par un scalaire :

$$\mathcal{L}\left[a.f(t)+b.g(t)\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st}\left[a.f(t)+b.g(t)\right]dt=a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t).dt+b\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t).dt=a.\mathcal{L}\left[f(t)\right]+b.\mathcal{L}\left[g(t)\right]$$

20.4. Utilité du théorème de linéarité :

Cette propriété de linéarisation nous permet de trouver plus facilement la transformée de Laplace d'une fonction en la décomposant comme une combinaison de transformées de fonctions plus simples.

EXEMPLE : APPLICATION DU THÉORÈME DE LINÉARITÉ

Soit à trouver la transformée de : $f(t)=\cosh at$

SOLUTION :

on pose : $f(t)=\cosh at=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

et alors : $\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{2}.\mathrm{L}\left[e^{at}\right]+\dfrac{1}{2}\mathrm{L}\left[e^{-at}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(s-a)}+\dfrac{1}{(s+a)}\right]=\dfrac{s}{s^2-a^2}$

donc : $\mathrm{L}\left[\cosh at\right]=\dfrac{s}{s^2-a^2}$

EXEMPLE : APPLICATION DU THÉORÈME DE LINÉARITÉ

Soit à trouver la transformée de : $f(t)=\cos\omega t$

SOLUTION :

on pose : $f(t)=\cos\omega t=\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$

et alors : $\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{2}.\mathrm{L}\left[e^{i\omega t}\right]+\dfrac{1}{2}\mathrm{L}\left[e^{-i\omega t}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(s-i\omega)}+\dfrac{1}{(s+i\omega)}\right]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

donc : $\mathrm{L}\left[\cos\omega t\right]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

EXEMPLE : RECHERCHE DE LA TRANSFORMÉE INVERSE (PAR IDENTIFICATION)

Soit à chercher la transformée inverse de la fonction des phases : $F(s)=\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$

c'est à dire qu'on recherche: $f(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$

SOLUTION :

Pour cela, nous devons décomposer la fonction des phases en éléments simples (technique des fractions partielles que nous verrons un autre chapitre) :

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{(a-b)}\left[\frac{1}{(s-a)}-\frac{1}{(s-b)}\right]$$

et alors :

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{(a-b)}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)}\right]-\frac{1}{(a-b)}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-b)}\right]$$

soit donc :

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{(a-b)}\left[e^{-at}-e^{-bt}\right]$$

EXEMPLE : TRANSFORMÉE INVERSE D'UNE DÉRIVÉE (PAR IDENTIFICATION)

Soit la fonction suivante de l'espace des phases : $F(s)=\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$. Il s'agit de trouver la fonction temporelle $f'(t)$ associée par transformée de Laplace inverse $f'(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]$.

SOLUTION :

Pour cela, nous allons décomposer la fonction des phases en éléments simples (fractions partielles) :

$$F(s)=\frac{s}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{(a-b)}\left[\frac{a}{(s-a)}-\frac{b}{(s-b)}\right]$$

et alors :

$$f'(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{(a-b)}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s-a)}\right]-\frac{1}{(a-b)}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s-b)}\right]$$

soit donc :

$$f'(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{(a-b)}\left[a.e^{-at}-b.e^{-bt}\right]$$

Or on se rend compte que c'est la dérivée de la fonction $f(t)$ de l'exemple précédent. Ce n'est donc pas pour rien que nous lui avions donné un nom prédestiné au départ $f'(t)$.

EXEMPLE : TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE FONCTION DÉRIVÉE

Voici un autre exemple de propriété de dérivation. Soit à trouver la transformée de Laplace de la fonction temporelle suivante : $f(t)=t^{n+1}$

SOLUTION :

Appliquons la définition de la transformée de Laplace :

$$F(s)=\mathrm{L}\left[t^{n+1}\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st}.t^{n+1}.dt$$

et en procédant par intégration par parties :

$$\mathrm{L}\left[t^{n+1}\right]=\underbrace{\left[\frac{-e^{-st}}{s}.t^{n+1}\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0}+\frac{(n+1)}{s}.\int_0^{+\infty} e^{-st}.t^{n}.dt$$

et on obtient ainsi la formule de récurrence jusqu'à ce que l'exposant de t soit ramené à 1 :

$$\mathrm{L}\left[t^{n+1}\right]=\frac{(n+1)}{s}.\mathrm{L}\left[t^{n}\right]=\frac{(n+1)}{s}.\frac{(n)}{s}.\mathrm{L}\left[t^{n-1}\right]=...=\frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

REMARQUE :

Si on regarde la transformée de Laplace pour les cas particuliers $f(t)=t^2$, $f(t)=t$,et $f(t)=1$, on s'aperçoit que ce sont les cas de dérivées successives de $f(t)=t^{n+1}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\left[t^{n+1}\right]&=\frac{(n+1)!}{s^{n+2}}\\
...&=...\\
\mathrm{L}\left[t^{k}\right]&=\mathrm{L}\left[\frac{(k)!}{(n+1-k)!}.\frac{d^k(t^{n+1})}{dt^k}\right]=\frac{(k)!}{s^{k+1}}\\
...&=...\\
\mathrm{L}\left[t^{2}\right]&=\frac{2!}{s^3}\\
\mathrm{L}\left[t\right]&=\frac{1!}{s^2}\\
\mathrm{L}\left[1\right]&=\frac{0!}{s^1}
\end{aligned}$$

Voici alors la table des transformées des fonctions de base :

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1!}{s^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^n, \quad n \in N$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a, \quad a \in R$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ *
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

$$\mathrm{L}\left[t^a\right]=.\int_0^{+\infty} e^{-st}.t^a.dt=\int_0^{+\infty} e^{-x}.\left(\frac{x}{s}\right)^a.\frac{dx}{s} \quad , \quad \text{si on pose } x=st$$

alors : $\mathrm{L}\left[t^a\right]=.\dfrac{1}{s^{a+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^a.dx=\dfrac{1}{s^{a+1}}.\Gamma(a+1)$, puisque par définition : $\Gamma(a+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^a dx$

REMARQUE :

$$\mathrm{L}\left[e^{i\omega t}\right]=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{1}{s-i\omega}.\frac{(s+i\omega)}{(s+i\omega)}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

en effet on peut trouver ce résultat autrement :

$$\mathrm{L}\left[e^{i\omega t}\right]=\mathrm{L}\left[\cos\omega t+i\sin\omega t\right]=\mathrm{L}\left[\cos\omega t\right]+i.\mathrm{L}\left[\sin\omega t\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

20.5. Conditions d'existence d'une transformée de Laplace :

THÉORÈME D'EXISTENCE :

Si une fonction $f(t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle ouvert d'intégration $]0,+\infty[$ et est bornée sur cet intervalle :

$$|f(t)| \le Me^{\gamma t}$$

---

* La fonction Gamma : $\Gamma(a+1)$ est la fonction factorielle généralisée lorsque a n'est pas seulement un entier ($a \in R$): $\Gamma(a)=(a)(a-1)(a-2)\ldots(a-k)\ldots$, tant que $(a-k)>0$.

C'est à dire qu'on puisse trouver M et γ, telles que $|f(t)|$ soit inférieur ou égal en tout temps à $Me^{\gamma t}$ sur cet intervalle $t \in]0,+\infty[$, alors la transformée existe pour toute phase $s > \gamma$.

DÉMONSTRATION :

Lorsque $f(t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle d'intégration $]0,+\infty[$, alors $e^{-st} f(t)$ est intégrable. De plus l'intégrale $\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} f(t) dt$ est définie si elle converge. Pour cela nous appliquons le principe de convergence absolue. C'est à dire que si :

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt \quad \text{converge}, \quad \Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{converge}$$

puisque l'inégalité de Minkowski (inégalité du triangle), dans notre cas donne :

$$0 \le \left|\mathcal{L}\left[f(t)\right]\right| = \left|\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} f(t) dt\right| \le \int_{t=0}^{t=+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt$$

Or :

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| .dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} . \left|f(t)\right| .dt \quad , \qquad \text{puisque} \qquad e^{-st} \ge 0, \forall t, \forall s.$$

Il reste à déterminer dans quelles conditions l'intégrale $\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} \left|f(t)\right| dt$ converge. Pour cela il faut imposer à $|f(t)|$ de croître moins vite que e^{-st} ne décroît lorsque $t \to +\infty$. Donc si on choisit $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$, $\forall t$ alors :

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| .dt \le \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} M.e^{\gamma t} dt = \frac{M}{s-\gamma}, \text{ à la condition que l'on ait } s > \gamma$$

Dès lors on a :

$$0 \le \left|\mathcal{L}\left[f(t)\right]\right| \le \frac{M}{s-\gamma}$$

Donc qu'on peut trouver cette intégrale qui est la transformée de Laplace pour $f(t)$.

20.6. Application du théorème d'existence :

Il s'agit de déterminer, avant même de la calculer, si un réplica d'une fonction temporelle va exister dans l'espace des phases.

EXEMPLE :

Déterminer si la transformée de Laplace existe pour : $f(t) = \cosh t$

SOLUTION :

On constate que : $\cosh t \leq 1.e^{t}, \quad \forall t \in \left]0, +\infty\right[$

or : $\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st}.1.e^{t}\,dt$ converge du moment que $s > 1$

donc: $\mathcal{L}\left[\cosh t\right]$ existe à condition que ce soit dans une zone des phases où $s > 1$.

EXEMPLE :

Déterminer si la transformée de Laplace pour $f(t) = t^{n}$ existe.

SOLUTION :

On constate que: $t^{n} < n!e^{t}, \quad \forall t \in \left]0, +\infty\right[$

Or: $\int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} n!e^{t}\,dt$ converge du moment que $s > 1$

Donc: $\mathcal{L}\left[t^{n}\right]$ existe à condition que ce soit dans une zone des phases $s > 1$.

EXEMPLE :

Déterminer si la transformée de Laplace pour $f(t) = e^{t^{2}}$ existe.

SOLUTION :

Clairement $e^{t^{2}} > Me^{\gamma t}, \forall t \in \left]0, +\infty\right[$, donc il n'y aura pas convergence de l'intégrale de définition. Donc on ne peut déterminer la transformée de Laplace pour une telle fonction.

REMARQUE IMPORTANTE :

Le théorème ainsi annoncé applique une condition suffisante et non nécessaire pour l'existence d'une transformée de Laplace.

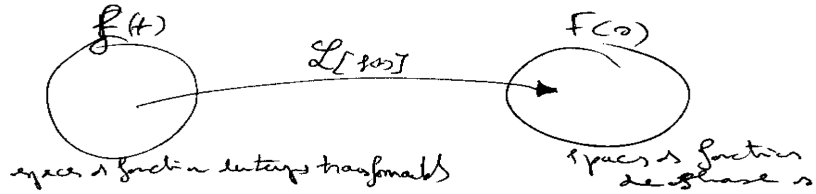
En effet, s'il y a convergence absolue, il y a convergence tout court. Mais même s'il n'y avait pas de convergence absolue, il se peut qu'il y ait quand même convergence de l'intégrale.

Par exemple, la fonction $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ n'est pas bornée, puisque $t^{-\frac{1}{2}} \underset{t \to 0}{\to} \infty$, mais sa transformée existe quand même :

$$\mathcal{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.t^{-\frac{1}{2}}.dt = \frac{1}{\sqrt{s}}.\int_0^{+\infty} e^{-xt}.x^{-\frac{1}{2}}.dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

20.7. Unicité de la transformation :

La transformée de Laplace est une application linéaire. De plus en algèbre linéaire, on montre que si la transformée pour certaines fonctions dites de base est déterminée, alors l'application linéaire est unique : c'est la transformée de Laplace.



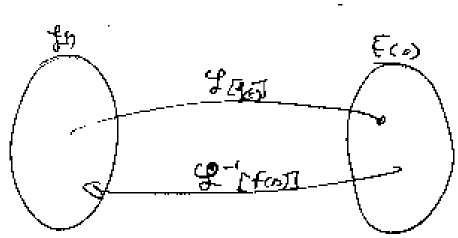
L'unicité de la transformée indique ici que la transformation de Laplace est une application **isomorphique** (**homomorphisme** bijectif) d'un espace temporel à un autre espace dit des phases. (On rappelle en passant qu'un **endomorphisme** est une application linéaire d'un espace dans un même espace. On rappelle aussi qu'un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif).

C'est à dire que si :

injectif: $f(t) \neq g(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[f(t)\right] \neq \mathcal{L}\left[g(t)\right]$

surjectif: $\forall F(s) \in$ Espace des Phases, $\exists f(t) \in$ Espace des Temps, $\ni \mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$

Puisque la transformation de Laplace est bijective, alors la transformation inverse existe aussi.



En fait on peut montrer que la transformation de fonctions qui diffèrent en certains points isolés du temps donne la même transformée, et par conséquent l'application n'est pas réellement injective.

Cependant, du point de vue pratique (point de vue non strictement mathématique), on peut considérer ces fonctions temporelles comme physiquement équivalentes et la correspondance est alors unique entre la fonction temporelle et son replica dans l'espace des phases.

EXERCICES

Trouver la transformée de Laplace $F(s)$ des fonctions $f(t)$ suivantes :

1. $f(t) = at + b$

2. $f(t) = (at + b)^2$

3. $f(t) = \sin(\omega t - \theta)$

4. $f(t) = \sin^2(\omega t - \theta)$

5. $f(t) = \sinh^2(at)$

Identifier la fonction $f(t)$ dont la transformée $F(s)$ est:

6. $F(s) = \dfrac{4}{s^4}$

7. $F(s) = \dfrac{4}{s+2}$

8. $F(s) = \dfrac{4}{s^2+2}$

9. $F(s) = \dfrac{s-4}{s^2+4}$

10. $F(s) = \dfrac{s-4}{s^2-16}$

11. $F(s) = \dfrac{1}{s(s-4)}$

12. $F(s) = \dfrac{3}{(s-2)(s+4)}$

21. TRANSFORMATION DE LAPLACE POUR LES DÉRIVÉES ET LES INTÉGRALES DE FONCTION. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous déterminons le lien entre la transformée d'une fonction avec la transformation d'une fonction dérivée ou intégrale.

THÉORÈME :

Si $f(t)$ est transformable par Laplace (i.e. $f(t)$ continue sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ et bornée $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ sur cet intervalle) et si $f'(t)$ est continue par morceaux sur le même intervalle $\left]0,+\infty\right[$, alors la transformée de Laplace de la dérivée existe et vaut alors :

$$\boxed{\mathrm{L}\left[f'(t)\right] = s.\mathrm{L}\left[f(t)\right] - f(0)\,, \quad pour \quad s > \gamma}$$

DÉMONSTRATION :

Supposons que $f'(t)$ est continue sur $t \in \left]0,+\infty\right[$, alors par intégration par parties :

$$\mathrm{L}\left[f'(t)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st}.f'(t).dt = \left[e^{-st}.f(t)\right]_{t=0}^{t=+\infty} + s.\mathrm{L}\left[f(t)\right]$$

d'autre part, puisqu'on a pris la précaution pour que la fonction $f(t)$ soit bornée (i.e. $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$) et que $\gamma < s$, alors :

$$\underset{t\to+\infty}{e^{\gamma t}.f(t) \to 0}\,,$$

de sorte que :

$$\left[e^{-st}.f(t)\right]_{t=0}^{t=+\infty} = 0 - e^{0}.f(0) = -f(0)\,.\ \text{CQFD}$$

THÉORÈME :

Si $f(t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ et bornée $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ sur cet intervalle, et si $f'(t)$ est continue par morceaux sur le même intervalle $\left]0,+\infty\right[$, alors La transformée de Laplace de la dérivée existe et s'écrit alors :

$$\boxed{\mathrm{L}\left[f'(t)\right] = s.\mathrm{L}\left[f(t)\right] - f(0) - \sum_i e^{-st_i}\left[f(t_i^-) - f(t_i^+)\right], \quad pour \quad s > \gamma}$$

et où les t_i représentent les points de discontinuité de $f(t)$.

21.1. Application du théorème à la dérivée n-ème :

Pour la dérivée seconde, on aura :

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\left[f''(t)\right] &= s.\mathrm{L}\left[f'(t)\right] - f'(0)\\ &= s.\left[s.\mathrm{L}\left[f(t)\right] - f(0)\right] - f'(0)\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\mathrm{L}\left[f''(t)\right]=s^2.\mathrm{L}\left[f(t)\right]-sf(0)-f'(0)$$

de même on aura pour la dérivée troisième:

$$\mathrm{L}\left[f'''(t)\right]=s^3.\mathrm{L}\left[f(t)\right]-s^2f(0)-s.f'(0)-f''(0)$$

THÉORÈME :

La transformée de Laplace de la dérivée n$^{\text{ème}}$ d'une fonction $f(t)$ où toutes les dérivées successives sont continues sur $t\in\left]0,+\infty\right[$ et satisfaisant chacune la condition : $\left|f^{(i)}(t)\right|\leq Me^{\gamma t},\quad pour\quad s>\gamma$, et que $f^{(n)}(t)$ soit continue par morceaux sur le même intervalle $t\in\left]0,+\infty\right[$, alors la transformée de $f^{(n)}(t)$ existe et vaut :

$$\mathrm{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n.\mathrm{L}\left[f(t)\right]-\sum_{k=0}^{k=n-1}s^kf^{(n-1-k)}(0)$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la transformée de Laplace de $f(t)=t^2$, non pas par intégration directe, mais par la propriété de la transformée des dérivées successives.

SOLUTION :

Dérivons $f(t)$ jusqu'à atteindre une constante, il suffit donc d'atteindre la dérivée seconde. Et nous avons alors :

$$\begin{array}{lcl} f(t)=t^2 & \rightarrow & f(0)=0 \\ f'(t)=2t & \rightarrow & f'(0)=0 \\ f''(t)=2 & & \end{array}$$

et en utilisant la formule :

$$\mathrm{L}\left[f''(t)\right]=s^2.\mathrm{L}\left[f(t)\right]-sf(0)-f'(0)$$

nous trouvons :

$$\mathrm{L}\left[2\right]=s^2.\mathrm{L}\left[t^2\right]-s.0-0$$

C'est-à-dire :

$$\mathrm{L}\left[2\right]=2.\mathrm{L}\left[1\right]=\frac{2}{s}=s^2.\mathrm{L}\left[t^2\right]-s.0-0$$

d'où on déduit pour $\mathrm{L}\left[t^2\right]$:

$$s^2.\mathrm{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{s}\qquad\Rightarrow\qquad\mathrm{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3}.$$

C'est ce qu'on avait déjà obtenu par intégration directe.

EXEMPLE :

Trouver le transformée de Laplace de $f(t)=\cos\omega t$ et de $f(t)=\sin\omega t$ par application de la formule de transformée de la dérivée seconde.

SOLUTION :

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos \omega t & &\rightarrow & f(0) &= 1 \\ f'(t) &= -\omega \sin \omega t & &\rightarrow & f'(0) &= 0 \\ f''(t) &= -\omega^2 \cos \omega t & & & & \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\mathcal{L}\left[-\omega^2 \cos \omega t\right] = s^2.\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] - s.1 - 0$$

Soit :

$$-\omega^2.\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] = s^2.\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] - s.1 - 0$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

L'étudiant est invité à faire la même démarche pour : $f(t) = \sin \omega t$.

EXEMPLE :

Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = \sin^2 t$ par le procédé de la transformée des dérivées successives.

SOLUTION :

Ici nous pouvons nous limiter à la dérivée première puisque nous connaissons la transformée de cette dérivée première.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2 t & &\rightarrow & f(0) &= 0 \\ f'(t) &= 2.\cos t.\sin t = \sin 2t & & & & \end{aligned}$$

et en utilisant la formule :

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s.\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0)$$

on arrive à :

$$\mathcal{L}\left[\sin 2t\right] = s.\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right] - 0$$

or :

$$\mathcal{L}\left[\sin 2t\right] = \frac{2}{s^2 + (2)^2}$$

d'où la déduction pour $\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right]$:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}}$$

EXEMPLE :

Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = t \sin \omega t$ par le procédé de la transformée des dérivées successives.

SOLUTION :

Ici, nous devons aller au moins jusqu'à la dérivée seconde afin de retrouver un terme cyclique.

$$\begin{aligned} f(t) &= t.\sin\omega t & &\to f(0)=0 \\ f'(t) &= \sin\omega t + \omega t.\cos\omega t & &\to f'(0)=0 \\ f''(t) &= -\omega^2 t.\sin\omega t + 2\omega.\cos\omega t & & \end{aligned}$$

et en utilisant la formule :

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2.\mathcal{L}\left[f(t)\right] - sf(0) - f'(0)$$

on arrive à :

$$\mathcal{L}\left[-\omega^2 t.\sin\omega t + 2\omega.\cos\omega t\right] = s^2.\mathcal{L}\left[t.\sin\omega t\right] - s.0 - 0$$

or :

$$\mathcal{L}\left[-\omega^2 t.\sin\omega t + 2\omega.\cos\omega t\right] = -\omega^2\mathcal{L}\left[t.\sin\omega t\right] + 2\omega.\mathcal{L}\left[.\cos\omega t\right] = -\omega^2\mathcal{L}\left[t.\sin\omega t\right] + \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

d'où la déduction pour $\mathcal{L}\left[t.\sin\omega t\right]$:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t.\sin\omega t\right] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}}$$

21.2. Application aux équations différentielles avec conditions initiales :

Soit à résoudre l'équation linéaire du 2ème ordre suivant, à coefficients constants, et avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y''+a.y'+b.y = r(t) \\ y(0) = K_0 \\ y'(0) = K_1 \end{cases}$$

$r(t)$ est l'entrée forcée et $y(t)$ est la sortie que l'on veut observer.

1ère étape : Appliquer la transformée de Laplace aux 2 membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\left[y''+a.y'+b.y\right] = \mathcal{L}\left[r(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[y''\right] + a.\mathcal{L}\left[y'\right] + b.\mathcal{L}\left[y\right] = \mathcal{L}\left[r(t)\right]$$

$$\left(s^2.Y(s) - s.y(0) - y'(0)\right) + a.\left(s.Y(s) - y(0)\right) + b.Y(s) = R(s)$$

C'est à dire qu'on obtient l'équation subsidiaire:

$$\left(s^2+a.s+b\right).Y(s) = R(s) + (s+a).y(0) + (1).y'(0)$$

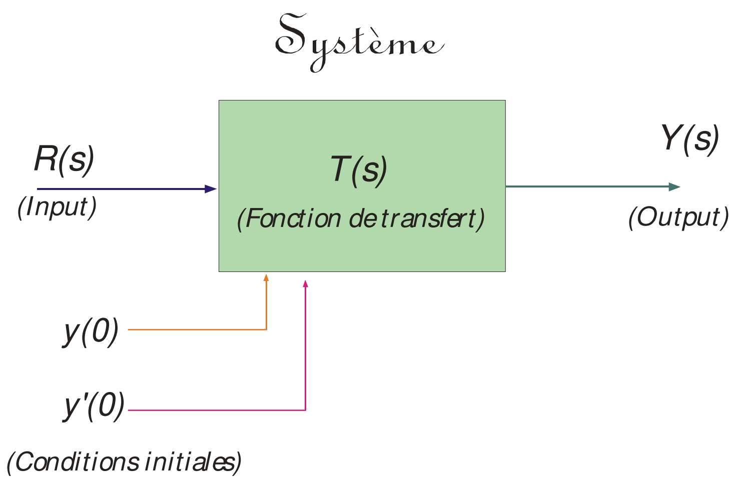
On peut observer que cette équation contient la partie de l'équation caractéristique, mais est beaucoup plus complète puisqu'elle contient aussi le second membre et les conditions initiales. De sorte que la transformé inverse donne directement la solution particulière dans le domaine temporel.

2ème étape : Former la fonction de transfert qui est le rapport de la fonction de phase de la sortie sur la fonction de phase de l'entrée :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+a.s+b}\left(\frac{R(s)+(s+a).y(0)+y'(0)}{R(s)}\right)$$

Ou pour l'expression de la sortie dans l'espace des phases :

$$Y(s)=\frac{1}{\underbrace{s^2+a.s+b}_{\text{Polynôme caractéristique}}}\big(R(s)+(s+a)y(0)+y'(0)\big)=\underbrace{\left(\frac{R(s)}{s^2+a.s+b}\right)}_{\text{Solution particulière}}+\underbrace{\left(\frac{(s+a).y(0)+y'(0)}{s^2+a.s+b}\right)}_{\text{Solution homogène}}$$



$\left(s^2+a.s+b\right)$ est appelée le polynôme caractéristique du système. Il ne dépend que de la configuration physique du circuit, et non pas du type entrée et ni de l'endroit où on prend la fonction de sortie. Ceci est en rapport direct avec l'équation caractéristique $\left(\lambda^2+a.\lambda+b=0\right)$.

3ème étape : Une fois qu'on a $Y(s)$, il s'agit de passer à $y(t)$ par $\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$, généralement en utilisant la table des transformées.

EXEMPLE PRATIQUE:

Soit à résoudre le problème à conditions initiales suivant par la méthode de la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} y''-y=t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

SOLUTION :

1ère étape : passer le l'espace des temps à l'espace des phases.

$$\left(s^2.Y(s)-s.y(0)-y'(0)\right)-Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

soit :

$$\left(s^2-1\right).Y(s)=\frac{1}{s^2}+s.y(0)+y'(0)=\frac{1}{s^2}+s+1$$

2ème étape : Obtenir la solution dans l'espace des phases.

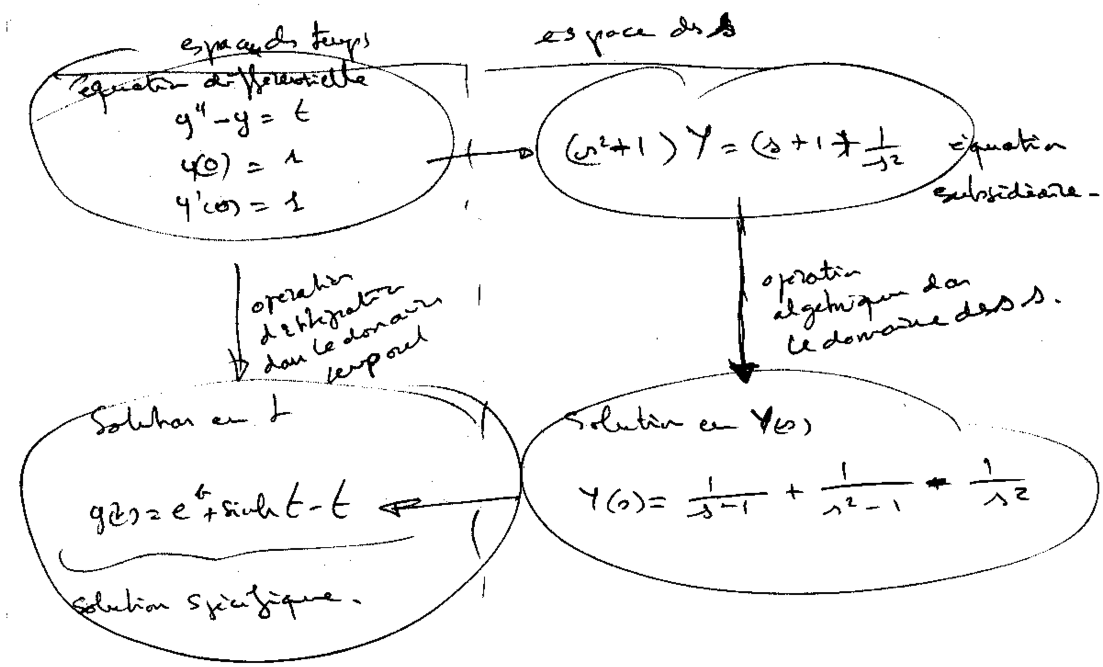
$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2-1\right)}\left[\frac{1}{s^2}+s+1\right]=\frac{(s+1)}{(s^2-1)}+\frac{1}{s^2(s^2-1)}=\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{(s^2-1)}-\frac{1}{s^2}$$

3ème étape : Obtenir la solution temporelle par la transformée inverse (il s'agit de regarder la correspondance dans la table et non pas calculer car nous n'avons pas encore donné la définition de la transformé de Laplace inverse).

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$y(t) = e^{+t} + \sinh t - t$$

Voici un résumé de la méthode de résolution des équation différentielles par la transformée de Laplace :



21.3. Avantage de la transformée de Laplace :

On obtient directement la solution particulière sans passer par les étapes intermédiaires de recherche de y_h, y_p, y_g et y_s

EXEMPLE :

Trouver la solution de l'équation avec conditions initiales suivante :

$$\begin{cases} y'' + y = 2t \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} \\ y'(\frac{\pi}{4}) = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

SOLUTION :

1ère et 2ème étapes combinées pour aller plus rapidement:

$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\left[\frac{2}{s^2}+s.y(0)+y'(0)\right]=\frac{2}{s^2(s^2+1)}+y(0).\frac{s}{(s^2+1)}+y'(0).\frac{1}{(s^2+1)}$$

3ème étape : Obtenir la solution temporelle.

$$y(t)=\mathsf{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+1)}\right]+y(0).\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right]+y'(0).\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

$$y(t)=\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2}\right]-\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+1)}\right]+y(0).\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right]+y'(0).\mathsf{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

$$y(t)=2t-2\sin t+y(0).\cos t+y'(0).\sin t$$

Il s'agit maintenant de connaître les valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ à partir des conditions en un point différent du temps. Nous avons donc un système d'équation à 2 inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} y(t)=2t-2\sin t+y(0).\cos t+y'(0).\sin t \\ y'(t)=2-2\cos t-y(0).\sin t+y'(0).\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(\frac{\pi}{4})=2\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{4}+y(0).\cos\frac{\pi}{4}+y'(0).\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \\ y'(\frac{\pi}{4})=2-2\cos\frac{\pi}{4}-y(0).\sin\frac{\pi}{4}+y'(0).\cos\frac{\pi}{4}=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 2\frac{\sqrt{2}}{2}=+y(0).\frac{\sqrt{2}}{2}+y'(0).\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0=-y(0).\frac{\sqrt{2}}{2}+y'(0).\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

D'où la solution particulière :

$$\boxed{y(t)=2t-\sin t+\cos t}$$

21.4. Transformée de Laplace d'une primitive de fonction:

THÉORÈME :

Si $f(t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ et bornée $\left|f(t)\right|\le Me^{\gamma t}$ sur cet intervalle et si $g(t)=\int_0^t f(\tau).d\tau$ est la primitive de $f(t)$, alors la transformée de Laplace de la primitive existe et elle vaut :

$$\mathsf{L}\left[g(t)\right]=\frac{1}{s}\mathsf{L}\left[f(t)\right] \quad , \qquad pour \qquad s>\gamma$$

DÉMONSTRATION :

soit $g(t)=\int_0^t f(\tau).d\tau$, la primitive de $f(t)$. Si $f(t)$ est continue par morceaux, sauf en quelques points isolés de discontinuité. Alors $g(t)$ est continue, et par l'inégalité de Minkowski, on aura :

$$\left[g(t)\right]=\left|\int_0^t f(\tau).d\tau\right|\le\int_0^t\left|f(\tau)\right|.d\tau\le M\int_0^t e^{\gamma\tau}d\tau$$

Donc :

$$\left[g(t)\right] \le \frac{M}{\gamma}\left[e^{\gamma t}-1\right] \le \frac{M}{\gamma}\left[e^{\gamma t}\right], \quad pour \quad \gamma > 0$$

On vient de montrer que la primitive $g(t) = \int_0^t f(\tau).d\tau$ est bornée par la même quantité que la fonction $f(t)$ et que donc le transformée de la primitive existe. Maintenant pour connaître sa valeur, il suffit de se servir du résultat sur la transformée de la dérivée :

$$\mathrm{L}\left[f(t)\right] = s.\mathrm{L}\left[g(t)\right] - g(0)$$

Il est clair ici que $g(0) = \int_0^0 f(\tau).d\tau = 0$, d'où l'expression de la transformée de la primitive :

$$\mathrm{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{s}.\mathrm{L}\left[f(t)\right] \quad , \quad pour \quad s > \gamma$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = g(t) = \int_0^t f(\tau).d\tau$$

EXEMPLE :

Soit à trouver l'expression temporelle de la fonction suivante en utilisant la propriété de la transformée de la primitive:

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right]$$

SOLUTION :

On sait déjà que : $\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right] = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$

Et on cherche donc : $\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}.\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right] = \int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau.d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

EXEMPLE :

Trouver l'expression temporelle de la fonction suivante en utilisant la propriété de la transformée de la primitive:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

SOLUTION :

$$\mathrm{f(t)} = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}.\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right] = \int_0^t\left(\int_0^\xi \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau.d\tau\right).d\xi = \int_0^t \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega\xi).d\xi = \frac{1}{\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

EXERCICES

Trouver la transformée de Laplace à partir de la propriété de la transformée d'une dérivée n-ième, et des relations trigonométriques, des fonctions suivantes :

1. $f(t)=\cos^2 \omega t$

2. $f(t)=\cosh^2 at$

3. $f(t)=\sinh^2 at$

4. $f(t)=te^{at}$

Toujours à l'aide de la propriété de transformée de la dérivée n-ième, montrer que :

5. $\mathrm{L}\left[t\cos\omega t\right]=\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

6. $\mathrm{L}\left[t\sin\omega t\right]=\dfrac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

7. $\mathrm{L}\left[t\cosh at\right]=\dfrac{s^2+\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$

8. $\mathrm{L}\left[t\cosh at\right]=\dfrac{2s\omega}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$

À l'aide de la propriété de transformée de la primitive, trouver la fonction temporelle des fonctions de phase suivantes:

9. $F(s)=\dfrac{3}{s(s+1)}$

10. $F(s)=\dfrac{4}{s\left(s^2+1\right)}$

11. $F(s)=\dfrac{4}{s\left(s^2-1\right)}$

12. $F(s)=\dfrac{4}{s(s+3)}$

13. $F(s)=\dfrac{4s+1}{s^2\left(s^2+1\right)}$

14. $F(s)=\dfrac{4s+1}{s^4\left(s^2+\pi^2\right)}$

Résoudre les équations différentielles avec condition initiales suivantes par la propriété de transformée de Laplace des dérivées :

15. $\begin{cases}(D^2-D-2)y=3e^{2x}\\ y(0)=-1\\ y'(0)=1\end{cases}$

16. $\begin{cases} (D^2 - D - 2)\,y = 10\sin x \\ y(\dfrac{\pi}{2}) = -3 \\ y'(\pi) = -3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = -6\sin 2x - 18\cos 2x \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

QUESTIONS ET PROBLÈMES

1. Dans ce chapitre on parle surtout de résolution d'une équation différentielle avec second membre et conditions initiales. Est-il possible de trouver la solution d'une équation différentielle homogène par la méthode de la transformation de Laplace?

2. Soit une équation non-homogène suivante : $y''(t) + a.y'(t) + b.y(t) = r(t)$, où on n'indique pas les conditions initiales. Expliquer alors où se trouvent les solutions homogène et particulière dans l'espace des phases.

3. Démontrer que si: $F(s) = \dfrac{s}{s-a}$ alors on a : $f(t) = \delta(t) + ae^{at}$ par la propriété de transformée de la dérivée d'un fonction temporelle. Vérifier ensuite qu'on obtient un résultat identique en décomposant $F(s)$ en partie entière + partie fractionnaire (i.e. $F(s) = \dfrac{s}{s-a} = 1 + \dfrac{a}{s-a}$). On indique que : $\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t)$.

22. TRANSLATION DANS L'ESPACE DES TEMPS ET TRANSLATION DANS L'ESPACE DES PHASES

Dans ce chapitre, nous déterminons le lien entre la transformée d'une fonction avec la transformation d'une fonction décalée dans le temps. D'autre part nous déterminerons le lien entre une transformation de Laplace inverse d'une fonction des phases avec celle de son homologue décalée dans l'espace des phases.

22.1. Translation dans l'espace des phases

THÉORÈME :

Si la transformée d'une fonction $f(t)$ est : $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$, pour $s > \gamma$, alors la transformée d'une fonction $e^{at} f(t)$ est :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a), \quad \text{pour} \quad (s-a) > \gamma}$$

DÉMONSTRATION :

Par définition de la transformée de Laplace : $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st}.f(t).dt$

Et donc : $\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st}.\left(e^{at}.f(t)\right).dt$.

Ensuite il suffit de faire le changement de variable $s \to s' = (s-a)$, de sorte qu'à présent :

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st}.\left(e^{at}.f(t)\right).dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-s't}.f(t).dt = F(s') = F(s-a) .$$

CERTAINS RÉSULTATS :

Voici alors certains résultats de base à connaître. L'étudiant est invité à les démontrer pour se faire la main, en se servant du théorème ci-dessus.

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}.t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

EXEMPLE : APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit à résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales suivantes : $\begin{cases} y''+2y'+5y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$

SOLUTION :

1ère et 2ème étapes pour aller vite : Obtention directe de la solution dans l'espace des phases.

$$Y(s)=\frac{1}{\underbrace{s^2+2s+5}_{\text{Focntion caractéristique}}}\left(\underbrace{0}_{R(s)}+\underbrace{2(s+a)}_{y(0)(s+a)}\underbrace{-4}_{y'(0)}\right)=\frac{2s}{s^2+2s+5}$$

3ème étape : Obtenir la solution temporelle par la transformée inverse. Pour cela nous allons remanier l'expression de $Y(s)$ afin de mettre en évidence la translation dans l'espace des phases :

$$Y(s)=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}-\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

et alors :

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right]-\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]=2e^{-t}\cos 2t-e^{-t}\sin 2t$$

EXEMPLE : APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit à trouver la solution de l'équation avec conditions initiales suivante : $\begin{cases} y''-2y'+y=e^t+t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

SOLUTION :

1ère et 2ème étapes combinées pour aller plus rapidement:

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-2s+1}\left[\underbrace{\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{s^2}}_{R(s)}+\underbrace{1.(s-2)}_{y(0)(s+a)}+\underbrace{0}_{y'(0)}\right]=\frac{1}{(s-1)(s-1)^2}+\frac{1}{s^2(s-1)^2}+\frac{(s-2)}{(s-1)^2}$$

Attention, ce a provient de $y''+a.y'+b.y=0$ et non du décalage dans le temps.

3ème étape : Obtenir la solution temporelle.

Mise en évidence de la translation dans les phases.

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2(s-1)^2}+\frac{(s-1)}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^2}$$

et alors :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] - \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] \\
&= e^t.\frac{t^2}{2} + \int_0^t\left(\int_0^{t'} e^{\xi}\xi.d\xi\right)dt' + 1.e^t - t.e^t \\
&= e^t.\frac{t^2}{2} + (t.e^t - 2e^t + t + 2) + 1.e^t - t.e^t
\end{aligned}$$

D'où la solution particulière :

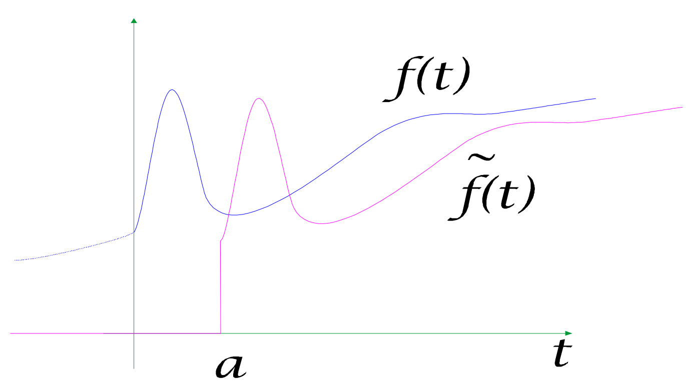
$$\boxed{y(t) = \frac{t^2e^t}{2} - e^t + t + 2}$$

22.2. Translation dans l'espace des temps

THÉORÈME:

Si $f(t)$ a une transformée de Laplace $F(s)$ pour $s > \gamma$, alors la fonction translatée dans le temps suivant : $\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0\,, & \forall t < a \\ f(t-a)\,, & \forall t \geq a \end{cases}$, avec $a \in \left]\,0, +\infty\right[$, a pour transformée :

$$\boxed{\mathrm{L}[\tilde{f}(t)] = e^{-as}F(s), \quad \text{pour tout } s > \gamma}$$

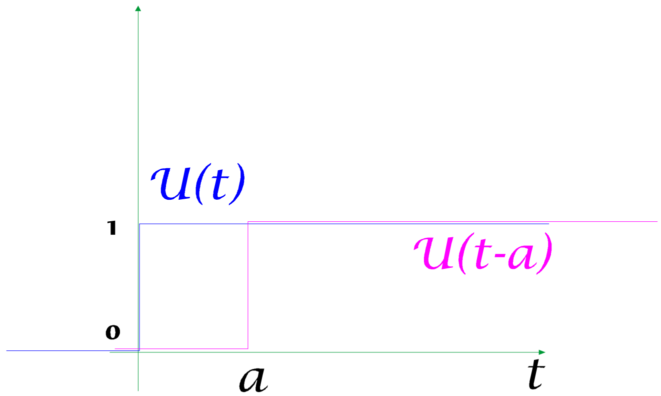


22.3. Définitions :

Avant de démontrer ce théorème, nous allons introduire la fonction échelon décalée (qu'on appelle aussi fonction de Heaviside):

$$U(t-a) = \begin{cases} 0\,, & \forall t < a \\ 1\,, & \forall t \geq a \end{cases}, \quad \text{avec} \quad a \in \left]\,0, +\infty\right[,$$

avec en particulier : $U(t) = U(t-0) = \begin{cases} 0\,, & \forall t < 0 \\ 1\,, & \forall t \geq 0 \end{cases}$.



Donc pour passer de $f(t)$ à $\tilde{f}(t)$, nous devons rigoureusement écrire :

$$\tilde{f}(t) = f(t-a).U(t-a) = \begin{cases} 0\,, & \forall t < a \\ f(t-a)\,, & \forall t \geq a \end{cases}, \quad \text{avec} \quad a \in \left]\, 0, +\infty \right[$$

et le théorème se lira ainsi :

Si on a : $\mathrm{L}\left[f(t)\right] = F(s)$, pour $s > \gamma$,

Alors on aura : $\mathrm{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$, pour $s > \gamma$.

C'est à dire aussi autrement : $\mathrm{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = f(t-a).U(t-a)$

DÉMONSTRATION :

Sachant que :

$$\mathrm{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-st} f(t-a).U(t-a).dt = \int_{t=0}^{t=a} e^{-st} f(t-a).U(t-a).dt + \int_{t=a}^{t=+\infty} e^{-s\tau} f(t-a).U(t-a).dt$$

$$= 0 + \int_{t=a}^{t=+\infty} e^{-st} f(t-a).dt$$

et en faisant le changement de variable : $t \quad \rightarrow \begin{cases} \xi = t-a \\ d\xi = dt \end{cases}$, on obtient :

$$\mathrm{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right] = \int_{\xi=0}^{\xi=+\infty} e^{-s(\xi+a)} f(\xi).d\xi = e^{-sa}.\int_{\xi=0}^{\xi=+\infty} e^{-s\xi} f(\xi).d\xi = e^{-sa}.\mathrm{L}\left[f(t)\right]$$

Donc :

$$\mathrm{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right]=e^{-sa}.\mathrm{L}\left[f(t)\right]=e^{-sa}F(s)$$

EXEMPLE :

Soit à calculer la transformée d'une fonction échelon décalée dans le temps :

$$U(t-a)=\begin{cases}0\,, & \forall t<a\\ 1\,, & \forall t\geq a\end{cases},\quad \text{avec}\quad a\in\left]0,+\infty\right[$$

SOLUTION :

On sait déjà que : $\mathrm{L}\left[U(t)\right]\equiv\mathrm{L}\left[1\right]=\dfrac{1}{s}$

Donc : $\mathrm{L}\left[U(t-a)\right]=\dfrac{e^{-sa}}{s}$

Ce que nous pouvons prouver par le calcul direct :

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\left[U(t-a)\right]&=\int_{t=0}^{t=+\infty t}e^{-st}.U(t-a).dt=\int_{t=0}^{t=a}e^{-st}.U(t-a).dt+\int_{t=a}^{t=+\infty t}e^{-s\tau}.U(t-a).dt\\&=0+\int_{t=a}^{t=+\infty t}e^{-st}.1.dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=a}^{t=+\infty}\\&=\frac{e^{-sa}}{s}\end{aligned}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la transformée de Laplace inverse pour : $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s^3}$

SOLUTION :

Le terme exponentiel négatif e^{-3s} dans l'espace des phases indique un retard dans le temps. Calculons d'abord :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]=\frac{t^2}{2!}$$

Donc :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3a}}{s^3}\right]=\frac{(t-3)^2}{2!}.U(t-3)$$

EXEMPLE :

Soit la fonction temporelle définie par : $f(t)=\begin{cases} 2\,, & \text{pour} \quad 0\leq t<\pi \\ 0\,, & \text{pour} \quad \pi\leq t<2\pi \\ \sin t\,, & \text{pour} \quad 2\pi\leq t<+\infty \end{cases}$. Trouver sa transformée de Laplace.

SOLUTION :

Nous devons réécrire la fonction en utilisant la fonction de Heaviside :

$$f(t)=2.U(t)-2U(t-\pi)+U(t-2\pi).\sin(t-2\pi)\ .$$

Dès lors, sa transformée est presque immédiate :

$$F(s)=\frac{2}{s}-\frac{2.e^{-s\pi}}{s}+\frac{e^{-s.2\pi}}{s^2+1}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la transformée de Laplace inverse pour : $F(s)=\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{2e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{4.e^{-2s}}{s}+\dfrac{se^{-s\pi}}{s^2+1}$

SOLUTION :

C'est presque immédiat :

$$f(t)=2t.U(t)-2(t-2).U(t-2)-4.U(t-2)+\cos(t-\pi).U(t-\pi)$$

Que l'on peut définir autrement comme étant :

$$f(t)=\begin{cases} 2t\,, & \text{pour} \quad 0\leq t<2 \\ 0\,, & \text{pour} \quad 2\leq t<\pi \\ -\cos t\,, & \text{pour} \quad \pi\leq t<+\infty \end{cases}$$

EXERCICE GUIDE :

Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales suivantes : $\begin{cases} y''+2y'-3y=e^{2(t-3)}.U(t-1) \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$ grâce aux propriétés de translation dans les phases et translation dans le temps de la transformée de Laplace.

SOLUTION GUIDE :

1ère étape : Transformation vers l'espace des phases de l'équation :

$$\left(s^2+(\qquad\qquad).s+(\qquad\qquad)\right).Y(s)=\ (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

2ème étape : Expression de la solution dans l'espace des phases :

$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+(\qquad\qquad).s+(\qquad\qquad)\right)}.\left(\underbrace{(\qquad\qquad\qquad)}_{R(s)}+\underbrace{(\quad)}_{y(0)}\underbrace{(\qquad\qquad)}_{s+a}+\underbrace{(\quad)}_{y'(0)}\right)$$

3ème étape : Transformation inverse vers l'espace des temps :

mise en évidence des translations dans les phases :

$$Y(s)=$$

Et finalement expression de la solution particulière :

$$y(t)=$$

Comparer avec le résultat suivant :

$$y(t)=$$

EXERCICES

Donner l'expression de la réponse temporelle pour les systèmes dont les équations et conditions initiales sont les suivantes :

1. $$\begin{cases} y''+2y'+5y=\cos 3t.[U(t-1)-U(t-2)] \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y''+6y'+8y=\left[-e^{-3t}+3e^{-5t}\right].U(t-1) \\ y(0)=4 \\ y'(0)=-14 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y''-5y'+2y=4e^{-(t-1)}\left[U(t)-U(t-2)\right]. \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-2 \end{cases}$$

QUESTION ET PROBLÈMES

1. Donner les 2 formules de translation dans le temps et de translation dans les phases.

2. Soit une équation temporelle de la forme $y''+a.y'+b.y=r(t)$. Donnez alors la formule directe de l'expression de la solution dans l'espace les phases et indiquez où se trouve chacun des éléments suivants : fonction caractéristique, solution particulière, solution homogène.

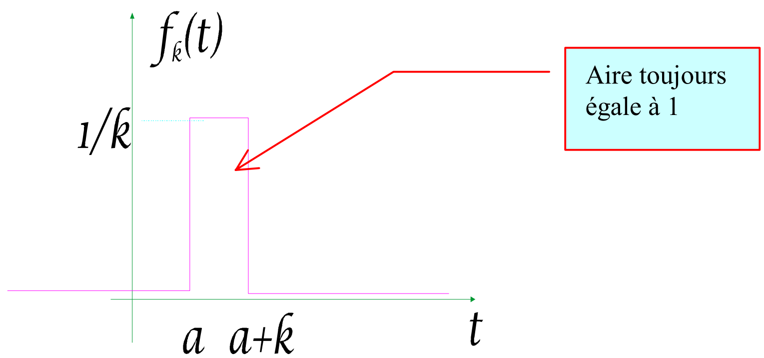
3. Connaissant la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside, indiquer dans lesquels des cas suivants, la formule de translation dans le temps est applicable et expliquer pourquoi: $\begin{cases} \tilde{f}(t)=f(t-a).U(t) \\ \tilde{f}(t)=f(t-a).U(t-a) \\ \tilde{f}(t)=f(t-a).U(t-b) \\ \tilde{f}(t)=f(t-a) \end{cases}$.

23. TRANSFORMÉE DE LAPLACE DE LA FONCTION DE DIRAC[1] (FONCTION DELTA)

Dans ce chapitre, nous voyons la transformée d'une fonction un peu spéciale que l'on retrouve dans l'analyse des systèmes échantillonnés.

23.1. Introduction :

Considérons la fonction en créneau suivante : $f_k(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{pour} \quad t < a \\ \dfrac{1}{k}\,, & \text{pour} \quad a \le \mathrm{t} < a+k\,, \quad \text{avec} \quad a \in \left]\, 0, +\infty \right[\\ 0\,, & \text{pour} \quad t \ge a+k \end{cases}$



Cette fonction a toujours son aire (intégrale) égale à 1.

$$I_k = \int_{t=0}^{t=+\infty t} f_k(t).dt = \int_{t=a}^{t=a+k} \frac{1}{k} dt = 1$$

Et la transformée de Laplace de cette fonction est :

$$\mathfrak{L}\left[f_k(t)\right] = \int_{t=0}^{t=+\infty t} e^{-st} f_k(t).dt = \int_{t=a}^{t=a+k} e^{-st}\frac{1}{k} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-ks}\right]_{t=a}^{t=a+k} = e^{-sa}\left[\frac{1-e^{-ks}}{ks}\right]$$

REMARQUE :

On aurait obtenu le même résultat en notant la fonction $f_k(t)$ par une combinaison des fonctions en échelon retardé comme suit :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left[U(t-a) - U(t-a-k)\right]$$

---

[1] *Paul Dirac (1902-1984) était un physicien anglais né à Bristol. Il fut l'un des créateurs de la physique quantique et reçut conjointement avec Erwin Schrödinger le prix Nobel de physique en 1933.*

De sorte que :

$$\mathcal{L}\left[f_k(t)\right]=\frac{1}{k}\mathcal{L}\left[U(t-a)\right]-\frac{1}{k}\mathcal{L}\left[U(t-a-k)\right]=\frac{1}{k}\frac{e^{-sa}}{s}-\frac{1}{k}\frac{e^{-s(a+k)}}{s}=e^{-sa}\left[\frac{1-e^{-ks}}{ks}\right]$$

23.2. Définition de la fonction Delta (ou de Dirac) :

On introduit alors la fonction delta par :

$$\delta(t-a)=\lim_{k\to 0}f_k(t)$$

23.3. Transformée de Laplace de la fonction Delta :

La transformée de Laplace de la fonction delta (ou de Dirac) est alors :

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=\lim_{k\to 0}\left(e^{-sa}\left[\frac{1-e^{-ks}}{ks}\right]\right)=e^{-as}$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation suivante dont l'entrée forcée est une impulsion (fonction de Dirac) :

$$\begin{cases} y''+3y'+2y=\delta(t-\alpha) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

SOLUTION :

1ère et 2ème étapes combinées pour aller plus rapidement:

$$Y(s)=\frac{1}{\underbrace{\left(s^2+3s+2\right)}_{\text{fonction caractéristique}}}\left[\underbrace{e^{-\alpha.s}}_{\text{R(s)}}+\underbrace{0.(s+3)}_{\text{y(0).(s+a)}}+\underbrace{0}_{\text{y'(0)}}\right]=\frac{e^{-\alpha.s}}{(s+1)(s+2)}$$

3ème étape : Simplification des termes et transformée inverse pour obtenir la solution temporelle.

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha s}}{(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha s}}{(s+1)}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha s}}{(s+2)}\right]$$

$$y(t)=e^{-(t-\alpha)}.U(t-\alpha)-e^{-2(t-\alpha)}.U(t-\alpha)$$

EXERCICES

Observons l'effet des perturbations causées par des entrées impulsionnelles dans certains circuits électriques et autres systèmes du second ordre. Soit donc des circuits qui sont modélisés par les équations ci-dessous et qui subissent un entrée forcée de type impulsionnel (fonction de Dirac). Donner l'expression de la fonction de sortie :

1. $\begin{cases} y''+2y'+5y=\delta(t-1) \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y''+yy=\delta(t-\pi) \\ y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y''+5y'+6y=U(t-1)+\delta(t-2) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

QUESTIONS ET PROBLÈMES

Donner l'expression temporelle de la différence de potentiel (d.d.p.) dans le condensateur lorsqu'un circuit RLC série est soumis à une impulsion de Dirac à l'instant t=2. Pour cela faites vos calculs en prenant pour valeur des composants : R=1 ohms, C=1 farad et L=1 Henry. Les condition initiales sont y(0)=0 et y'(0)=0.

24. DÉRIVÉE ET INTÉGRALE D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Dans un précédent chapitre (21), nous avons traité la transformée d'une fonction dérivée et d'une fonction intégrale de l'espace des temps. C'est-à-dire que nous avions cherché la correspondance dans l'espace des phases pour chacune de ces fonctions, de sa dérivée et de son intégrale. Cette fois-ci nous regardons l'impact dans le domaine temporel lorsqu'on prend une dérivée ou la primitive d'une fonction de l'espaces des phases.

24.1. *Dérivée d'une transformée*

THÉORÈME :

Si $f(t)$ satisfait à la condition pour l'existence d'une transformée de Laplace (i.e. $f(t)$ continue par morceaux sur $\left]0,+\infty\right[$ et $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ sur ce domaine, alors la **dérivée de la transformée** (ne pas confondre avec **transformée de la dérivée**!) est :

$$\boxed{F'(s) = -\int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st}.t.f(t).dt}$$

DÉMONSTRATION :

Voir dans le livre de Courant & John : «Introduction to Calculus Analysis» vol. 1 et 2. Wiley-Interssciences, 1974.

Il s'ensuit qu'on peut réécrire ce résultat sous une forme plus pratique d'utilisation :

$$\boxed{\mathrm{L}^{-1}\left[F'(s)\right] = -t.f(t)}$$

ce qui nous permet de comparer avec le résultat pour la transformée de la dérivée d'une fonction temporelle :

$$\mathrm{L}\left[f'(t)\right] = s.F(s) - f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}^{-1}\left[s.F(s) - f(0)\right] = f'(t)$$

Il y a alors une anti-réciprocité, puisque si on prend la dérivée dans le temps, il suffit de multiplier par s dans les phrases. Mais lorsqu'on prend la dérivée dans les phases, il faut multiplier par $-t$ dans le temps.

CERTAINS RÉSULTATS:

Voici un tableau de correspondance pour quelques résultats de dérivées dans l'espace des phases avec leurs homologues dans l'espace des temps:

$f(t)$	$F(s)$
$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t.\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{t}{2\omega}(\sin\omega t)$	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t.\cos\omega t$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

EXEMPLE :

Soit à montrer qu'on obtient les résultats du tableau ci-dessus en utilisant la propriété de la transformée de la dérivée dans l'espace des phases.

SOLUTION :

Commençons par poser : $\mathrm{L}\left[\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=F(s)$

et par le théorème de dérivée de la transformée:

$$\mathrm{L}\left[t.\sin\omega t\right]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}=-F'(s)$$

Ce qui nous permet d'obtenir aisément le résultat du deuxième élément de tableau :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega}(t.\sin\omega t)$$

On procède de même pour $\mathrm{L}\left[t.\cos\omega t\right]$:

$$\mathrm{L}\left[t.\cos\omega t\right]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}=-F'(s)$$

or on sait que : $\mathrm{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]=\frac{1}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

soit alors en combinant :

$$\mathrm{L}\left[t.\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]=\frac{(s^2-\omega^2)+(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}=\frac{2s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Ce qui nous permet d'obtenir le résultat du troisième élément du tableau :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega}\left[\omega t.\cos\omega t+\sin\omega t\right]$$

et maintenant en combinant différemment :

$$\mathrm{L}\left[-t.\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]=\frac{-(s^2-\omega^2)+(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}=\frac{2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

d'où le résultat du premier élément du tableau :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega^3}\left[-\omega t.\cos\omega t+\sin\omega t\right]$$

24.2. Utilisation de la dérivée dans l'espace des phases pour résoudre les équations différentielles à coefficients non-constants :

Si les coefficients $p(t)$ et $q(t)$ ne se résument pas à des constantes a et b respectivement dans l'équation différentielles : $y''+p(t)y'+q(t)y=r(t)$, mais représentent des polynômes d'ordre limité, alors il est possible de résoudre cette équation de façon analytique en utilisant les propriétés qui suivent :

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left[t.f(t)\right]=-F'(s)\\&\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s.F(s)-f(0)\\&\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2.F(s)-s.f(0)-f'(0)\end{aligned}$$

Dès lors, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[t.y\right]=-\frac{d}{ds}\left[Y(s)\right]=-\left[Y'(s)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[t.y'\right]=-\frac{d}{ds}\left[s.Y(s)-y(0)\right]=-\left[Y(s)+s.Y'(s)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[t.y''\right]=-\frac{d}{ds}\left[s^2.Y(s)-s.y(0)-y'(0)\right]=-\left[2s.Y(s)+s^2.Y'(s)-y(0)\right]$$

On voit alors que si les polynômes $p(t)$ et $q(t)$ sont au maximum d'ordre 1 en t , et cela quelque soit l'ordre de l'équation différentielle dans l'espace des temps, alors on peut ramener cette équation différentielle à une équation différentielle d'ordre 1 en s dans l'espace des phases.

Si les polynômes $p(t)$ et $q(t)$ sont au maximum d'ordre 2, et cela quelque soit l'ordre de l'équation différentielle, alors on peut ramener l'équation différentielle à une équation différentielle d'ordre 2 dans l'espace des phases.

EXEMPLE :

Soit à résoudre l'équation différentielle de Laguerre : $t.y''+(1-t).y'+n.y=0$

SOLUTION :

En utilisant la transformation de Laplace, et la propriété de dérivée de la transformée, nous obtenons alors l'équation différentielle suivante dans l'espace des phases :

$$-\left[2s.Y(s)+s^2Y'(s)-y(0)\right]+\left[s.Y(s)-y(0)\right]+\left[Y(s)+s.Y'(s)\right]+n.Y(s)=0$$

soit encore :

$$(s-s^2)Y'(s)+(n+1-s).Y(s)=0$$

Dès lors, par séparation des variables :

$$\frac{dY(s)}{Ys}=\left(\frac{n+1-s}{s(s-1)}\right).ds=\left(\frac{n}{s(s-1)}-\frac{1}{s}\right).ds=\left(\frac{n}{(s-1)}-\frac{n+1}{s}\right).ds$$

et la solution dans l'espace des phases est alors :

$$Y(s)=\frac{(s-1)^n}{(s)^{n+1}}$$

d'où la solution correspondante dans l'espace des temps :

$$\begin{cases} L_n(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-1)^n}{(s)^{n+1}}\right]=\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d}{dt}\left[t^n e^{-t}\right] \\ L_0(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-1)^0}{(s)^{0+1}}\right]=1 \end{cases}$$

On obtient ce qu'on appelle les **polynômes de Laguerre** :

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d}{dt}\left[t^n e^{-t}\right]$$

PREUVE :

Nous allons démontrer que nous obtenons bien : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-1)^n}{(s)^{n+1}}\right]=\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d}{dt}\left[t^n e^{-t}\right]$. Pour cela il suffit de voir que :

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{-t}\right]=\mathcal{L}\left[t^n.g(t)\right]=(-1)^n G^{(n)}(s)=(-1)^n\left(\frac{1}{s+1}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Si on considère qu'il s'agit d'une fonction $g(t)=e^{-t}$ multiplié par t^n ; ce qui correspond à la dérivée n^ème d'une fonction $G(s)=\mathcal{L}\left[e^{-t}\right]$ dans l'espace des phases.

Par ailleurs, on aurait pu considérer la fonction $h(t)=t^n$ ayant subi un facteur multiplicant e^{-t} ; ce qui correspond à une translation de (+1) dans l'espace des phases.

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{-t}\right]=\mathcal{L}\left[h(t).e^{-t}\right]=\frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Ce qui nous amène exactement au même résultat. Pour ensuite obtenir le terme s^n au numérateur, il nous faut donc dériver la fonction du temps n fois :

$$\mathrm{L}\left[(t^n e^{-t})^{(n)}\right] = s^n.\frac{n!}{(s+1)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k y^{(n-1-k)}(0) = \frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}} + 0$$

Il suffit maintenant de réaliser une translation de (-1) dans l'espace des phases :

$$\mathrm{L}\left[(t^n e^{-t})^{(n)}.e^{+t}\right] = \frac{n!(s-1)^n}{(s+1-1)^{n+1}}$$

D'où le résultat :

$$\mathrm{L}\left[\underbrace{(t^n e^{-t})^{(n)}.\frac{e^{+t}}{n!}}_{\text{polynôme de Laguerre}}\right] = \frac{(s-1)^n}{(s)^{n+1}}$$

EXERCICE GUIDE :

Soit le problème avec conditions initiales suivantes : $\begin{cases}(t-1).y''(t)+y'(t)-t.y(t)=0\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$. Trouver l'expression de la réponse temporelle en utilisant la transformation de Laplace et le théorème de dérivée de la transformée.

SOLUTION GUIDE :

1) Appliquer la transformation de Laplace sur chaque terme :

$$\mathrm{L}\left[-ty(t)\right]=$$
$$\mathrm{L}\left[y'(t)\right]=$$
$$\mathrm{L}\left[(t-1).y''(t)\right]=-\frac{d}{ds}[\qquad\qquad]-[\qquad\qquad]=$$

2) Réintroduire pour trouver l'équation dans l'espace des phases :

$$(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)=0$$

3) Regrouper en fonction de $Y(s)$ et de $Y'(s)$:

$$(\qquad\qquad\qquad)Y'(s)+(\qquad\qquad\qquad)Y(s)=(\qquad\qquad\qquad)$$

4) Résoudre l'équation différentielle dans l'espace des phases et donner l'expression de la solution (dans l'espace des phases) :

$$Y(s)=(\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

5) Exprimer la fonction temporelle correspondante :

$$y_p(t)=(\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

Vérifier avec le résultat suivant :

$$\boxed{y(t)=e^{(t-1)}.U(t-1)}$$

24.3. Intégrale d'une transformée

(section facultative pour GEN-0135).

THÉORÈME :

Si $f(t)$ satisfait à la condition pour l'existence d'une transformée de Laplace (i.e. $f(t)$ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et $|f(t)|\le Me^{\gamma t}$ sur ce domaine, et que la limite de $\dfrac{f(t)}{t}$ existe lorsque $t\to 0^+$, alors l'**intégrale de la transformée** (ne pas confondre, ni avec **primitive de la transformée**, ni avec **transformée de la primitive**) existe et vaut :

$$\boxed{\int_{\tilde{s}=s}^{\tilde{s}=\infty} F(\tilde{s})d\tilde{s} = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st}.\frac{f(t)}{t}.dt}$$

Attention à cette borne qui distingue notre intégrale de la primitive!

DÉMONSTRATION :

Voir de nouveau dans le livre de Courant & John : «Introduction to Calculus Analysis» vol. 1 et 2. Wiley-Intersciences, 1974.

Il s'ensuit qu'on peut écrire, sous une forme plus pratique d'utilisation :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\int_{\tilde{s}=s}^{\tilde{s}=\infty} F(\tilde{s})d\tilde{s}\right] = \frac{f(t)}{t}}$$

Ce qui permet de compare avec le résultat avec la transformée d'une primitive de fonctions du temps :

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(\tau).d\tau\right]=\frac{F(s)}{s} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(\tau).d\tau$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la transformée inverse de la fonction des phases suivante : $G(s)=\ln\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)$.

SOLUTION :

Si nous dérivons cette fonction dans l'espace des phases:

$$-G'(s)=-\frac{1}{\left(1+\dfrac{\omega^2}{s^2}\right)}(-2)\frac{\omega^2}{s^3}=\frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}=\frac{2}{s}-\frac{2s}{(s^2+\omega^2)}=F(s)$$

Cela nous a permis de reconnaître certaines formes élémentaires et par conséquent leurs éléments correspondants dans l'espace des temps :

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{2s}{(s^2+\omega^2)}\right]=2-2\cos\omega t\ .$$

Mais nous ne devons pas perdre l'objectif que nous devons évaluer la transformée inverse de $G(s)$. Or on constate que $G(s)$ est l'intégrale (et non pas la primitive) de $F(s)$:

$$G(s)=\int_{\tilde{s}=s}^{\tilde{s}=+\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}=\int_{\tilde{s}=s}^{\tilde{s}=+\infty}-G'(\tilde{s})d\tilde{s}\ .$$

De sorte qu'en utilisant la propriété de l'intégrale dans l'espace des phases : $\mathrm{L}^{-1}\left[\displaystyle\int_{\tilde{s}=s}^{\tilde{s}=\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}\right]=\dfrac{f(t)}{t}$, Cela nous conduit à :

$$\boxed{\mathrm{L}^{-1}\left[G(s)\right]=\frac{f(t)}{t}=\frac{2}{t}\left(1-\cos\omega t\right)}$$

VÉRIFICATION :

On obtient absolument le même résultat en utilisant la propriété duale sur la dérivée dans l'espace des phases :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[G'(s)\right]=-t.g(t) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}^{-1}\left[-G'(s)\right]=t.g(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{2s}{(s^2+\omega^2)}\right]=2-2\cos\omega t\ .$$

Et par conséquent :

$$\boxed{g(t)=\frac{2}{t}\left(1-\cos\omega t\right)}.$$

EXERCICES

En utilisant le théorème de dérivée de la transformée, calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = 4te^{3t}$.

2. $f(t) = 3t^2 e^{2t}$.

3. $f(t) = t\cos\omega t$.

4. $f(t) = t\sin\omega t$.

5. $f(t) = t\cosh at$.

6. $f(t) = t\sinh at$.

7. $f(t) = t^2\cos\omega t$.

8. $f(t) = t^2\sinh at$.

Trouver les fonctions temporelles pour les fonctions de phase suivantes :

9. $F(s) = \dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$.

10. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+2}{s+4}\right)$.

11. $F(s) = \dfrac{s}{\left(s^2+16\right)^3}$.

12. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s^2+2}{\left(s+4\right)^2}\right)$.

13. $F(s) = \dfrac{s}{\left(s^2-4\right)^2}$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Indiquer dans quelles conditions dans l’espace des temps, une équation différentielle se transforme en une autre équation différentielle dans l’espace des phases, et non pas simplement en une équation linéaire.

2. Quelle serait l’ordre de l’équation de l’équation différentielle dans l’espace des phases si $p(t)$ ou $q(t)$ est un polynôme de degré 2. Donner la forme de cette équation pour $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ en utilisant $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ et $q(t) = b$.

3. À l’aide des résultats dans le tableau des correspondances, montrer qu’alors la transformée inverse de $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^3}$ est: $f(t) = \dfrac{1}{8\omega^3}(t.\sin\omega t - \omega t^2.\cos\omega t)$.

25. LA TECHNIQUE DES FRACTIONS PARTIELLES

La plupart du temps, la transformée de Laplace se présente sous la forme d'un rapport de polynômes. Il suffit pour cela de se rappeler la forme de la solution dans le domaine des phases :

$$\begin{cases} y''+a.y'+b.y=r(t) \\ y(t=t_0)=K_0 \\ y'(t=t_0)=K_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{\underbrace{(s^2+as+b)}_{\text{fonction caractéristique}}}\left[R(s)+(s+a).y(t=0)+y'(t=0)\right]$$

C'est à cause de la fonction caractéristique qui se retrouve au dénominateur. De façon générale, on écrira la fonction de sortie dans le domaine des phases par :

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Chacune des valeurs de s qui annule soit le numérateur, soit le dénominateur, s'appelle une **racine**. Chacune des valeurs de s qui annule le numérateur est appelé un **zéro**. Chacune des valeurs de s qui annule le dénominateur est appelé un **pôle**.

L'idée consiste alors à mettre l'expression du dénominateur sous forme d'un produit de facteurs où apparaît chacune des racines :

$$D(s)=(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_k)...(s-p_n)$$

Ceci permettra de décomposer $Y(s)$ sous la forme d'une somme de fractions simples. Dans tous les cas qui vont suivre nous considérerons que $N(s)$ est d'ordre polynomial inférieur à $D(s)$. Si ce n'est pas le cas, il faudra d'abord extraire la partie entière par division polynomiale. Puis traiter uniquement la partie fractionnaire.

EXEMPLE : SÉPARATION DES PARTIES ENTIÈRE ET FRACTIONNAIRE

Soit à séparer les parties entière et fractionnaire pour : $Y(s)=\dfrac{s^5+2s^4+s^2}{s^3-3s^2+3s-1}$

SOLUTION :

Appliquer la division polynomiale, tant que le reste est supérieur au égal au dénominateur :

Dividende Quotient

$$\begin{array}{r|l} s^5+2s^4+s^2 & s^3-3s^2+3s-1 \\ \hline & s^2 \end{array}$$

$$\underline{\left(s^5-3s^4+3s^3-s^2\right)}$$

Diviseur

Reste

$$\begin{array}{r|l} 5s^4-3s^3+2s^2 & s^3-3s^2+3s-1 \\ \hline & 5s \end{array}$$

$$\underline{\left(5s^4-15s^3+15s^2-5s\right)}$$

$$\begin{array}{r|l} 12s^3-13s^2+5s & s^3-3s^2+3s-1 \\ \hline & 12 \end{array}$$

$$\underline{\left(12s^3-36s^2+36s-12\right)}$$

$$23s^2-31s+12$$

Reste inférieur au diviseur

d'où le résultat :

$$Y(s)=\frac{s^5+2s^4+s^2}{s^3-3s^2+3s-1}=\underbrace{s^2+5s+12}_{\text{partie entière}}+\underbrace{\frac{23s^2-31s+12}{s^3-3s^2+3s-1}}_{\text{partie fractionnaire}}$$

25.1. Cas 1 : tous les pôles p_k sont des racines simples (distincts) :

Dans ce cas la forme décomposée de $Y(s)$ sera :

$$Y(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)\ldots(s-p_k)\ldots(s-p_n)}=\frac{A_1}{(s-p_1)}+\ldots+\frac{A_k}{(s-p_k)}+\ldots+\frac{A_n}{(s-p_n)}$$

Chaque coefficient A_k est obtenu par la méthode des résidus :

$$A_k=\lim_{s\to p_k}(s-p_k).Y(s)=\frac{N(p_k)}{D'(p_k)}$$

et la solution dans le domaine temporel est immédiat :

$$y(t)=A_1.e^{p_1.t}+A_2.e^{p_2.t}+\ldots+A_k.e^{p_k.t}+\ldots+A_n.e^{p_n.t}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de : $Y(s)=\dfrac{s+1}{s^3+s^2-6s}$

SOLUTION :

1) Mettre le dénominateur sous forme de produit :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}$$

2) Mettre $Y(s)$ sous la forme d'une somme de fractions partielles :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s-2)} + \frac{A_3}{(s+3)}$$

3) Résoudre les coefficients par la méthode des résidus :

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s.Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(s+1)}{(s-2)(s+3)} = -\frac{1}{6}$$
$$A_2 = \lim_{s\to 2} (s-2).Y(s) = \lim_{s\to 2} \frac{(s+1)}{s(s+3)} = +\frac{3}{10}$$
$$A_3 = \lim_{s\to -3} (s+3).Y(s) = \lim_{s\to -3} \frac{(s+1)}{s(s-2)} = -\frac{2}{15}$$

4) Exprimer la solution dans les phases :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{s} + \frac{3}{10}\frac{1}{(s-2)} - \frac{2}{15}\frac{1}{(s+3)}$$

5) Exprimer la solution dans le domaine temporel grâce à la table de correspondance :

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

REMARQUE :

Dans le cas comme celui-ci, où les racines ne sont pas nombreuses, on aurait pu obtenir les coefficients des fractions simples par identification en re-multipliant pour retrouver le dénominateur commun.

25.2. Cas 2 : il existe un pôle p_k qui est une racine de multiplicité m :

C'est à dire que : $Y(s) = \dfrac{N(s)}{...(s-p_k)^m...}$

alors la décomposition en fractions simples sera :

$$Y(s) = ... + \frac{A_{k_1}}{(s-p_k)} + \frac{A_{k_2}}{(s-p_k)^2} + ... + \frac{A_{k_m}}{(s-p_k)^m} + ...$$

Avec les relations suivantes pour obtenir les résidus A_{k_i} :

$$A_{k_m} = \lim_{s \to p_k} (s-p_k)^m . Y(s)$$
$$A_{k_{m-1}} = \frac{1}{1!} \lim_{s \to p_k} \frac{d}{ds}\left((s-p_k)^m . Y(s)\right)$$
$$.... = ...$$
$$A_{k_i} = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{s \to p_k} \frac{d^{m-i}}{ds^{m-i}}\left((s-p_k)^m . Y(s)\right)$$
$$.... = ...$$
$$A_{k_1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \to p_k} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left((s-p_k)^m . Y(s)\right)$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de : $Y(s) = \dfrac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s-1)}$

SOLUTION :

1) Mettre le dénominateur sous forme de produit : C'est déjà donné comme tel dans le problème.

2) Mettre $Y(s)$ comme une somme de fractions partielles : On voit qu'il y a une racine double pour $s = 0$

Dès lors la décomposition sera :

$$Y(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s-1)} = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{s^2} + \frac{A_2}{(s-2)} + \frac{A_3}{(s-1)}$$

3) La détermination des coefficients va donner le résultat suivant :

$$A_{12} = \lim_{s \to 0}\left[s^2 . Y(s)\right] = \lim_{s \to 0} \frac{(s^3 - 4s^2 + 4)}{(s-2)(s-1)} = 2$$
$$A_{11} = \frac{1}{1!}\lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 . Y(s)\right] = \frac{1}{1!}\lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{(s^3 - 4s^2 + 4)}{(s-2)(s-1)}\right) = 3$$
$$A_2 = \lim_{s \to 2}\left[(s-2) . Y(s)\right] = \lim_{s \to 2} \frac{(s^3 - 4s^2 + 4)}{s^2(s-1)} = -1$$
$$A_3 = \lim_{s \to 1}\left[(s-1) . Y(s)\right] = \lim_{s \to -3} \frac{(s^3 - 4s^2 + 4)}{s^2(s-2)} = -1$$

4) D'où le résultat dans l'espace des phases:

$$Y(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s+3)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}$$

5) La solution dans le domaine temporel est alors :

$$y(t)=3+2t-e^{2t}-e^{t}$$

EXERCICE GUIDE :

Trouver l'expression dans le domaine temporel de : $Y(s)=\dfrac{s^3+2s^2+1}{s^3-3s^2+3s-1}$

SOLUTION GUIDE :

1) Mettre le dénominateur sous forme de produit :

$$Y(s)=\frac{s^3+2s^2+1}{(s-\quad)(s-\quad)(s-\quad)}$$

2) Mettre $Y(s)$ comme une somme de fractions partielles :

$$Y(s)=\frac{s^3+2s^2+1}{(s-\quad)(s-\quad)(s-\quad)}=1+\frac{(\qquad+\qquad+\qquad)}{(s-\quad)(s-\quad)(s-\quad)}=1+\frac{A_{11}}{(s-\quad)}+\frac{A_{12}}{(s-\quad)^2}+\frac{A_{13}}{(s-\quad)^3}$$

3) Détermination des coefficients :

N'oubliez pas qu'il y a ici une partie entière.

$$A_{13}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to(\quad)}\left[(s-\quad)^3.Y(s)\right]=\frac{1}{0!}\lim_{s\to(\quad)}\frac{(\qquad+\qquad+\qquad)}{(\qquad\qquad\qquad)}=$$

$$A_{12}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to(\quad)}\frac{d}{ds}\left[(s-\quad)^3.Y(s)\right]=\frac{1}{1!}\lim_{s\to(\quad)}\frac{d}{ds}\left(\frac{(\qquad+\qquad+\qquad)}{(\qquad\qquad\qquad)}\right)=$$

$$A_{11}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to(\quad)}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-\quad)^3.Y(s)\right]=\frac{1}{2!}\lim_{s\to(\quad)}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{(\qquad+\qquad+\qquad)}{(\qquad\qquad\qquad)}\right)=$$

4) Expression dans l'espace des phases sous décomposition en éléments simples:

$$Y(s)=\frac{s^3+2s^2+1}{s^3-3s^2+3s-1}=1+\left(\qquad\right)\frac{1}{(s-\quad)}+\left(\qquad\right)\frac{1}{(s-\quad)^2}+\left(\qquad\right)\frac{1}{(s-\quad)^3}$$

5) La solution dans le domaine temporel est alors :

$$y(t)=$$

Comparez alors avec le résultat suivant :

$$\boxed{y(t) = \delta(t) + 5e^t + 7te^t + 4t^2e^t}$$

25.3. Cas 3 : il existe une paire de pôles p_k et $p_{k+1} = p_k^*$ qui sont des complexes conjuguées :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{...)(s-p_k)(s-p_k^*)(...}$$

Dès lors la forme décomposée en éléments simples est :

$$Y(s) = ...+\frac{A_k}{(s-p_k)} + \frac{A_k^*}{(s-p_k^*)} + ...$$

REMARQUES :

- Les coefficients A_k et A_k^* sont cette fois-ci des nombres complexes et ne sont que circonstantiellement des nombres réels.

- Il est équivalent d'écrire : $\dfrac{A_k}{(s-p_k)} + \dfrac{A_k^*}{(s-p_k^*)} = \dfrac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $si \begin{cases} p_k = \alpha + j\beta \\ p_k^* = \alpha - j\beta \end{cases}$

Exercice à faire par les étudiants : démontrer la relation ci-dessus et donner l'expression de C et D en fonction de A_k et A_k^* !

Et les coefficients A_k et A_k^* sont identifiés par :

$$A_k = \lim_{s \to p_k} (s-p_k).Y(s)$$
$$A_k^* = \lim_{s \to p_k^*} (s-p_k^*).Y(s)$$

ou encore par :

$$C(\alpha + j\beta) + D = \lim_{s \to p_k} (s-p_k)(s-p_k^*).Y(s)$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre le système mécanique suivant : $\begin{cases} m.y'' + k.y = K_0 \sin \omega t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

SOLUTION :

1) Il s'agit d'un système non-amorti. Dès lors on le pose sous la forme canonique pour le résoudre :

$$\begin{cases} y''+\dfrac{k}{m}y=\dfrac{K_0}{m}\sin\omega t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y''+\omega_0^2 y = K\sin\omega t \\ \omega_0=\dfrac{k}{m},\ K=\dfrac{K_0}{m} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \rightarrow\ Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+\omega_0^2\right)}\left(\frac{K\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

Pulsation différente de ω_0

2) Soit par la mise en fractions partielles:

$$Y(s)=\frac{K\omega}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}=\frac{Cs+D}{(s^2+\omega_0^2)}+\frac{Ms+N}{(s^2+\omega^2)}$$

et passage à la limite pour $Cs+D$:

$$C(j\omega_0)+D=\lim_{s\to j\omega_0}(s^2+\omega_0^2)Y(s)=\lim_{s\to j\omega_0}\frac{K\omega}{(s^2+\omega^2)}=\frac{K\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)}$$

Ce qui nous permet d'identifier :

$$\begin{cases} C=0 \\ D=\dfrac{K\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)} \end{cases}$$

En procédant de la même façon pour $Ms+N$:

$$M(j\omega)+N=\lim_{s\to j\omega}(s^2+\omega^2)Y(s)=\lim_{s\to j\omega}\frac{K\omega}{(s^2+\omega_0^2)}=\frac{-K\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)}$$

Dès lors, on identifie que :

$$\begin{cases} M=0 \\ N=\dfrac{-K\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)} \end{cases}$$

D'où l'expression en fractions partielles de $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{K\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)}\left[\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)}-\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\right]$$

3) et la réponse temporelle correspondante est :

$$y(t) = \frac{K\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \omega_o t - \frac{K}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \omega t$$

ATTENTION :

N'oubliez pas qu'on cherche à identifier C, D, M et N pour réécrire sous la forme :

$Y(s) = \dfrac{Cs + D}{(s^2 + \omega_0^2)} + \dfrac{Ms + N}{(s^2 + \omega^2)}$. Surtout ne pas écrire : $Y(s) = \dfrac{C(j\omega_0) + D}{(s^2 + \omega_0^2)} + \dfrac{M(j\omega) + N}{(s^2 + \omega^2)}$, ce qui est très différent!

25.4. Cas 4 : il existe une paire de pôles p_k et $p_{k+1} = p_k^*$ qui sont des complexes conjuguées de multiplicité 2 :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{...)(s - p_k)^2 (s - p_k^*)^2 (...}$$

Dans ce cas la forme décomposée de $Y(s)$ sera :

$$Y(s) = ... + \frac{A_{k1}}{(s - p_k)} + \frac{A_{k1}^*}{(s - p_k^*)} + \frac{A_{k2}}{(s - p_k)^2} + \frac{A_{k2}^*}{(s - p_k^*)^2} ....$$

ou encore : en combinant les complexes conjugués :

$$Y(s) = \frac{Cs + D}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{As + B}{((s - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \quad , \quad si \quad \begin{cases} p_k = \alpha + j\beta \\ p_k^* = \alpha - j\beta \end{cases}$$

et la détermination des coefficients se fait comme suit :

$$A(p_k) + B = (\alpha A + B) + j(\beta A) = \lim_{s \to p_k} (s - p_k)^2 (s - p_k^*)^2 . Y(s)$$

$$A + (p_k - p_k^*)(C.p_k + D) = (A - 2\beta^2 C) + j(2\alpha\beta C + 2\beta D) = \frac{1}{1!} \lim_{s \to p_k} \frac{d}{ds}\left[(s - p_k)^2 (s - p_k^*)^2 . Y(s)\right]$$

EXEMPLE :

Soit l'exemple précédent mais dont l'entrée forcée est de la même fréquence que la fréquence de résonance :

$$\begin{cases} m.y'' + k.y = K_0 \sin \omega_0 t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUTION :

1) mise sous forme canonique :

Pulsation forcée ω = pulsation propre ω_0 du système

$$\begin{cases} y''+\omega_0^2 y = K\sin\omega_0 t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \quad , \quad avec \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ K = \dfrac{K_0}{m} \end{cases} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)}}_{\text{fonction caractéristique}} \left[K\frac{\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)}\right]$$

Décomposition en fractions partielles :

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{Cs+D}{(s^2+\omega_0^2)} + \frac{As+B}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

et passage à la limite pour $As+B$:

$$A(j\omega_0)+B = \lim_{s\to j\omega_0}(s^2+\omega_0^2)^2 Y(s) = \lim_{s\to j\omega_0} K\omega_0 = K\omega_0$$

Ce qui nous permet d'identifier :

$$\begin{cases} A=0 \\ B=K\omega_0 \end{cases}$$

Par la suite, pour identifier $Cs+D$:

$$A+2j\omega_0(C(j\omega_0)+D) = \lim_{s\to j\omega_0}\frac{d}{ds}\left[(s^2+\omega_0^2)^2 Y(s)\right] = \lim_{s\to j\omega_0}\frac{d}{ds}\left[K\omega_0\right]=0$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} C=0 \\ D=0 \end{cases}.$$

et donc l'expression en fractions partielles de $Y(s)$ est :

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

3) et la réponse temporelle correspondante est d'après la table des dérivées dans l'espace des phases:

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}\right] = \frac{K}{2\omega_0}\left[\sin\omega_o t - \omega_0 t.\cos\omega t\right]$$

25.5. Démonstration pour le calcul des coefficients :

Cas1 : 1 pôle réel de multiplicité 1 :

$$Y(s)=\frac{N(s)}{...(s-p_k)...}=W(s)+\frac{A_k}{(s-p_k)}$$

en multipliant par :

$$(s-p_k)Y(s)=(s-p_k)W(s)+A_k$$

et en faisant tendre vers la limite, nous obtenons :

$$A_k=\lim_{s\to p_k}(s-p_k).Y(s)$$

Cas 2 : 1 pôle réel de multiplicité m :

$$Y(s)=W(s)+\frac{A_{k_1}}{(s-p_k)}+...+\frac{A_{k_i}}{(s-p_k)^i}+...+\frac{A_{k_m}}{(s-p_k)^m}$$

Pour obtenir le terme A_{k_m}, il suffit de multiplier $Y(s)$ par $(s-p_k)^m$:

$$\begin{aligned}(s-p_k)^m Y(s)&=(s-p_k)^m W(s)\\&+(s-p_k)^{m-1}A_{k_1}+...+(s-p_k)^{m-i}A_{k_{1i}}+...+(s-p_k)^1 A_{k_{m-1}}+A_{k_m}\end{aligned}$$

et faire tendre vers la limite :

$$A_{km}=\lim_{s\to p_k}(s-p_k)^m Y(s)$$

Pour obtenir $A_{k_{m-1}}$, il suffit de dériver l'expression :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^m Y(s)\right]&=(s-p_k)^m W'(s)+m.(s-p_k)^{m-1}W(s)\\&+(m-1)(s-p_k)^{m-2}A_{k_1}+...+(m-i)(s-p_k)^{m-i-1}A_{k_i}+...+1.A_{k_{m-1}}\end{aligned}$$

Et en prenant de nouveau la limite :

$$A_{km-1}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to p_k}\frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^m Y(s)\right]$$

Pour obtenir $A_{k_{m-2}}$, il faut dériver l'expression une seconde fois :

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_k)^m Y(s)\right] = (s-p_k)^m W''(s) + 2m.(s-p_k)^{m-1}W'(s) + m(m-1)(s-p_k)^{m-2}W(s)$$
$$+(m-1)(m-2)(s-p_k)^{m-3}A_{k_1} + \ldots + (m-i)(m-i-1)(s-p_k)^{m-i-2}A_{k_i}$$
$$+(3).(2).(s-p_k)^1 A_{k_{m-3}} \ldots + (2).(1).A_{k_{m-2}}$$

De sorte que l'on obtient :

$$A_{k\,m-2} = \frac{1}{2!}\lim_{s\to p_k}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_k)^m Y(s)\right]$$

Et successivement, nous avons une formule générale :

$$A_{k_i} = \frac{1}{(m-i)!}\lim_{s\to p_k}\frac{d^{(m-i)}}{ds^{(m-i)}}\left[(s-p_k)^m Y(s)\right]$$

Cas 3 : 1 paire de pôles complexes conjuguées de multiplicité 1 :

$$Y(s) = W(s) + \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad , \quad avec \quad \begin{cases} p_k = \alpha + j\beta \\ p_k^* = \alpha - j\beta \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} C \in \mathbb{R} \\ D \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et $(s-p_k)(s-p_k^*).Y(s) = (s-p_k)(s-p_k^*).W(s) + Cs + D$

si on fait tendre $s \to p_k$, alors $(s-p_k)(s-p_k^*).W(s) \to 0$ et il ne restera que le terme :

$$C(p_k) + D = C(\alpha + j\beta) + D = \lim_{s\to p_k}(s-p_k)(s-p_k^*).Y(s)$$

Cas 4 : 1 paire de pôles complexes conjuguées de multiplicité 2 :

$$Y(s) = W(s) + \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{As+B}{\left((s-\alpha)^2+\beta^2\right)^2}, \quad avec \quad \begin{cases} p_k = \alpha + j\beta \\ p_k^* = \alpha - j\beta \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} A \in \mathbb{R} \\ B \in \mathbb{R} \\ C \in \mathbb{R} \\ D \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le reste de la fraction ne contenant pas la racine p_k

et alors :

$$(s-p_k)^2(s-p_k^*)^2.Y(s) = (s-p_k)^2(s-p_k^*)^2.W(s) + As + B + (s-p_k)(s-p_k^*)(Cs+D)$$

De sorte que :

$$\lim_{s\to p_k}(s-p_k)^2(s-p_k^*)^2.Y(s) = A(p_k) + B$$
$$= A(\alpha + j\beta) + B$$
$$= (\alpha A + B) + j(\beta A)$$

ce qui permet d'identifier A et B. De même, en dérivant l'expression:

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^2(s-p_k^*)^2Y(s)\right]=(s-p_k)^2(s-p_k^*)^2W'(s)+2(s-p_k)(s-p_k^*)^2W(s)+2(s-p_k)^2(s-p_k^*)W(s)$$
$$+(s-p_k)(s-p_k^*)C+(s-p_k)(Cs+D)+(s-p_k^*)(Cs+D)$$
$$+A$$

et en passant à la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{s\to p_k}\frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^2(s-p_k^*)^2.Y(s)\right] &= 0+0+0 \quad + \quad 0+0+(p_k-p_k^*)(C.p_k+D) \quad + \quad A\\ &= A+2j\beta(C(\alpha+j\beta)+D)\\ &= (A-2\beta^2C)+j(2\alpha\beta C+2\beta D)\end{aligned}$$

Ce qui permet à présent d'identifier C et D.

CONSEIL :

N'utilisez pas les fonctions supplémentaires R(s) et S(s) tels que montrés dans le Kreysig car ils encombrent davantage l'esprit par surcharge de variables. Vue la densité du cours, vous n'aurez pas le temps d'assimiler leur signification.

EXERCICES

Utiliser la technique des fractions partielles pour trouver la réponse temporelle $y(t)$ correspondante pour chacune des réponses de phase $Y(s)$ suivantes :

1. $Y(s) = \dfrac{1}{(s-3)(s-1)}$.

2. $Y(s) = \dfrac{(s-1)}{(s-2)(s-3)}$.

3. $Y(s) = \dfrac{(s-2)}{(s-3)^2}$.

4. $Y(s) = \dfrac{2s}{s^2+2s-6}$.

5. $Y(s) = \dfrac{s-2}{s^2+4s}$.

6. $Y(s) = \dfrac{s+3}{(s-1)^3}$.

7. $Y(s) = \dfrac{s}{(s+1)^3}$.

8. $Y(s) = \dfrac{s^3-3s^2+2s-5}{(s-2)^2(s-3)^3}$.

9. $Y(s) = \dfrac{s^4+3(s+1)^2}{s^4(s+1)^2}$.

10. $Y(s) = \dfrac{s^4+2(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}$.

Résoudre les équations différentielles suivantes avec conditions initiales par la transformée de Laplace:

11. $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = +y_1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(1) = 0 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} y_1' + y_2 = \sin t \\ y_2' - y_1 = \cos t \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 2y_1' - y_2' - y_3' = 0 \\ y_1' + y_2' = 4t + 2 \\ y_2' - y_3' = t + 1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Qu'est ce qu'une racine?

2. Qu'est ce qu'un pôle?

3. Qu'est ce qu'un zéro?

4. Écrire en phrases la procédure à suivre, pour décomposer un rapport de fonctions : $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ en fractions partielles.

Montrer qu'on obtient les résultats suivants en utilisant la technique des fractions partielles:

5. $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^4 + 4a^4}\right] = \dfrac{1}{4a^3}\left(\cosh at \sin at - \sinh at \cos at\right)$.

6. $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^4 + 4a^4}\right] = \dfrac{1}{4a^2}\left(\sinh at \sin at\right)$.

7. $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{s^4 + 4a^4}\right] = \dfrac{1}{2a^4}\left(\cosh at \sin at + \sinh at \cos at\right)$.

8. $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}\right] = \cosh at \cos at$.

26. SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : RÉSOLUTION PAR ÉLIMINATION DES ÉQUATIONS D'ORDRE >1

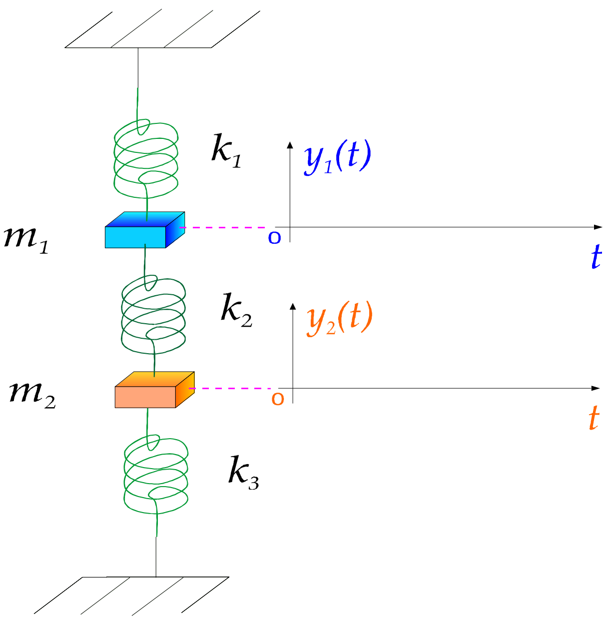
26.1. Introduction :

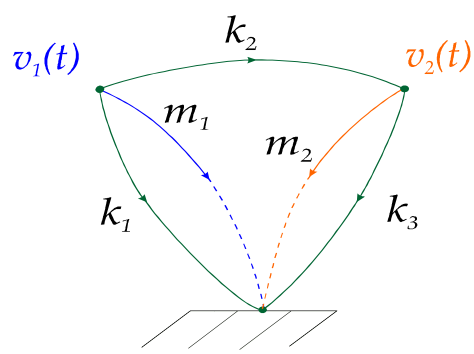
Dans un système complexe, il se peut qu'on veuille observer l'état en plusieurs points du système à la fois. Dès lors on a une équation différentielle pour décrire le comportement de chaque point en question. Cette équation contient non seulement la variable et ses dérivées du point en cause, mais comporte également les variables et les dérivées des autres points, à cause de l'interdépendance dans un système. Ainsi, pour chaque point nous avons une équation différentielle. L'ensemble forme alors un système d'équations différentielles. Pour le résoudre nous abordons ici une technique d'élimination des équations d'ordre plus élevé que 1. En fait nous allons transformer une équation d'ordre n, en n équations d'ordre 1.

26.2. modélisation d'un système complexe :

EXEMPLE :

Nous allons prendre comme exemple un système mécanique de translation avec 2 masses et 3 ressorts disposés selon la figure ci-dessous :





Graphe linéaire associé

NOTE :

Chaque élément réactif ajoute un degré dans l'équation différentielle, à moins qu'il ne constitue avec un autre élément réactif de même type, un nœud trivial (ici le nœud trivial est le nœud de référence puisque $k_1 + m_1$ forme un combinaison identique à $k_3 + m_2$).

On veut alors connaître le mouvement des 2 masses $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Les équations de nœud $\left(\left(\sum forces\right) = 0\right)$ sont :

$$\begin{cases} -m_1 y_1'' - k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2) = 0 \\ +k_2(y_1 - y_2) - m_2 y_2'' - k_3 y_2 = 0 \end{cases}$$

Ce nous permet de réécrire sous la forme normalisée suivante :

$$\begin{cases} y_1'' = -(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}) y_1 + (\dfrac{k_2}{m_1}) y_2 \\ y_2'' = +(\dfrac{k_2}{m_2}) y_1 - (\dfrac{k_2 + k_3}{m_2}) y_2 \end{cases}$$

Soit sous écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}) & (\dfrac{k_2}{m_1}) \\ (\dfrac{k_2}{m_2}) & -(\dfrac{k_2 + k_3}{m_2}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [Y''] = [A] * [Y]$$

Nous verrons plus tard qu'il y a des techniques (cours de Signaux et Systèmes) pour construire rapidement cette matrice.

26.3. Résolution directe :

Étant donné qu'il s'agit d'un système à **coefficients constants**, on peut obtenir la solution homogène en introduisant la forme vectorielle suivante:

$$[Y] = [X] e^{\lambda t}$$

où $[X]$ est un vecteur de constantes (on se rappellera que dans le cas d'une fonction unique, nous avions introduit la forme solution par : $y = 1.e^{\lambda t}$). Aussi les dérivées successives sont :

$$\begin{gathered} [Y] = [X] e^{\lambda t} \\ [Y'] = \lambda.[X] e^{\lambda t} \\ [Y''] = \lambda^2.[X] e^{\lambda t} \end{gathered}$$

Et le système d'équations devient :

$$\lambda^2.[X] e^{\lambda t} = [A] * [X] e^{\lambda t}$$

Le problème revient maintenant à trouver les valeurs propres κ_i et les vecteurs propres associés $[X_i]$ d'un système matriciel (voir dans le cours d'algèbre linéaire et matriciel de votre curriculum) :

$$[A]*[X]=\lambda^2.[X] \quad \Leftrightarrow \quad ([A]-\kappa[I])*[X]=0\,, \quad avec \quad \kappa=\lambda^2$$

Afin de simplifier un peu l'écriture pour la suite de la démonstration, nous allons fixer la valeur des éléments :

$$\begin{aligned}&m_1=m_2=1 \quad Kg.\\&k_1=k_3=1 \quad N.m^{-1}\\&k_2=2 \quad N.m^{-1}\end{aligned}$$

De sorte que la recherche des valeurs propres va donner :

$$\begin{bmatrix}-3-\kappa & 2\\ 2 & -3-\kappa\end{bmatrix}*[X]=0$$

On sait qu'il existe des solutions non-triviales si le déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix}-(3+\kappa) & 2\\ 2 & -(3+\kappa)\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (3+\kappa)^2-2^2=\underbrace{(\kappa+5)(\kappa+1)=0}_{\text{équation caractéristique}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\kappa_1=-1\\ \kappa_2=-5\end{cases}$$

Pour chaque valeur propre, nous avons un vecteur propre associé :

$$\kappa_1=-1 \quad \Rightarrow \quad ([A]-\kappa_1)*[X_1]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}-(3-1) & 2\\ 2 & -(3-1)\end{vmatrix}*\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1]=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

et :

$$\kappa_2=-5 \quad \Rightarrow \quad ([A]-\kappa_2)*[X_2]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}-(3-5) & 2\\ 2 & -(3-5)\end{vmatrix}*\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2]=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

et la solution homogène est alors :

$$[Y]=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=c_1[X_1].e^{+i\sqrt{\kappa_1}.t}+c_2[X_1]e^{-i\sqrt{\kappa_1}.t}+c_3[X_2].e^{+i\sqrt{\kappa_2}.t}+c_4[X_2]e^{-i\sqrt{\kappa_2}.t}$$

c'est à dire numériquement :

$$[Y]=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(A\cos\sqrt{1}.t+B\sin\sqrt{1}.t)+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(M\cos\sqrt{5}.t+N\sin\sqrt{5}.t)$$

CONSTAT :

Il apparaît que nous avons quatre solutions indépendantes et non pas deux dans la solution homogène, pourquoi ? Eh ! bien c'est parce qu'il s'agit en réalité d'un système d'ordre 4. Le système comporte 5 éléments réactifs : 2 masses et 3 ressorts et on aurait donc dû avoir un système d'ordre 5, mais le fait que le nœud de référence réceptionne 2 branches de même type (k_1+m_1 d'un côté et k_3+m_2 de l'autre), il devient un nœud trivial d'où la réduction d'ordre de -1. C'est donc un système d'ordre 4 que nous avons mis en équation sous la forme de 2 équations d'ordre 2.

26.4. Résolution par transformation des équations d'ordre plus grand que 1 :

En poursuivant dans la même veine, on aurait pu modéliser ce système d'ordre 4 en dressant 4 équations d'ordre 1, au lieu de 2 équation d'ordre 2, ce qui nous éviterait de traiter des équations du second ordre. Il suffit pour cela de poser comme suit :

$$\text{si } y^{(n)} = F(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \quad \text{alors poser} \begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \\ ... = ... \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

De sorte qu'une équation d'ordre n se ramène à un système de n équations d'ordre 1 :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ . \\ . \\ . \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{F(t, y_1, y_2, ..., y_{n)}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Appliquons cette méthode à notre problème mécanique de masses-ressorts. En posant :

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_1' \\ z_3 = y_2 \\ z_4 = y_2' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1' = y_1' \\ z_2' = y_1'' \\ z_3' = y_2' \\ z_4' = y_2'' \end{cases}$$

nous obtenons alors un système à 4 équations du premier ordre suivant :

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\frac{k_1 + k_2}{m_1}) & 0 & (\frac{k_2}{m_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (\frac{k_2}{m_2}) & 0 & -(\frac{k_2 + k_3}{m_2}) & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Posons la forme de la solution comme auparavant :

$$[Z] = [X] e^{\lambda t}$$
$$[Z'] = \lambda . [X] e^{\lambda t}$$

Cette fois-ci, nous n'avons pas besoin de plus que la dérivée première de $[Z]$. Et $[X]$ est un vecteur de constantes de dimension 4. Il s'agit maintenant de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres:

$$\lambda . [X] e^{\lambda t} = [A] * [X] e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad ([A] - \lambda) * [X] = 0$$

numériquement :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -\lambda \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

d'où les racines de l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ -3 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 5 = 0$$

$$\boxed{(\kappa+5)(\kappa+1)=0}$$

$$= \underbrace{(\lambda^2+5)(\lambda^2+1)=0}_{\text{équation caractérstqiue}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = +i\sqrt{1} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{1} \\ \lambda_3 = +i\sqrt{5} \\ \lambda_4 = +i\sqrt{5} \end{cases}$$

et les vecteurs propres associés sont:

$$\lambda_1 = +i\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_1)*[X_1]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -i\sqrt{1} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -i\sqrt{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{1} & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -i\sqrt{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{1} \\ 1 \\ i\sqrt{1} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_2)*[X_2]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i\sqrt{1} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & i\sqrt{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{1} & 1 \\ 2 & 0 & -3 & i\sqrt{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{1} \\ 1 \\ -i\sqrt{1} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = +i\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_3)*[X_3]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -i\sqrt{5} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -i\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{5} & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -i\sqrt{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_3] = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{5} \\ -1 \\ -i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_4)*[X_4]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i\sqrt{5} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & i\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{5} & 1 \\ 2 & 0 & -3 & i\sqrt{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{41} \\ x_{42} \\ x_{43} \\ x_{44} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_4] = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{5} \\ -1 \\ i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

La solution homogène en $[Z]$ est alors:

$$[Z]=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ +i\sqrt{1} \\ 1 \\ +i\sqrt{1} \end{bmatrix}.e^{+i\sqrt{1}.t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{1} \\ 1 \\ -i\sqrt{1} \end{bmatrix}e^{-i\sqrt{1}.t}+c_3\begin{bmatrix} 1 \\ +i\sqrt{5} \\ -1 \\ -i\sqrt{5} \end{bmatrix}.e^{+i\sqrt{5}.t}+c_4\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{5} \\ -1 \\ +i\sqrt{5} \end{bmatrix}e^{-i\sqrt{5}.t}$$

Nous retrouvons exactement les expressions pour $y_1(t)$ et $y_2(t)$; en plus d'avoir les expressions de leur dérivée d'ordre 1 : $y_1'(t)$ et $y_2'(t)$.

26.5. Résumé du chapitre :

Dans ce chapitre, nous avons abordé la résolution d'un système complexe comportant des éléments réactifs (chacun des éléments réactifs donne une dérivée ou une intégrale). L'ordre n du système est donné par le nombre d'éléments réactifs non connectées en nœuds triviaux.

Pour résoudre ce système, nous avons le choix de poser une équation différentielle unique d'ordre n, ou bien de poser n équations différentielles d'ordre 1, ou encore toutes combinaisons entre les 2 situations (le cumul des ordres de l'ensemble des équations donnant un total de n).

Quoiqu'il en soit on devra toujours résoudre une équation caractéristique d'ordre n :

$$\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+....+\alpha_n\lambda^0=0$$

pour trouver les n racines. Ces racines conduisent à n formes solutions indépendantes qui constitue la solution homogène.

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les systèmes d'équations suivants:

1. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

Trouver la solution spécifique pour les systèmes d'équation suivants avec conditions initiales :

5. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = -2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases}$

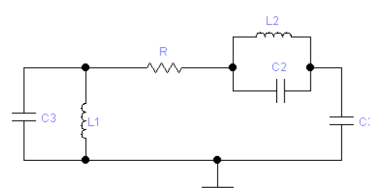
8. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Expliquez comment on détermine l'ordre d'un système d'équations selon le nombre d'éléments réactifs ou passifs dans un circuit.

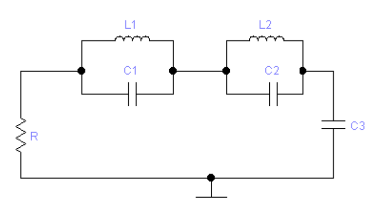
2. Soit le circuit électrique suivant :

Montrer à travers les équations des nœuds qu'il s'agit d'un système du 5ème ordre.



3. Soit le circuit suivant :

Montrer à travers les équations des nœuds qu'il s'agit d'un système du 4ème ordre.



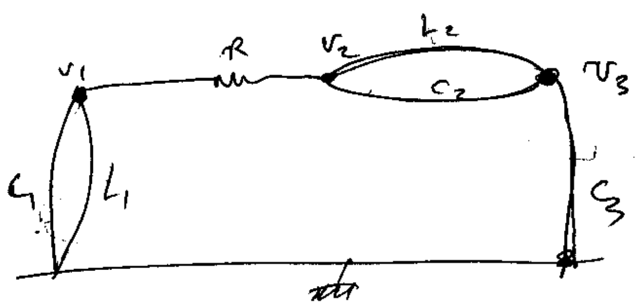
4. Dans quels cas de configuration des éléments réactifs peut-on avoir une réduction de l'ordre du système d'équations.

5. Si $\left[Y\right]$ remplace y_h dans la solution générale d'un système d'équations différentielles, donner l'expression de $\left[Y\right]$ en fonction des formes solutions. Combien doit-il y avoir de formes indépendantes?

6.

SOLUTIONNAIRE

1



aucun Noeud trivial

méthode des noeuds

au noeud 1 : $C_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{L_1}\int V_1 - R(V_1 - V_2) = 0$

au noeud 2 : $R(V_1 - V_2) - \frac{1}{L_2}\int (V_2 - V_3) - C_2 \frac{\partial (V_2 - V_3)}{\partial t} = 0$

au noeud 3 : $\frac{1}{L_2}\int (V_2 - V_3) + C_2 \frac{\partial (V_2 - V_3)}{\partial t} - C_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} = 0$

soit sous forme normalisée en posant $\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = y_1''$ - - - -

$V_1 = y_1$

$$C_1 y_1'' + \frac{1}{L_1} y_1 - \frac{1}{R}(y_1' - y_2') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 2$$

$$\frac{1}{R}(y_1' - y_2') - \frac{1}{L_2}(y_2 - y_3) - C_2(y_2'' - y_3'') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 2$$

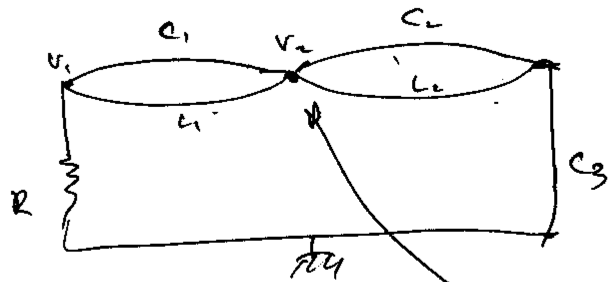
$$\frac{1}{L_2}(y_2 - y_3) + C_2(y_2'' - y_3'') - C_3(y_3'') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 2$$

or si on combine la 2ème et la 3ème équation, on aura :

$$\begin{cases} C_1 y_1'' + \frac{1}{L_1} y_1 - \frac{1}{R}(y_1' - y_2') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 2 \\ \frac{1}{R}(y_1' - y_2') - \frac{1}{L_2}(y_2 - y_3) - C_2(y_2'' - y_3'') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 2 \\ \frac{1}{R}(y_1' - y_2') - C_3(y_3'') = 0 \longrightarrow \text{ordre } 1 \end{cases}$$

donc on a bien un système d'équations d'ordre $\underline{\underline{5}}$ / 5 éléments réactifs

②



Noeud trivial

méthode des Noeuds :

noeud 1 : $\frac{1}{R} V_1 - C_1 \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} - \frac{1}{L_1}\int (V_1 - V_2) = 0$ → ordre 2

noeud 2 : $C_1 \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} + \frac{1}{L_1}\int (V_1 - V_2) - C_2 \frac{\partial (V_2 - V_3)}{\partial t} - \frac{1}{L_2}\int (V_2 - V_3) = 0$ → ordre 2

noeud 3 : $C_2 \frac{\partial (V_2 - V_3)}{\partial t} + \frac{1}{L_2}\int (V_2 - V_3) - C_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} = 0$ → ordre 2

mais si on combine l'équation 2 et l'équation 3 :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} V_1 - C_1 \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} - \frac{1}{L_1}\int (V_1 - V_2) = 0 & \rightarrow \text{ordre 2} \\ C_1 \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} + \frac{1}{L_1}\int (V_1 - V_2) - C_2 \frac{\partial (V_2 - V_3)}{\partial t} - \frac{1}{L_2}\int (V_2 - V_3) = 0 & \rightarrow \text{ordre 2} \\ C_1 \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} - C_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} = 0 & \rightarrow \text{ordre 0} \end{cases}$$

donc on tout système d'équation d'ordre 4 au lieu de 5.

27. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : CONCEPTS FONDAMENTAUX

27.1. Introduction :

Après avoir procédé pour une résolution sur le tas, nous allons maintenant introduire les notions formelles pour résoudre un système d'équations différentielles.

27.2. Élimination des équations différentielles d'ordre plus grand que 1 :

Il nous est plus facile de résoudre une équation du premier ordre. Aussi, une des techniques consiste à transformer une équation différentielle d'ordre n en un système de n équations d'ordre 1. Ainsi nous décomposons l'équation en sections, que nous pouvons résoudre au fur et à mesure, grâce à l'algèbre linéaire.

Si nous avons une équation de la forme :

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

où $y^{(n)}$ désigne la dérivée n$^{\text{ème}}$ de y, alors il nous suffit de poser :

$$\begin{cases} y_1 = y^{(0)} \\ y_2 = y^{(1)} \\ .... = ... \\ y_{n-1} = y^{(n-2)} \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y^{(1)} \\ y_2' = y^{(2)} \\ .... = ... \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ y_n' = y^{(n)} \end{cases}$$

Dès lors on peut écrire l'équation du système sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ . \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & 1 & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{f(t, y_1, y_2, ..., y_n)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

La diagonale principale ne comporte que des zéros et la sus-diagonale ne comporte que des 1. Seule la dernière ligne est spécifique : c'est l'équation de départ d'ordre n mais dont on a changé le nom des dérivées successives par des indices. Ainsi il revient à résoudre y en connaissant progressivement les primitives de $y^{(n)}$. Comme toutes ces variables $y^{(i)}$ sont inter-reliées par une relation différentielle, c'est pour ça que nous avons un système d'équations.

REMARQUE :

Le cas ci-dessus n'est qu'un cas particulier des systèmes du type :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ f_{n-1}(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

où nous faisons un abus de notation matricielle, car nous ne savons même pas si les fonctions $f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ sont linéaires. Et où les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ . \\ K_{n-1} \\ K_n \end{bmatrix}$$

27.3. Existence et unicité d'une solution :

THÉORÈME :

Si les fonctions $f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ sont toutes continues et possèdent des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_i}$ continues sur un domaine D de l'espace à $(n+1)$ dimensions formé par $(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ et contenant le point $(t_0, K_1, K_2, ..., K_n)$, alors le système possède une solution unique autour du point $(t_0, K_1, K_2, ..., K_n)$.

DÉMONSTRATION

Nous ne démontrerons pas le théorème car il exige des connaissances et le temps nécessaire au delà du niveau de ce cours. Vous devez néanmoins vous en servir pour déterminer si d'avance un système d'équations différentielles va donner une solution. Il suffit de se rappeler que le théorème est analogue à celui pour une seule équation différentielle du premier ordre et où il fallait $f(t, y_1)$ continue sur un intervalle $t \in D$ pour avoir au moins une solution et avoir la dérivée « partielle » $\dfrac{df(t, y_1)}{dy_1}$ continue pour avoir une solution unique.

27.4. Cas des systèmes d'équations linéaires :

Dès lors, nous pouvons utiliser la notation matricielle en toute légitimité puisque $f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ s'écrit :

$$f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n) = a_{k1}(t).y_1 + a_{k2}(t).y_2 + ... + a_{k(n-1)}(t).y_{n-1} + a_{kn}(t).y_n + g_k(t)$$

soit en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_k \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{k1}(t) & \cdots & a_{kj}(t) & \cdots & a_{kn}(t) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_j(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [Y'] = [A]*[Y] + [G]$$

On parle de système linéaire **homogène** si $[G]=[0]$, et de système linéaire **non homogène** lorsqu'au moins une des fonctions $g_j(t)$ n'est pas identiquement nulle (i.e. $[G]\neq[0]$).

27.5. Théorème d'existence et d'unicité (pour les équations linéaires) :

THÉORÈME

Si tous les coefficients $a_{kj}(t)$ sont continus et si tous les $g_j(t)$ sont continues sur l'intervalle ouvert $t \in \left]\alpha,\beta\right[$ et contenant le point $t=t_0$, alors le système d'équations différentielles linéaires admet une solution unique passant par le point $(t_0, K_1, K_2, ..., K_n)$.

ATTENTION :

Quand on parle de solution unique, c'est la solution particulière qui est unique. En fait solution particulière et solution unique sont synonymes.

27.6. Cas des systèmes linéaires homogènes :

THÉORÈME DE SUPERPOSITION :

Si $[Y_1]$ et $[Y_2]$ sont 2 formes solutions du système d'équations linéaires homogènes, alors leur combinaison linéaire $[Y_3]=k_1[Y_1]+k_2[Y_2]$ est aussi solution du même système d'équations.

DÉMONSTRATION :

En effet :

$$\begin{aligned} [Y_3'] &= k_1[Y_1'] + k_2[Y_2'] \\ &= k_1[A]*[Y_1] + k_2[A]*[Y_2] \\ &= [A]*\left(k_1[Y_1]+k_2[Y_2]\right) \\ [Y_3'] &= [A]*[Y_3] \end{aligned}$$

Donc $[Y_3]$ est solution du système d'équations homogènes.

On rappelle qu'une équation différentielle d'ordre n possède n formes solutions indépendantes et que la solution générale homogène est :

$$\left[Y_g\right]=c_1\left[Y_1\right]+c_2\left[Y_2\right]+....+c_n\left[Y_n\right]$$

(on l'écrivait $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ dans l'espace unidimensionnel, mais ici nous la notons sous forme d'un vecteur multidimensionnel. Il existe d'autres formes utilisées dans la littérature pour l'écriture d'un vecteur : $\vec{Y}_g = c_1\vec{Y}_1 + c_2\vec{Y}_2 + ... + c_n\vec{Y}_n$ ou $\boldsymbol{Y}_g = c_1\boldsymbol{Y}_1 + c_2\boldsymbol{Y}_2 + ... + c_n\boldsymbol{Y}_n$)

De même un système de n équations à n inconnues admet, si le déterminant de $[A]$ est non-nul, n vecteurs propres distincts.

$$\begin{cases} [Y'] = [A]*[Y] \\ \det([A]) \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n \quad \text{vecteurs propres distincts} \quad [Y_1] \neq [Y_2] \neq .... \neq [Y_n]$$

Le lien entre le système de n équations et l'équation d'ordre n devient évident lorsqu'on pose :

$$[Y_i] = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ . \\ y_{i(n-1)} \\ y_{in} \end{bmatrix} \quad , \quad avec \quad \begin{cases} y_{i1} = y_i^{(0)} \\ y_{i2} = y_i^{(1)} \\ . \\ y_{i(n-1)} = y_i^{(n-2)} \\ y_{in} = y_i^{(n-1)} \end{cases}$$

EXEMPLE :

Voici un exemple montrant le passage inverse d'un système de 2 équations d'ordre 1 vers une équation d'ordre 2 .

$$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 \\ y_2' = +2y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

SOLUTION :

La seule façon correcte est de procéder par substitution (élimination) :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y_1' + 5y_1) = y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1' + 5y_1)' = +2y_1 - \frac{3}{2}(y_1' + 5y_1) \end{cases}$$

soit : $\begin{cases} \frac{1}{2}(y_1' + 5y_1) = y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1'' + 5y_1') = +2y_1 - \frac{3}{2}(y_1' + 5y_1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(y_1' + 5y_1) = y_2 \\ y_1'' = -8y_1' - 11y_1 \end{cases}$

Pour vérifier que les vecteurs propres sont bien indépendants, on forme le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & . & y_{j1} & . & y_{n1} \\ y_{12} & . & . & . & y_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ y_{1(n-1)} & . & . & . & y_{n(n-1)} \\ y_{1n} & . & y_{jn} & . & y_{nn} \end{vmatrix}$$

or on avait dit que : $y_{jk} = y_j^{(k-1)}$, de sorte que ce déterminant s'avère être le Wronskien :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(0)} & . & y_j^{(0)} & . & y_n^{(0)} \\ y_1^{(1)} & . & . & . & y_n^{(1)} \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-2)} & . & . & . & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & . & y_j^{(n-1)} & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1,...,y_n)$$

Donc, on doit vérifier que le Wronskien est non-nul, si on veut prouver que les n vecteurs propres trouvés sont tous indépendants.

EXERCICES

Transformer les équations d'ordre n suivantes en un système d'équations d'ordre 1 ($[Y'(t)]=[A]*[Y(t)]$) :

1. $y^{(5)}+y^{(4)}-y'''+y''-y'+y=0$

2. $3y^{(4)}+2y^{(3)}-2y^{(2)}-4y^{(1)}+y^{(0)}=0$

3. $2y^{(4)}+4y^{(3)}-3y^{(2)}-1y^{(1)}+5y^{(0)}=x^2$

4. $2y^{(4)}+4y^{(3)}-3y^{(2)}-1y^{(1)}=2x$

5. $a_{44}y^{(4)}+a_{43}y^{(3)}+a_{42}y^{(2)}+a_{41}y^{(1)}=g(x)+h(x)$

QUESTIONS & PROBLÈMES

6. Soit une fonction échelon $U(t)$ dans l'équation linéaire suivante : $a_{44}y^{(3)}+a_{43}y^{(2)}+a_{42}y^{(1)}+a_{41}y^{(0)}=U(t)$. Indiquez le domaine de t où existera une solution singulière y_s.

7. Observez la forme de la matrice dans le cas d'une transformation d'une équation d'ordre n vers un système de n équations d'ordre 1. Indiquez à présent lesquels des systèmes ci-dessous permettent de retourner vers une équation d'ordre n :

a) $\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1'=y_1-y_2 \\ y_2'=y_1+y_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y_1'=y_1 \\ y_2'=y_2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_1+y_2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y_1'=y_1+y_2 \\ y_2'=y_1 \end{cases}$

SOLUTIONNAIRE

28. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES, HOMOGÈNES, ET À COEFFICIENTS CONSTANTS

28.1. Introduction :

Après les généralités sur les systèmes d'équations différentielles linéaires, voyons en détail comment nous pouvons résoudre ces équations lorsque les coefficients dans chaque équation sont des contantes.

28.2. Résolution des systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 dans l'espace des temps:

Si le système d'équation est :

$$[Y'] = [A]_{n\times n} * [Y] \quad , \quad avec \quad [A]_{n\times n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & . & j & . & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} & & . & & \\ & & . & & \\ . & . & a_{ij} & . & . \\ & & . & & \\ & & . & & \end{bmatrix} \end{array}, \quad et \quad a_{ij} = cte.$$

Alors on essaie la forme solution suivante :

$$[Y] = [X].e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad [Y'] = \lambda [X] e^{\lambda t}$$

de sorte qu'on obtient un système d'équations en $[X]$ au lieu de résoudre en $[Y]$:

$$[Y'] = [A]*[Y] \quad \Leftrightarrow \quad \lambda [X] e^{\lambda t} = [A]*[X] e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda [X] = [A]*[X]$$

(après élimination du facteur exponentiel $e^{\lambda t}$ des deux cotés de l'équation). Il s'agit donc de chercher les valeurs propres λ_j et les vecteurs propres associés $[X_j]$.

Si $[A]$ est une matrice inversible (i.e. $\det[A] \neq 0$), alors il y a n vecteurs propres distincts.

THÉORÈME :

Si la matrice $[A]$ est une matrice de constantes et inversible, alors le système possède n vecteurs propres distincts, et la forme générale de la solution homogène est alors :

$$[Y_g] = c_1 [X_1].e^{\lambda_1 t} + c_2 [X_2].e^{\lambda_2 t} + ... + c_n [X_n].e^{\lambda_n t}$$

REMARQUE

Le fait que $\left[A\right]$ soit symétrique est suffisant mais n'est pas une condition nécessaire pour qu'on ait n solutions indépendantes (distinctes) pour former une base de solutions. En effet si $\left[A\right]$ est symétrique, il est nécessairement inversible, alors les vecteurs propres sont orthogonaux entre-eux. Si $\left[A\right]$ est seulement inversible on aura quand même des vecteurs propres indépendants, sans qu'ils soient tous orthogonaux entre-eux.

28.3. Étude des différents cas possibles dans le plan des phases:

En ayant les solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ on peut former une courbe dans l'hyperplan $y_1 y_2 ... y_n$ qu'on appelle hyperplan des trajectoires (au sens des positions successives dans l'espace à n dimensions en fonction du paramètre qui est le temps) ou encore hyperplan des phases (au sens des étapes successives pour $y_1, y_2, ..., y_n$ dans le temps). Il existe plusieurs types de trajectoire selon les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

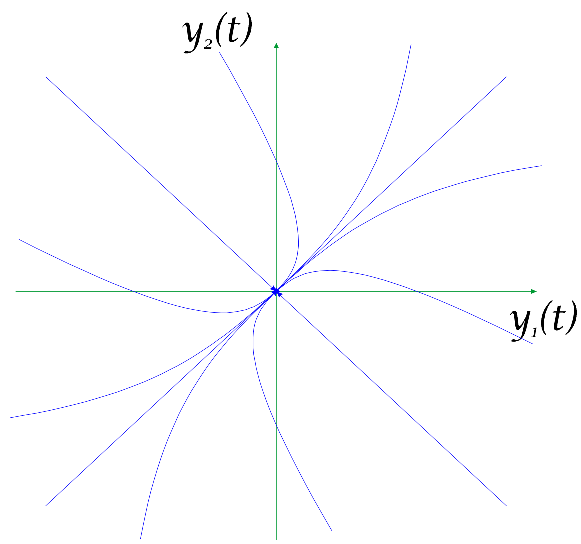
Pour simplifier quelque peu, nous allons discuter des cas possibles pour un système à 2 équations. Dans ce cas la solution générale est :

$$\left[Y_g\right] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

donc l'hyperplan $y_1 y_2 ... y_n$ devient tout simplement le plan $y_1 y_2$ (on laisse tomber le préfixe « hyper »)

Cas 1a : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$:

Dans ce cas nous avons un **nœud impropre** (dans notre exemple, il est situé à l'origine dans le plan $y_1 y_2$). Le nœud est dit impropre parce que toute trajectoire y converge au fur et à mesure que le temps passe (le big crunch en astrophysique). Les trajectoires peuvent converger en ligne droite ou en ligne courbe ne transgressant pas 1 cadran orienté.



EXEMPLE :

Soit à résoudre le système de 2 équations suivant : $[Y'] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} * [Y]$

SOLUTION :

Nous allons le résoudre selon la méthode des formes exponentielles et de diagonalisation . On pose donc :

$$[Y] = [X].e^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad [Y'] = \lambda.[X].e^{\lambda t}$$

et on obtient la nouvelle forme à résoudre:

$$\lambda.[X] = [A]*[X] \qquad \Leftrightarrow \qquad ([A] - \lambda[I])*[X] = [0]$$

pour qu'il existe des solutions non-triviales il faut que : $\det([A] - \lambda[I]) = 0$. Soit dans le cas particulier de notre problème :

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Pour obtenir ensuite les vecteurs propres, il faut réintroduire la valeur propre d'une des racines pour trouver le vecteur propre associé :

$$\lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_1[I])*[X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3+2 & 1 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\lambda_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_2[I])*[X_2] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3+4 & 1 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Et la solution générale de l'équation est :

$$\begin{aligned} [Y_g] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} &= [Y_h] + [Y_p] = c_1[Y_1] + c_2[Y_2] + [Y_p] = c_1[X_1].e^{\lambda_1 t} + c_2[X_2].e^{\lambda_1 t} + 0 \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.e^{-4t} \end{aligned}$$

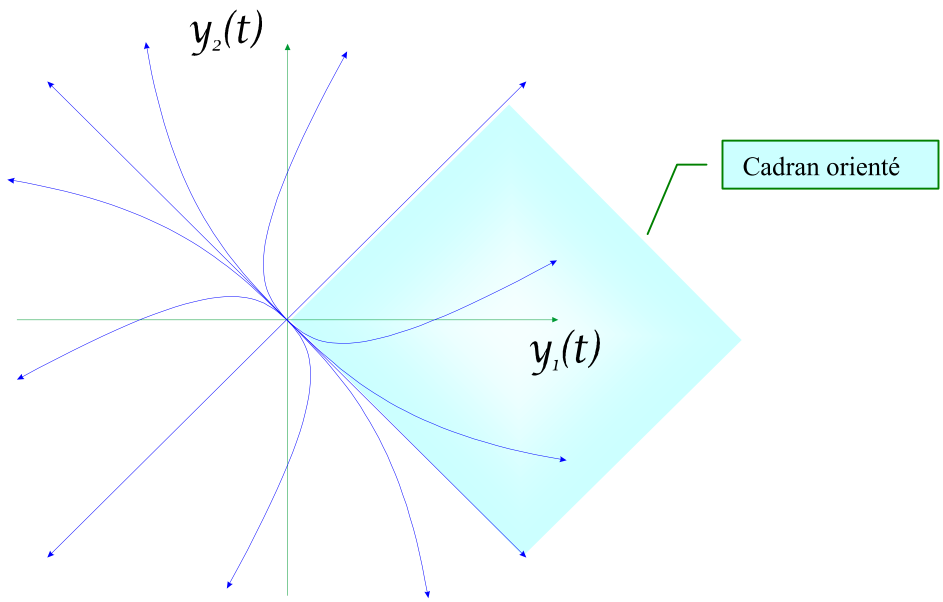
soit encore :

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} \\ y_2 = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t} \end{cases}$$

La solution particulière dépend de la valeur de c_1 et de c_2 qui sont imposées par les conditions initiales. Mais on voit que plus le temps s'écoule, y_1 et y_2 tendent vers zéro.

Cas 1b : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$:

Nous avons alors un **nœud propre** (dans cet exemple il est situé à l'origine du plan $y_1 y_2$). On parle de nœud propre parce que toute trajectoire est issue du point singulier et en diverge au fur et à mesure que le temps passe (le fameux big bang des astrophysiciens). Les trajectoires peuvent diverger en ligne droite ou en ligne courbe ne dépassant pas un cadran orienté.



EXEMPLE :

Soit à résoudre le système de 2 équations suivant : $[Y'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * [Y]$

SOLUTION :

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Pour obtenir ensuite les vecteurs propres, il faut réintroduire la valeur propre d'une des racines pour trouver le vecteur propre associé. Cette fois-ci, en réintroduisant le valeur propre qui est double, nous pouvons déterminer 2 vecteurs propres indépendants pour la même valeur propre.

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_1[I]) * [X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

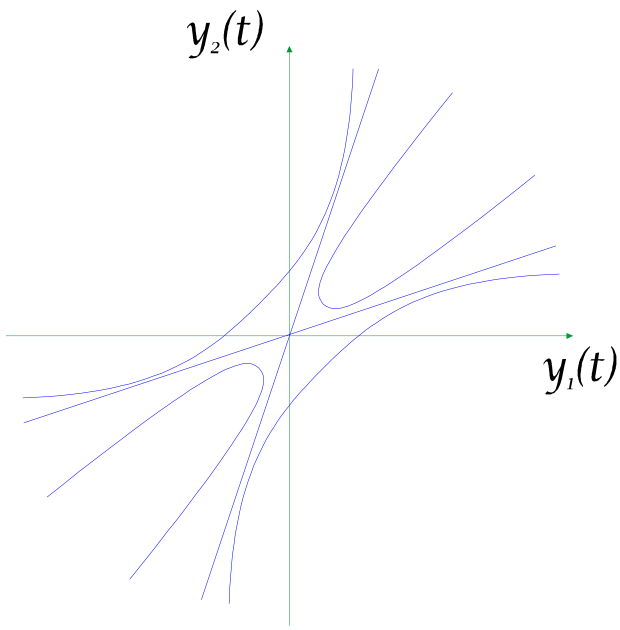
En fait, notre choix de ces vecteurs de base est très arbitraire, du moment qu'on s'arrange pour ces 2 vecteurs soit indépendants. Ici, on les a même choisis orthogonaux. Et la solution générale de l'équation est alors:

$$\left[Y_g\right]=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\underbrace{c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.e^t+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^t}_{\left[Y_h\right]}+\underbrace{0}_{\left[Y_s\right]}$$

On peut voir que la position de y_1 et de y_2 s'éloigne de l'origine au fur et à mesure que le temps passe.

Cas 1c : $\lambda_1>0$ et $\lambda_2<0$:

Dès lors nous avons un **point selle** (dans notre exemple, il est à l'origine du plan y_1y_2). La direction de l'axe principal dépend des coefficients fixés par les conditions initiales.



EXEMPLE :

Soit à résoudre le système de 2 équations : $\left[Y'\right]=\begin{bmatrix}2&-4\\1&-3\end{bmatrix}*\left[Y\right]$ avec les conditions initiales suivantes: $\left[Y\right]_{t=0}=\begin{bmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$.

SOLUTION :

$$\det(\left[A\right]-\lambda\left[I\right])=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}2-\lambda&-4\\1&-3-\lambda\end{vmatrix}=0=-(2-\lambda)(3+\lambda)+4 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=-2\end{cases}$$

d'où les vecteurs propres associés:

$$\lambda_1=1 \quad\Rightarrow\quad (\left[A\right]-\lambda_1\left[I\right])*\left[X_1\right]=\left[0\right] \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}2-1&-4\\1&-3-1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left[X_1\right]=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

et :

$$\lambda_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_2[I])*[X_2]=[0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2+2 & -4 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2]=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution générale est alors:

$$\left[Y_g\right] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

et en introduisant les conditions initiales :

$$\left[Y_g\right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(t=0)} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2.(t=0)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

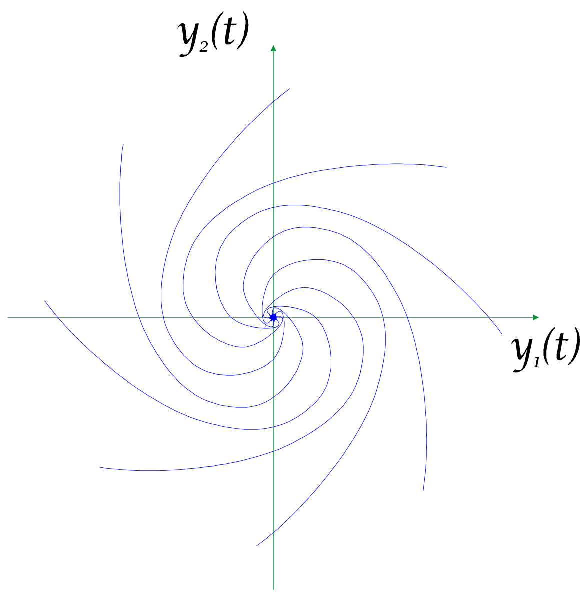
on obtient la solution particulière :

$$[Y_s] = \begin{bmatrix} y_{1s} \\ y_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} - c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Nous avons donc une hyperbole. (Exercice : tracer à la main l’allure de cette hyperbole, puis utiliser Mathcad, Matlab ou MapleV pour confirmer).

Cas 3 : $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$:

Alors nous avons un **point spirale impropre** si la partie réelle est négative (i.e. $\alpha < 0$). Nous avons un **point spiral propre** si la partie réelle est positive ((i.e. $\alpha > 0$).



EXEMPLE :

Soit à résoudre le système d'équations : $[Y'] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} * [Y]$

SOLUTION :

$$\det([A]-\lambda[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1+i \\ \lambda_2 = -1-i \end{cases}$$

d'où les vecteurs propres associés:

$$\lambda_1 = -1+i \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_1[I])*[X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1+1-i & 1 \\ -1 & -1+1-i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

et :

$$\lambda_2 = -1-i \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_2[I])*[X_2] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1+1+i & 1 \\ -1 & -1+1+i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

La solution générale est alors:

$$[Y_g] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t}(\cos t + i\sin t) + c_2 e^{-t}(\cos t - i\sin t) \\ c_1 i e^{-t}(\cos t + i\sin t) - c_2 i e^{-t}(\cos t - i\sin t) \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$[Y_g] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} = (c_1+c_2) \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\sin t \end{bmatrix} + i(c_1-c_2) \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix} = a.[U] + b.[V]$$

On constate que $[U]$ et $[V]$ forment aussi une base de solutions, puisque leur déterminant est non nul :

$$\det([U],[V]) = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{vmatrix} = e^{-2t} \neq 0$$

REMARQUE :

on peut vérifier que ce déterminant est égal au Wronskien puisque :

$$W(u,v) = W(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t & -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \end{vmatrix} = e^{-2t}$$

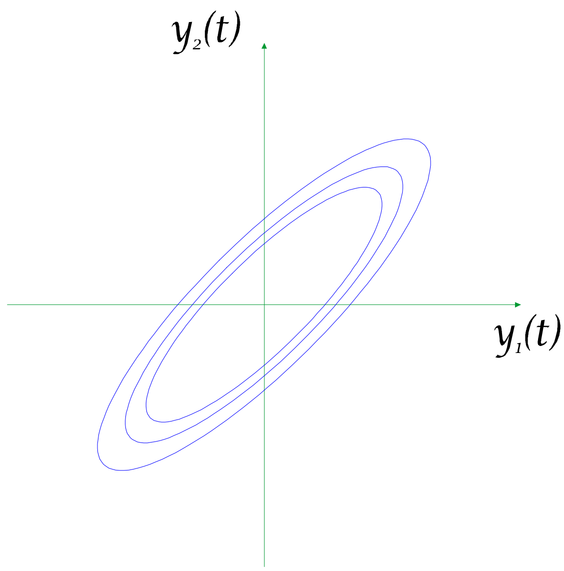
Afin de voir qu'il s'agit de spirales convergentes vers $(0,0)$, on doit passer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = (a^2 + b^2).e^{-2t} = r^2(t) \\ \arctan\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right) = -t = \theta(t) \end{cases}$$

On peut donc observer que le rayon s'amenuise au fur et à mesure que le temps passe à cause du terme exponentiel décroissant, tandis que l'angle varie linéairement avec le temps.

Cas 4 : $\lambda_1 = i\beta$ et $\lambda_2 = -i\beta$:

Alors, nous avons un **point centre** (dans notre exemple le centre de tous les cercles ou ellipses est à l'origine). Toute trajectoire varie autour sans jamais y converger.



EXEMPLE :

Soit à résoudre le système d'équations : $[Y'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} * [Y]$

SOLUTION :

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = (-\lambda)^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = +2i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

d'où les vecteurs propres associés:

$$\lambda_1 = +2i \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_1[I]) * [X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0-2i & 1 \\ -4 & 0-2i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

et :

$$\lambda_2 = -2i \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_2[I])*[X_2]=[0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0+2i & 1 \\ -4 & 0+2i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

La solution générale est alors:

$$[Y_g] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it} = \begin{bmatrix} c_1(\cos 2t + i\sin 2t) + c_2(\cos 2t - i\sin 2t) \\ 2c_1 i(\cos 2t + i\sin 2t) - 2c_2 i(\cos 2t - i\sin 2t) \end{bmatrix}$$

Soit encore :

$$[Y_g] = \begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix} = (c_1+c_2)\begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix} + i(c_1-c_2)\begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix} = a.[U]+b.[V]$$

Pour voir qu'ils s'agit d'ellipses, nous allons former la quadrique :

$$\begin{aligned} y_1 &= a.\cos 2t + b\sin 2t \quad \Rightarrow \quad y_1^2 = a^2\cos^2(2t) + b^2\sin^2(2t) + 2ab\cos 2t.\sin 2t \\ y_2 &= -2a.\sin t2t + 2b\cos 2t \quad \Rightarrow \quad y_2^2 = 4a^2\sin^2(2t) + 4b^2\cos^2(2t) - 8ab\cos 2t.\sin 2t \end{aligned}$$

d'où l'équation de la quadrique :

$$y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = (a^2+b^2) = cte.$$

28.4. Recherche des vecteurs propres dans le cas de valeurs propres multiples :

Dans certains cas de valeurs propres multiples, le fait de réintroduire la valeur propre λ_i de multiplicité m nous permet de trouver de façon évidente m vecteurs propres associés. En d'autres occasions, on ne les devine pas tous. Par essais et erreurs, on peut retomber sur un des vecteurs déjà trouvés. Il nous faut alors une méthode plus systématique qui nous permette de les déterminer tous, et qu'on soit sûr qu'ils sont tous indépendants.

Cas pour une racine double (m=2):

Supposons que nous ayons :

$$\det([A]-\lambda[I]) = ...(\lambda-\lambda_i)^2....$$

et que pour $\lambda=\lambda_i$, nous ayons trouvé seulement un vecteur propre associé $[X_{i1}]$ au lieu des 2 vecteurs linéairement indépendants $[X_{i1}]$ et $[X_{i2}]$ tels que : $\lambda_i[X_{i1}]=[A]*[X_{i1}]$ et $\lambda_i[X_{i2}]=[A]*[X_{i2}]$. On peut alors obtenir le 2ème vecteur propre en posant :

$$\begin{aligned} [Y_{i1}] &= [X_{i1}].e^{\lambda_i t} \\ [Y_{i2}] &= [X_{i2}].e^{\lambda_i t} = (t[I]+[K])*[X_{i1}].e^{\lambda_i t} = [M(t)]*[X_{i1}].e^{\lambda_i t} \end{aligned}$$

Où la matrice $[M(t)]$ est à coefficients non-constants du premier ordre de la forme :

$[M(t)] = t.[I]+[K]$. En réintroduisant cette forme de solution dans l'équation : $[Y'] = [A]*[Y]$, nous obtenons :

$$[Y_{i2}'] = [A]*[Y_{i2}] \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i.\underbrace{(t[I]+[K])}_{[M(t)]}*[X_{i1}].e^{\lambda_i t} + [I]*[X_{i1}].e^{\lambda_i t} = [A]*\left((t[I]+[K])*[X_{i1}].e^{\lambda_i t}\right)$$

Mais étant donné qu'on avait déjà :

$$\lambda_i [X_{i1}].e^{\lambda_i t} = [A]*[X_{i1}].e^{\lambda_i t}$$

On est alors amené à résoudre :

$$\lambda_i [K]*[X_{i1}]+[X_{i1}] = [A]*[K]*[X_{i1}]$$

C'est à dire finalement que nous devons chercher $[U] = [K]*[X_{i1}]$, tel qu'il satisfasse :

$$\lambda_i [U]+[X_{i1}] = [A]*[U] \qquad \Rightarrow \qquad ([A]-\lambda_i [I])*[U] = [X_{i1}]$$

Comme le déterminant de $([A]-\lambda_i [I])$ est nul, on trouvera toujours un vecteur $[U]$ quelque soit $[X_{i1}]$. Et alors la deuxième forme solution s'écrira:

$$\boxed{[Y_{i2}] = (t[I]+[K])*[X_{i1}].e^{\lambda_i t} = (t[X_{i1}]+[U]).e^{\lambda_i t}}$$

EXEMPLE :

Soit à résoudre: $[Y'] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}*[Y]$

SOLUTION :

$$\det([A]-\lambda [I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (4-\lambda)(2-\lambda)+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Le premier vecteur propre associé est :

$$\lambda_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad ([A]-\lambda_1 [I])*[X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Le second vecteur propre n'est pas évident, aussi nous appliquons la méthode préconisée :

$$([A]-\lambda_1 [I])*[U] = [X_1] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [U] = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Et la solution générale est alors:

$$[Y_g]=\begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{3t}+c_2\left(t.\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}\right)e^{3t}$$

Comme le choix pour α est complètement arbitraire, on peux le fixer à : $\alpha=0$, de sorte que la solution générale est :

$$[Y_g]=\begin{bmatrix} y_{1g} \\ y_{2g} \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{3t}+c_2\left(t.\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)e^{3t}$$

Cas pour un racine triple (m=3):

Supposons que nous ayons :

$$\det([A]-\lambda[I])=....(\lambda-\lambda_i)^3....$$

et que pour $\lambda=\lambda_i$, nous ayons trouvé déjà trouvé 2 vecteurs propres indépendants:

$$[Y_{i1}]=[X_{i1}].e^{\lambda_i t}$$
$$[Y_{i2}]=[X_{i2}].e^{\lambda_i t}$$

La 2$^{\text{ème}}$ forme solution aurait pu être devinée, ou alors trouvée systématiquement par l'exposé précédent:

$$[Y_{i2}]=(t[I]+[K])*[X_{i1}].e^{\lambda_i t}=(t[X_{i1}]+[U]).e^{\lambda_i t}$$

Alors la 3$^{\text{ème}}$ forme solution sera:

$$[Y_{i3}]=(\alpha[X_{i1}]+\beta[X_{i2}]).t.e^{\lambda_i t}+[V].e^{\lambda_i t}$$

avec:

$$\left([A]-\lambda_i[I]\right)*[V]=\alpha[X_{i1}]+\beta[X_{i2}]$$

RÉSUMÉ DU CHAPITRE :

La trajectoire dans un plan des phases est analogue au mouvement parabolique d'un obus dans l'espace xy. En principe, on a une fonction de position $x(t)$ et une fonction de position en $y(t)$. Il suffit alors d'exprimer une des fonctions inverses $t(x)$ et l'introduire dans la seconde : $y(t)=y(t(x))=y_1(x)$. Ainsi le temps devient paramètre et la position y est fonction de la position x.

Ici le temps reste le paramètre d'une trajectoire dans le plan y_1y_2. Nous avons alors présenté les différents cas de figure selon les valeurs propres d'un système d'équations différentielles où les inconnues sont $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

EXERCICES

Résoudre les systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 ci-dessous (**les équations sont d'ordre 1** mais comme il y a 2 équations par système, **le système est d'ordre 2**). Tracer les esquisses de trajectoires et indiquer le type de cas approprié (nœud propre, nœud impropre, point selle, point spirale, ou point centre):

1. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

QUESTIONS ET PROBLÈMES :

1. Mettre en correspondance les 5 cas de trajectoires dans le plan des phases $y_1 y_2$ et les 4 types de solution pour l'équation différentielle du second ordre. Expliquez le lien entre l'équation différentielle du second ordre et le système de 2 équations différentielles du premier ordre. Dressez alors un tableau des correspondances des valeurs (λ_1, λ_2) avec les paramètres (p, q, Δ) pour chaque type de cas (nœud propre, nœud impropre, point selle, point spirale, ou point centre)

2. Dans ce texte, les trajectoires illustrées pour un point Nœud propre sont des lignes courbes. Dans quel situation aurions nous un ensembles de trajectoires en ligne droite.

3. Démontrez que pour une racine triple: $\det([A]-\lambda[I]) = ...(\lambda-\lambda_i)^3....$, si on possède déjà les deux premières formes solutions: $[Y_{i1}] = [X_{i1}].e^{\lambda_i t}$, $[Y_{i2}] = [X_{i2}].e^{\lambda_i t}$, alors la 3$^{\text{ème}}$ forme solution, par la méthode de variation des contantes, est bien: $[Y_{i3}] = (\alpha[X_{i1}] + \beta[X_{i2}]).t.e^{\lambda_i t} + [V].e^{\lambda_i t}$

SOLUTIONNAIRE

29. MÉTHODE DES PLANS DE PHASE, POINTS CRITIQUES ET NOTION DE STABILITÉ D'UN SYSTÈME

Dans ce chapitre nous allons discuter de façon systématique l'évolution des solutions dans un système à 2 équations différentielles, le critère pour dire si un système est stable ou non, et l'existence de points dits critiques dans le plan des phases.

29.1. Méthode des plans de phase :

La méthode des plans de phase est une méthode numérique consistant à afficher les points de proche en proche à partir d'un point de départ. Dans cette méthode, on ne cherche pas à obtenir des expressions analytiques (mais une liste de valeurs (y_1, y_2) et un graphique (coordonnées dans le plan de phase). La méthode peut être appliquée manuellement, ou programmée sur l'ordinateur.

Soit par exemple le système suivant à résoudre :

$$[Y'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * [Y]$$

afin d'afficher l'évolution de $[Y]$ dans le temps, On part des conditions initiales qui est le point $[Y_0] = [Y]_{t=t_0} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$. De là, on regarde la pente : $\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{\frac{dy_2}{dt}}{\frac{dy_1}{dt}} = \dfrac{y_2'}{y_1'} = \dfrac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$ qui nous permet d'estimer le point $[Y_1]$ par extrapolation linéaire : $[Y_1] \approx [Y_0] + \begin{bmatrix} h \\ h.\left(\dfrac{a_{21}y_{01} + a_{22}y_{02}}{a_{11}y_{01} + a_{12}y_{02}}\right) \end{bmatrix}$ ou de façon générale :

$$[Y_{i+1}] \approx [Y_i] + \begin{bmatrix} h \\ h.\left(\dfrac{a_{21}y_{i1} + a_{22}y_{i2}}{a_{11}y_{i1} + a_{12}y_{i2}}\right) \end{bmatrix}$$

Étant donné que le rapport $\dfrac{a_{21}y_{01} + a_{22}y_{02}}{a_{11}y_{01} + a_{12}y_{02}}$ peut amener une indétermination à lever, nous devons discuter des cas où ce rapport se présente sous la forme $\dfrac{0}{0}$, ou $\dfrac{k}{0}$, ou $\dfrac{0}{k}$.

29.2. Définition d'un point critique:

Si en un point (y_{i1}, y_{i2}), la pente $\dfrac{a_{21}y_{i1} + a_{22}y_{i2}}{a_{11}y_{i1} + a_{12}y_{i2}}$ se présente sous une forme indéterminée, alors on parle de point critique dans les phases ou point singulier dans l'espace.

Un point critique peut être un point nœud (propre et impropre), un point selle, un point centre ou un point spirale. Chaque cas dépend des valeurs propres du déterminant :

$$\det([A]-\lambda[I]) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

En mettant sous la forme canonique suivante:

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0\,, \qquad avec \qquad \begin{cases} p = (a_{11}+a_{22}) = trace([A]) \\ q = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \det([A]) \end{cases}$$

on trouve que :

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0\,, \qquad avec \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{+p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{+p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \end{cases}$$

Dès lors, on a :

un nœud impropre (cas 1a : $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$) si : $p < 0 \quad et \quad q > 0 \quad et \quad \left(p^2 - 4q\right) \geq 0$

un nœud propre (cas 1b : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$) si : $p > 0 \quad et \quad q > 0 \quad et \quad \left(p^2 - 4q\right) \geq 0$

un point selle (cas 1c : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$) si : $p <> 0 \quad et \quad q < 0 \quad et \quad \left(p^2 - 4q\right) \geq 0$

un point spirale (cas 3 : $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$) si : $p <> 0 \quad et \quad q > 0 \quad et \quad \left(p^2 - 4q\right) < 0$

un point centre (cas 4 : $\lambda_1 = i\beta$ et $\lambda_2 = -i\beta$) si : $p = 0 \quad et \quad q > 0 \quad donc \quad \left(p^2 - 4q\right) < 0$

29.3. Critère de stabilité (selon Liapunov) :

Un point $[Y_i]$ du plan de phase est dit **stable** si le système tend de plus en plus vers cet état après disparition de la perturbation.

Un point $[Y_i]$ est dit de **stabilité limite** si le système ne tend vers aucun état précis mais reste dans le voisinage du point après disparition de la perturbation (reste en dedans d'un certain rayon à déterminer).

Un point $[Y_i]$ est dit **instable** lorsque le système s'éloigne de cet état au fur et à mesure que le temps passe.

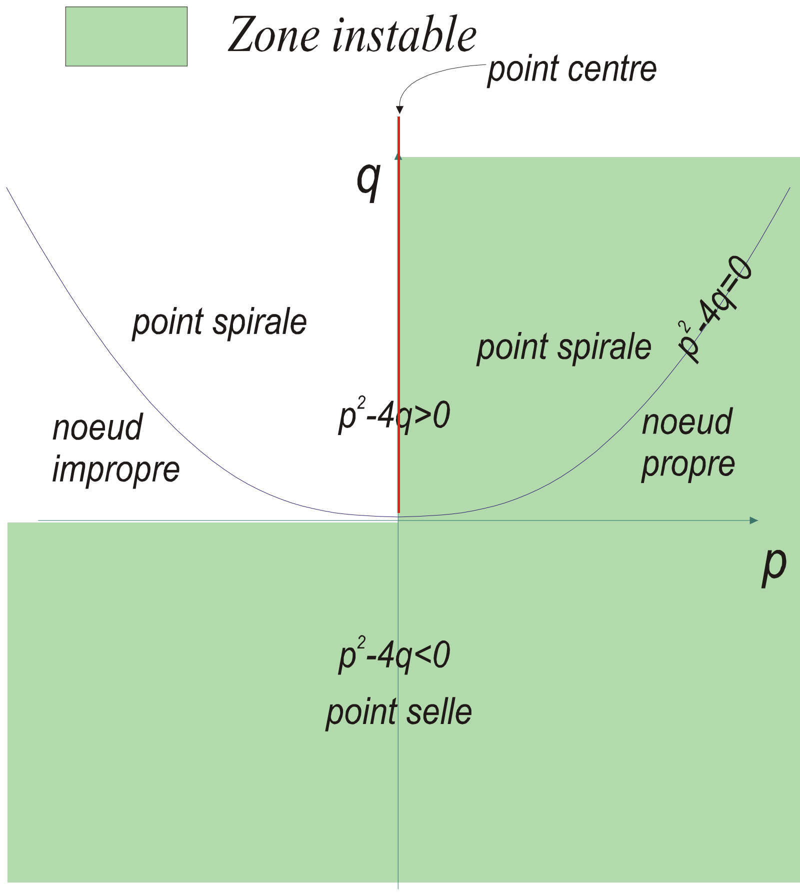
29.4. Relation entre la stabilité et les points critiques.

D'après l'analyse des racines (i.e. valeurs propres) on peut voir qu'un système est:

stable si : $p < 0 \quad et \quad q > 0$

de stabilité limite si : $p = 0$ *et* $q > 0$

instable si : $p > 0$ *ou* $q < 0$



Pour établir ce lien entre les critères de stabilité et les cas de figure, il suffit de remarquer que :

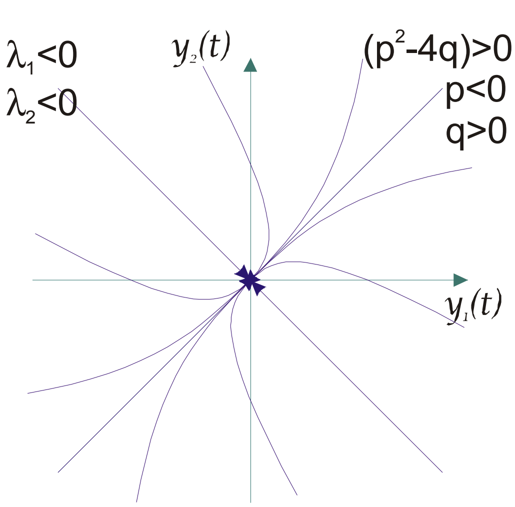
$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) &= \lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2\\ &= \lambda^2-p\lambda+q\end{aligned}$$

Donc p représente la somme des racines , et q représente le produit des racines. De sorte que :

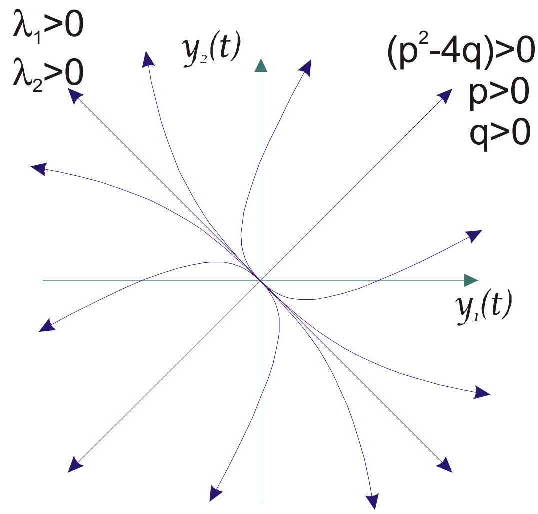
$q = \lambda_1\lambda_2$: *si* $q > 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ tous les 2 positifs.}\\ \bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ tous les 2 négatifs.}\\ \bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ complexes conjugués (donc ayant leur partie}\\ \text{réelle toutes deux positives ou toutes deux négatives).}\end{cases}$

$p = \lambda_1 + \lambda_2$: *si* $p < 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ tous les 2 négatifs.}\\ \bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ ont leur partie réelle négative.}\\ \bullet\ \text{La plus grande des 2 racines est négative.}\end{cases}$

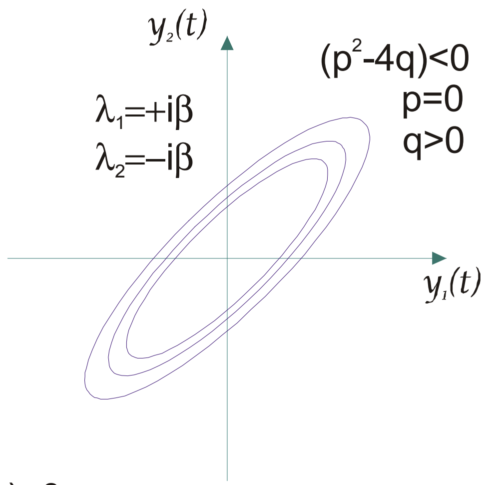
d'où la figure de résumé :



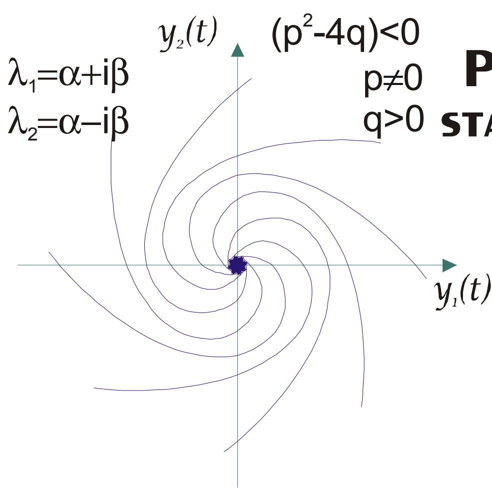
Noeud impropre Stable



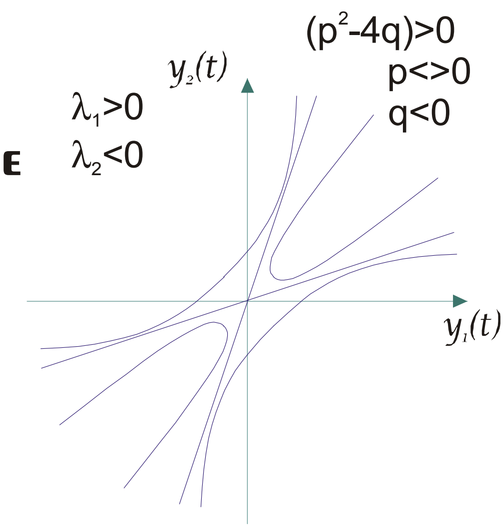
Noeud propre Instable



Point centre stabilité limite



Point spirale stable-Instable



Point selle Instable

EXEMPLE :

Appliquons le critère de stabilité au système suivant : $\left[Y'\right]=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}*\left[Y\right]$

SOLUTION :

Il ne s'agit pas de résoudre le système, mais seulement déterminer si le système sera stable ou non. Pour cela il faut exprimer le déterminant :

$$\det(\left[A\right]-\lambda\left[I\right])=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8=0$$

on identifie alors :

$$\left.\begin{array}{l} p=trace(A)=\lambda_1+\lambda_2=-6<0\\ q=\det(A)=\lambda_1\lambda_2=8>0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ de même signe}\\ \mathrm{p}^2-4q=4>0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ toutes les 2 négatives}$$

Ces critères montrent que le système comporte un nœud impropre, donc stable.

EXEMPLE :

Soit à doser le coefficient d'amortissement pour obtenir différent types de points critiques dans le système mécanique suivant :

$$y''+\frac{c}{m}y'+\frac{k}{m}y=0$$

SOLUTION :

Transformons cette équation du second ordre en un système à 2 équations :

$$\begin{bmatrix}y'\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}y\\ y'\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

Dès lors :

$$\begin{cases} p=-\dfrac{c}{m}\\ q=+\dfrac{k}{m}\\ \mathrm{p}^2-4q=\left(-\dfrac{c}{m}\right)^2-4\left(+\dfrac{k}{m}\right)\end{cases}$$

Les cas suivant se présentent :

pas d'amortissement (oscillation pure): $c = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q < 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{point centre} \\ \text{stabilité limite} \end{cases}$

sous-amorti (avec oscillation): $c^2 < 4km \quad \Rightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q > 0 \\ p^2 - 4q < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{point spirale} \\ \text{stable} \end{cases}$

amorti critique (sans oscillation) : $c^2 = 4km \quad \Rightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q > 0 \\ p^2 - 4q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{point noeud} \\ \text{stable} \end{cases}$

sur-amorti (décroissance la plus rapide) : $c^2 > 4km \quad \Rightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q > 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{point noeud} \\ \text{stable} \end{cases}$

EXERCICES

Résoudre les systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 ci-dessous (les équations sont d'ordre 1 mais comme il y a 2 équations par système, le système est d'ordre 2. Tracer les esquisses des trajectoires et déterminer le type de cas (point nœud, point selle, point spirale, ou point centre), et dire si le point est stable ou instable:

1. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

QUESTION & PROBLÈMES

1. Résumez de nouveau le tableau de relations entre les racines caractéristiques et la notion de stabilité (elle vous est déjà donnée dans une des figures dans ce chapitre).

2. Regarder dans le livre du Kreysig et donnez la terminologie anglaise utilisé pour les mots suivants: **stable, stabilité limite**, **instable**.

3. Au lieu de la matrice générale $[Y'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} * [Y] = [A] * [Y]$, qui donne les expressions suivantes de p et de q :

$$\begin{cases} p = (a_{11} + a_{22}) = trace([A]) \\ q = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \det([A]) \end{cases}$$

Quelle serait les expressions "simplifiées" de p et de q lorsque qu'on part d'une équation différentielle du second ordre suivante: $y'' - a_{12}y' - a_{11}y = 0$?

SOLUTIONNAIRE

30. APPLICATION DE LA MÉTHODE DES PLANS DE PHASE : LE MOUVEMENT DU PENDULE

Dans ce chapitre nous appliquons nos connaissances formelles aux systèmes physiques. Il s'agit du mouvement du pendule. Bien que les équations qui régissent son mouvement soient exactement non-linéaires, nous pouvons toutefois avoir une représentation très approchée de son mouvement réel et afficher son mouvement dans le plan des phases.

30.1. Modélisation du mouvement du pendule :

Le pendule consiste en une masse m qui oscille autour d'un axe horizontal retenue par une tige de longueur L. Il s'agit de déterminer le lieu et le type des points critiques.

Selon la seconde loi de Newton (force égale accélération), la force tangentielle (ici décomposée de la force de gravitation $F_g = m_g g$) provoque une accélération tangentielle du même corps. Donc à tout instant :

$$m_i \gamma_{cp} + m_g g_r = 0 = m_i L\theta'' + m_g g.\sin\theta$$

m_i désigne la masse d'inertie du corps qui a tendance à résister au mouvement, tandis que m_g est la masse pesante ou masse gravitationnelle qui subit l'attraction en présence d'une autre corps, en L'occurrence la terre. Soit donc l'équation, sous forme normalisée (en divisant par $m_i L$ 0:

$$\theta'' + k\sin\theta = 0\,, \quad k = \frac{m_g g}{m_i L}$$

C'est une équation non linéaire (à cause de $\sin\theta$) du second ordre, mais si l'angle de déplacement de la tige est très petit, on peut substituer $\sin\theta$ par θ. De sorte que nous obtenons une équation linéaire approximée pour les petits angles :

$$\theta'' + k\theta = 0\,, \quad k = \frac{m_g g}{m_i L}$$

La forme solution, approximée pour les petits angles, est alors connue :

$$\boxed{\theta_g = A\cos\sqrt{k}\,t + B\sin\sqrt{k}\,t}.$$

30.2. Points critiques dans la solution (linéaire) approximée:

Afin d'obtenir une figure dans le plan des phases, nous allons poser :

$$[Z] = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix}$$

de sorte que :

$$[Z'] = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = [A][Z]$$

en analysant les paramètres p et q :

$$\left. \begin{array}{l} p = trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 0 \\ q = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = k > 0 \\ \mathrm{p}^2 - 4q = -4k < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \lambda_1 = i\sqrt{k} \text{ et } \lambda_2 = -i\sqrt{k}$$

Ces critères montrent que le système comporte un point centre, donc de stabilité limite.

Cependant, si on retourne au système d'équations originales, on s'aperçoit que notre système linéaire est vrai au voisinage de $(z_1, z_2) = (\theta, \theta') = (0,0)$ mais est aussi vrai lorsque $(z_1, z_2) = (\theta, \theta') = (k \times 2\pi, 0)$, puisque :

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -k \sin z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [Z'] \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = [A][Z] \\ pour \quad \theta \approx 0 + 2k\pi \end{cases}$$

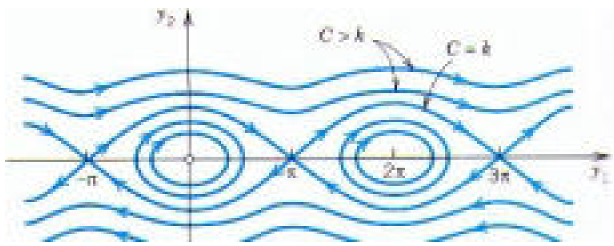
mais que nous avons également le système linéarisé suivant :

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -k\sin z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [Z'] \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = [A^*][Z] \\ pour \quad \theta \approx (2k+1)\pi \end{cases}$$

et en ces points $(z_1, z_2) = (\theta, \theta') = \big((2k+1)\pi, 0\big)$, nous avons plutôt un point selle instable, car les paramètres p et q sont :

$$\left.\begin{array}{l} p = trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 0 \\ q = \det(A) = \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -k < 0 \\ \mathrm{p}^2 - 4q = 4k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{k} > 0 \text{ et } \lambda_2 = \sqrt{k} < 0$$

Il s'ensuit pour résultat, les points critiques de la figure suivante :



30.3. Cas du pendule avec facteur d'amortissement

Dans la réalité, tout système mécanique comporte un terme de frottement $F_f = c\theta'$. De sorte que l'équation totale est :

$$\theta'' + c\theta' + k\sin\theta = 0 .$$

À cause de la physique réelle, les coefficients sont toujours de valeur positive ($c > 0$ et $k > 0$). Dès lors les équations pour le plan des phases sera :

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -k\sin z_1 - cz_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [Z'] \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = [A][Z] \\ pour \quad \theta \approx 0 + 2k\pi \end{cases}$$

et :

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -k\sin z_1 - cz_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} [Z'] \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +k & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = [A^*][Z] \\ pour \quad \theta \approx (2k+1)\pi \end{cases}$$

Et si nous caractérisons de nouveau les paramètres p et q :

$$\left.\begin{array}{l} p = trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = -c < 0 \\ q = \det(A) = \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = k > 0 \\ \mathrm{p}^2 - 4q = c^2 - 4k < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{c + i\sqrt{4k - c^2}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \dfrac{c - i\sqrt{4k - c^2}}{2} \\ pour \quad \theta \approx 0 + 2k\pi \end{cases}$$

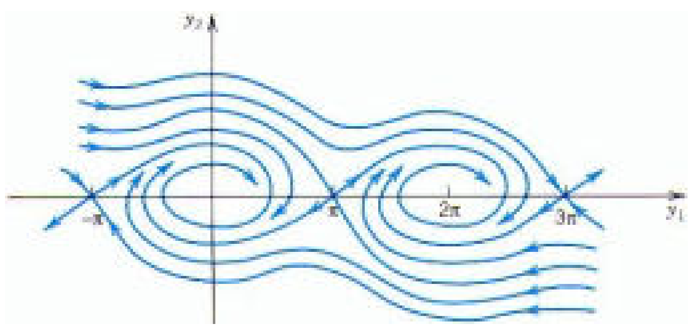
Nous avons des points spirale divergentes lorsque le frottement est très petit et que l'angle est proche de $\theta \approx 0 + 2k\pi$. Ces points spirales se morphent en points centre, lorsque le coefficient de frottement c disparaît complètement.

De même, nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l} p = trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = -c < 0 \\ q = \det(A) = \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -k < 0 \\ \mathrm{p}^2 - 4q = c^2 - 4k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{c + \sqrt{c^2 - 4k}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \dfrac{c - \sqrt{c^2 - 4k}}{2} \\ pour \quad \theta \approx (2k+1)\pi \end{cases}$$

c'est à dire des points selle autour des angles $\theta \approx (2k+1)\pi$.

D'où finalement le lieu des points critiques dans le plan des phases :



EXERCICES

Linéariser le problèmes suivants et tracer les solutions dans le plan des phase pour illustrer les points critique (vous pouvez utiliser ensuite phaseplot dans Maple pour confirmer l'allure des courbes).

1. $y''+y'+y^2=0$.

2. $y''+y'-\frac{1}{2}y^2=0$.

3. $y''+y'-y^3=0$.

4. $y''-9y'+y^3=0$.

5. $y''+4y'-5y^3+y^5=0$.

6. $y''+\cos y=0$.

QUESTION & PROBLÈMES

31. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET NON-HOMOGÈNES - MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

31.1. *Passage d'une équation différentielle d'ordre n au système à n équations d'ordre 1 :*

Nous allons montrer comment on peut transformer une équation différentielle, linéaire, non-homogène, d'ordre n en un système à n équations différentielles, linéaires, non-homogènes, d'ordre 1.

Soit donc une équation différentielle de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t).y^{(n-1)} + a_{n-2}(t).y^{(n-2)} + ... + a_{2)}(t).y^{(2)} + a_1(t).y^{(1)} + a_0(t)y = g(t)$$

en posant :

$$\begin{cases} y_1 = y^{(0)} \\ y_2 = y^{(1)} \\ .... = ... \\ y_{n-1} = y^{(n-2)} \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y^{(1)} \\ y_2' = y^{(2)} \\ .... = ... \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ y_n' = y^{(n)} \end{cases}$$

nous arrivons alors au système non homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0. & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & . & . & . & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

soit sous notation plus compacte :

$$[Y'(t)] = [A(t)]*[Y(t)] + [G(t)], \qquad avec \qquad [G(t)] \neq [0]$$

Pour résoudre un tel système, nous devons d'abord résoudre le système d'équations homogènes, c'est à dire trouver la solution homogène qui satisfasse :

$$[Y_h'(t)] = [A(t)]*[Y_h(t)]$$

(quand on parle de **la** solution ici, cela signifie **un vecteur** de fonctions solutions). Il s'agit ensuite de trouver une solution singulière qui satisfasse le système d'équations générales (non-homogènes) :

$$[Y_s'(t)] = [A(t)]*[Y_s(t)] + [G(t)]$$

Enfin on forme la solution générale :

$$[Y_g(t)] = [Y_h(t)] + [Y_s(t)]$$

et si le problème comporte des conditions initiales, on les introduit dans la solution générale pour fixer les constantes et trouver la solution particulière :

$$[Y_g(t=t_0)] = [K] \quad \Rightarrow \quad \text{fixation des constantes} \quad \Rightarrow \quad [Y_p(t)]$$

La recherche de la solution homogène a été expliquée dans un des chapitres précédents (chapitre 33), nous allons ici nous concentrer sur les méthodes d'obtention de la solution particulière.

31.2. Méthode des coefficients indéterminés :

La présente méthode ne s'applique que dans les circonstances où les coefficients de la matrice $[A]$ sont tous des constants. Il faut alors observer la forme de $[G(t)]$ et prendre pour $[Y_s(t)]$ une forme semblable qui comporte des coefficients à déterminer:

Si $[G_i(t)]$ est :	**prendre pour $[Y_{is}(t)]$**
Exponentielle : $[G_i]e^{\gamma t}$	Exponentielle : $[W_{i0}]e^{\gamma t}$
Polynôme : $[G_i]t^n$	Polynôme du même ordre: $[Wi_n]t^n + ... + [W_{i1}]t + [W_{i0}]1$
Polynôme modulé : $[G_i]t^n e^{\gamma t}$	Polynôme modulé : $([W_{in}]t^n + ... + [W_{i1}]t + [W_{i0}])e^{\gamma t}$
Sinusoïdale : $[G_i]\cos\omega t$ $[G_i]\sin\omega t$	Sinusoïdale : $[W_{ic}]\cos\omega t + [W_{is}]\sin\omega t$
Ondulation modulée : $[G_i]e^{\gamma t}\cos\omega t$ $[G_i]e^{\gamma t}\sin\omega t$	Ondulation modulée : $([W_{ic}]\cos\omega t + [W_{is}]\sin\omega t)e^{\gamma t}$

Bien sûr, cela se résume d'abord à séparer correctement dans $[G(t)]$ chaque terme polynomial, exponentiel ou sinusoïdal, avant de prendre une forme semblable pour chaque $[Y_{is}(t)]$:

$$[G(t)] = ... + [G_i]t^n + [G_{i+1}]e^{\gamma t} + [G_{i+2}]\cos\omega t + ...$$
$$\Downarrow$$
$$[Y_s(t)] = ... + ([W_{in}]t^n + ... + [W_{i1}]t + [W_{i0}]) + [W_{(i+1)0}]e^{\gamma t} + ([W_{(i+2)c}]\cos\omega t + [W_{(i+2)s}]\sin\omega t) + ...$$

Dans le cas d'une éventuelle dégénérescence (c'est à dire lorsque la forme à prendre pour $\left[Y_{i\,s}(t)\right]$ se retrouve déjà dans la solution homogène $\left[Y_{j\,h}(t)\right]$), il faut appliquer la règle déjà décrite pour une équation différentielle unique, c'est à dire multiplier la forme correspondante par un polynôme du même ordre que la dégénérescence : $\left[Y_{i\,s}(t)\right]=\left([W_i]t+[V_i]\right)\times$ forme correspondante à $\left[\mathrm{G}_i(t)\right]$ pour une dégénérescence simple, $\left[Y_{i\,s}(t)\right]=\left([W_i].t^2+[V_i].t+[U_i]\right)\times$ forme correspondante à $\left[\mathrm{G}_i(t)\right]$ pour une dégénérescence double, etc.

EXEMPLE : CAS SANS DÉGÉNÉRESCENCE

Soit à résoudre le système suivant : $[Y']=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{bmatrix}*[Y]+\begin{bmatrix}2t^2+10t\\ t^2+9t+3\end{bmatrix}$

SOLUTION :

Il faut toujours connaître les formes solutions de $[Y_h]$ d'abord, sinon on risque de ne pas détecter la dégénérescence :

$$[Y_h]=\begin{bmatrix}y_{1h}\\ y_{2h}\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}$$

La forme des composantes du vecteur $[G(t)]=\begin{bmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t^2+10t\\ t^2+9t+3\end{bmatrix}$ suggère donc:

$$\left.\begin{aligned}y_{1s}(t)=w_1t^2+v_1t+u_1\\ y_{2s}(t)=w_2t^2+v_2t+u_2\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad [Y_s(t)]=[W]t^2+[V]t+[U]$$

On réintroduit la forme de solution dans l'équation générale pour déterminer les vecteurs coefficients $[W]$, $[V]$ et $[U]$:

$$\left.\begin{aligned}&[Y_s(t)]=[W]t^2+[V]t+[U]\\ &[Y_s'(t)]=2[W]t+[V]\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left(2[W]t+[V]\right)=[A]*\left([W]t^2+[V]t+[U]\right)+[G(t)]$$

et comme les $1,t,t^2$ forment une base, on doit alors identifier les coefficients correspondants :

$$2[W]t+[V]=[A]*[W]t^2+[A]*[V]t+[A]*[U]+\underbrace{[G_2]t^2+[G_1]t+[G_0]}_{=[G(t)]}$$

$$avec\qquad [G(t)]=[G_2]t^2+[G_1]t+[G_0]=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}t^2+\begin{bmatrix}10\\ 9\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$$

on trouve donc un autre système de trois équations à trois inconnues (vectorielles):

$$\begin{cases} [0]=[A]*[W]+[G_2] \\ 2[W]=[A]*[V]+[G_1] \\ [V]=[A]*[U]+[G_0] \end{cases}$$

c'est à dire :

$$[0]=[A]*[W]+[G_2] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0=2w_1-4w_2+2 \\ 0=w_1-3w_2+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [W]=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2[W]=[A]*[V]+[G_1] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2(-1)=2v_1-4v_2+10 \\ 2(0)=v_1-3v_2+9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [V]=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[V]=[A]*[U]+[G_0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0=2u_1-4u_2+0 \\ 3=u_1-3u_2+3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [U]=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où la solution générale est :

$$[Y_g(t)]=[Y_h(t)]+[Y_s(t)]=c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}t^2+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLE : CAS AVEC DÉGÉNÉRESCENCE

Soit à résoudre : $[Y']=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}*[Y]+\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-2t}$

SOLUTION :

1) Recherche de la solution homogène :

Il faut toujours établir la solution homogène avant de rechercher de la solution particulière lorsqu'on utilise la méthode des coefficients indéterminés. Le solution homogène a déjà été obtenue dans un exemple précédent :

$$[Y_h]=\begin{bmatrix} y_{1h} \\ y_{2h} \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t}$$

2) Recherche de la solution particulière :

La forme exponentielle de $[G(t)]$ se retrouve dans l'expression de la solution homogène, aussi devons-nous lever la dégénérescence en modifiant la forme de $[Y_s(t)]$ comme suit :

$$\left.\begin{aligned} [Y_s(t)]&=(t[W]+[V])e^{-2t} \\ [Y_s'(t)]&=([W]-2t[W]-2[V])e^{-2t} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad ([W]-2t[W]-2[V])e^{-2t}=[A]*(t[W]+[V])e^{-2t}+[G_0]e^{-2t}$$

et par identification des termes :

$$\begin{array}{r} t \\ 1 \end{array}\begin{cases} -2[W]=[A]*[W]+[0] \\ [W]-2[V]=[A]*[V]+[G_0] \end{cases}$$

c'est à dire :

$$-2[W]=[A]*[W]+[0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2w_1 = -3w_1 + 1w_2 + 0 \\ -2w_2 = 1w_1 - 3v_2 + 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [W]=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$[W]-2[V]=[A]*[V]+[G_0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha - 2v_1 = -3v_1 + 1v_2 - 6 \\ \alpha - 2v_2 = 1v_1 - 3v_2 + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [V]=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Pour avoir une solution pour $[V]$ nous devons imposer $\alpha = -2$ sinon l'équation en $[V]$ est impossible à résoudre Donc :

$$[W]=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[W]-2[V]=[A]*[V]+[G_0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2 - 2v_1 = -3v_1 + 1v_2 - 6 \\ -2 - 2v_2 = 1v_1 - 3v_2 + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [V]=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta \\ \beta + 4 \end{bmatrix}$$

D'où la solution générale :

$$\left[Y_g(t)\right]=\left[Y_h(t)\right]+\left[Y_s(t)\right]=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t}+t\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix} \beta \\ \beta+4 \end{bmatrix}e^{-2t}$$

QUESTION :

Se peut-il que la solution particulière (qui est sensée être la solution unique) ne soit pas unique, à cause du choix pour β. Essayez en fixant les 2 conditions initiales. Y-a-t'il des contraintes quand à la valeur que peut prendre β ? repensez à ce que nous avons fait pour α.

EXERCICES

Trouver la solution générale par la méthode des coefficients indéterminés pour les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y_1' = y_2 + 2e^{2t} \\ y_2' = y_1 - 3e^{2t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 1 - 3t^2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 3\cos t \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 - 2\cos t - \sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2\cosh t \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 + \cosh t + 2\sinh t \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = y_2 - 3\sin t \\ y_2' = -4y_1 + 5\cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + e^{t} \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 - 3e^{t} \end{cases}$

Trouver la solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés pour les systèmes avec conditions initiales suivants :

7. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + t^2 \\ y_2' = -3y_1 + 2t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 6t \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - t^2 + t - 1 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + \sin t \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + \cos t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1' = y_2 - \sin t \\ y_2' = -y_1 + \cos t + \sin t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = -2 \end{cases}$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

32. RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES NON-HOMOGÈNES

32.1. Méthode de la variation des paramètres (variation de la constante).

La présente méthode est beaucoup plus générale que la méthode des coefficients indéterminés. Elle s'applique aussi bien aux systèmes à **coefficients non-constants** qu'aux systèmes à coefficients constants.

$$\left[Y'(t)\right]=\left[A(t)\right]*\left[Y(t)\right]+\left[G(t)\right], \quad avec \quad \left[G\right]\neq\left[0\right] \quad et \quad \left[A(t)\right]\neq\left[cte\right]$$

Dans cette méthode-ci, on essaie de construire la solution singulière à partir des formes de la solution homogène. Pour cela, on se rappellera que dans le cas d'une seule équation du second ordre, la forme de la solution singulière était construite comme étant :

$$y_s(t)=-y_1\cdot\int\frac{y_2.g(t).dt}{y_1y'_2-y'_1\,y_2}+y_2\cdot\int\frac{y_1.g(t).dt}{y_1y'_2-y'_1\,y_2}$$

avec $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les formes solutions indépendantes de l'équation homogène :

$$y_h(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$$

On se rappellera aussi, lorsqu'on avait converti cette équation du second ordre en un système à 2 équations du premier ordre, la forme de la solution homogène était :

$$\left[Y_h(t)\right]=c_1\left[Y_1(t)\right]+c_2\left[Y_2(t)\right], \quad avec \quad \left[Y_h(t)\right]=\begin{bmatrix}y_h(t)\\ y_h'(t)\end{bmatrix}, \qquad \left[Y_1(t)\right]=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_1'(t)\end{bmatrix}, \quad \left[Y_2(t)\right]=\begin{bmatrix}y_2(t)\\ y_2'(t)\end{bmatrix}$$

Soit en généralisant sous forme vectorielle pour un système à n équations d'ordre 1:

$$\left[Y_h(t)\right]=c_1\left[Y_1(t)\right]+\ldots+c_k\left[Y_k(t)\right]+\ldots+c_n\left[Y_n(t)\right], \quad avec \quad \left[Y_h(t)\right]=\begin{bmatrix}y_h(t)\\ .\\ y_h^{(k)}(t)\\ .\\ y_h^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}, \quad \left[Y_k(t)\right]=\begin{bmatrix}y_k(t)\\ .\\ y_k^{(k)}(t)\\ .\\ y_k^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}$$

c'est à dire, sous forme matricielle :

$$\left[Y_h(t)\right]=\left[\mathfrak{Y}(t)\right]*\left[C\right], \quad avec \quad \left[\mathfrak{Y}(t)\right]=\begin{bmatrix}y_1(t) & . & y_k(t) & . & y_n(t)\\ . & . & . & . & .\\ y_1^{(k)}(t) & . & y_k^{(k)}(t) & . & y_n^{(k)}(t)\\ . & . & . & . & .\\ y_1^{(n-1)}(t) & . & y_k^{(n-1)}(t) & . & y_n^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}, \quad et \quad \left[C\right]=\begin{bmatrix}c_1\\ .\\ c_2\\ .\\ c_n\end{bmatrix}$$

Dès lors on essaie la forme suivante pour solution singulière :

$$[Y_s(t)] = \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U(t)], \quad avec \quad \left[\mathfrak{Y}(t)\right] = \begin{bmatrix} y_1(t) & . & y_k(t) & . & y_n(t) \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(k)}(t) & . & y_k^{(k)}(t) & . & y_n^{(k)}(t) \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(t) & . & y_k^{(n-1)}(t) & . & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad et \quad [U(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ . \\ u_2(t) \\ . \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

C'est à dire qu'on a substitué la constante $[C]$ par $[U(t)]$ (c'est ça, la méthode de la variation de la constante) . De sorte que par substitution dans l'équation générale (vectorielle) :

$$\left.\begin{array}{l} [Y_s(t)] = \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U(t)] \\ [Y_s'(t)] = \left[\mathfrak{Y}'(t)\right] * [U(t)] + \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U'(t)] \\ [Y_s'(t)] = [A] * [Y_s(t)] + [G(t)] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[\mathfrak{Y}'(t)\right] * [U(t)] + \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U'(t)] = [A] * \left(\left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U(t)] + [G(t)]\right)$$

Or on sait que :

$$[Y_1'(t)] = [A] * [Y_1(t)], \quad ... \quad , \qquad [Y_k'(t)] = [A] * [Y_k(t)], \quad ... \quad , \quad [Y_n'(t)] = [A] * [Y_n(t)]$$

c'est à dire qu'on a :

$$\left[\mathfrak{Y}'(t)\right] = [A] * \left[\mathfrak{Y}(t)\right]$$

et le système d'équations se réduit à :

$$\left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [U'(t)] = [G(t)] \qquad \Rightarrow \qquad [U'(t)] = \left[\mathfrak{Y}(t)\right]^{-1} * [G(t)]$$

La matrice inverse de $\left[\mathfrak{Y}(t)\right]$ existe puisque son déterminant (le Wronskien) est non-nul puisque formé par des vecteurs solutions $[Y_k(t)]$ tous indépendants.

Et le vecteur non-constant $[U(t)]$ recherché vaut alors :

$$[U(t)] = \left(\int_{t_0}^{t} \left[\mathfrak{Y}(\tau)\right]^{-1} * [G(\tau)].d\tau \right) + [C_s]$$

d'où la forme de la solution singulière :

$$[Y_s(t)] = \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * \left(\int_{t_0}^{t} \left[\mathfrak{Y}(\tau)\right]^{-1} * [G(\tau)].d\tau \right) + \left[\mathfrak{Y}(t)\right] * [C_s]$$

et la solution générale sera :

$$\left[Y_g(t)\right]=\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]*\left(\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{\Upsilon}(\tau)\right]^{-1}*\left[G(\tau)\right].d\tau\right)+\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]*\underbrace{\left[C_g\right]}_{=[C]+[C_s]}$$

Qu'on peut aussi mettre sous la forme:

$$\boxed{\left[Y_g(t)\right]=\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]*\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\left[adj\left(\boldsymbol{\Upsilon}(\tau)\right)\right]*\left[G(\tau)\right]}{W}d\tau\right)+\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]*\left[C_g\right]}$$

Pour mieux faire ressortir ce qui a déjà été vu avec la solution singulière de l'équation du second ordre.

EXEMPLE : CAS D'UN SYSTÈME DU SECOND ORDRE

Soit à trouver la solution singulière du système suivant par la méthode de la variation de la constante :

$$[Y']=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}*[Y]+\begin{bmatrix}-6\\ 2\end{bmatrix}e^{-2t}$$

SOLUTION :

1) Recherche de la solution homogène :

Il faut auparavant obtenir la solution homogène, puisqu'on a besoin de connaître les formes solutions indépendantes $\left[Y_k(t)\right]$ pour construire $\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]$. Cette solution ayant déjà été trouvée dans un exercice précédent :

$$\left[Y_h(t)\right]=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-4t}$$

2) Recherche de la solution singulière par la méthode de la variation de la constante (variation des paramètres) :

$$\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]=\begin{bmatrix}e^{-2t} & e^{-4t}\\ e^{-2t} & -e^{-4t}\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]^{-1}=\frac{1}{-2e^{-6t}}\begin{bmatrix}-e^{-4t} & -e^{-4t}\\ -e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{2t}\\ e^{4t} & -e^{4t}\end{bmatrix}$$

de sorte que :

$$\left[\boldsymbol{\Upsilon}(t)\right]^{-1}*\left[G(t)\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{2t}\\ e^{4t} & -e^{4t}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -4e^{2t}\end{bmatrix}$$

et :

$$\left[U(t)\right]=\int_{\tau=0}^{\tau=t}\begin{bmatrix}-2\\ -4e^{2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}-2t\\ -2e^{2t}+2\end{bmatrix}$$

Remarquez le choix particulier du temps $t_0=0$, et on ne s'occupe plus de la constante d'intégration qui sera incluse dans la solution générale. On obtient alors pour solution singulière :

$$[Y_s(t)] = \left[\mathfrak{Y}(t)\right]*[U(t)] = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2\tau}+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$
$$= 2t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

et la solution générale est alors :

$$\left[Y_g(t)\right] = [Y_h(t)] + [Y_s(t)] = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} + -2t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

On voit que c'est exactement la même solution générale que dans l'exemple par la méthode des coefficients indéterminés (il suffit de désigner ici $c_2' = c_2 + 2$ pour obtenir exactement la même expression).

32.2. Méthode de diagonalisation

Dans cette méthode, on procède à un changement de base, de telle sorte que le système d'équations, exprimée dans cette nouvelle base se résume à n équations chacune comportant une seule inconnue. Pour ce faire, la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base peut-être obtenue, soit par la méthode de Gauss-Lagrange (par transformations simultanées et symétriques des lignes et des colonnes sur la matrice augmentée) comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{n\times n} & | & I \\ -- & + & -- \\ I & | & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \xrightarrow[\textit{lignes}]{} \begin{bmatrix} T_{\text{sup}} & | & X^{-1} \\ -- & + & -- \\ I & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textit{colonnes}]{} \begin{bmatrix} D & | & X^{-1} \\ -- & + & -- \\ X & | & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice augmentée

Ou encore par l'assemblage des vecteur propres.

Matrice de départ

RAPPEL :

La matrice de passage $[X]$ de l'ancienne base vers la nouvelle base sert à exprimer les composantes d'un vecteur de la nouvelle base dans l'ancienne base. C'est à dire que la matrice de passage $[X]$ est constituée des vecteurs propres.

Donc si l'équation de départ était :

Matrice de changement de base

$$[Y'(t)] = [A]*[Y(t)] + [G(t)]$$

en appliquant la transformation à gauche de façon à transférer le problème dans la nouvelle base :

$$\underbrace{[X]^{-1}*[Y'(t)]}_{=[Z'(t)]} = [X]^{-1}*[A]*\underbrace{[X]*[X]^{-1}}_{=[I]}*[Y(t)] + [X]^{-1}*[G(t)]$$

Introduit pour le calcul

$$= \underbrace{[X]^{-1}*[A]*[X]}_{=[D]}*\underbrace{[X]^{-1}*[Y(t)]}_{=[Z(t)]} + \underbrace{[X]^{-1}*[G(t)]}_{=[H(t)]}$$

Soit :

$$[Z'(t)] = [D]*[Z(t)] + [H(t)], \quad avec \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & \lambda_k & 0 & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et les solutions seront, dans cette nouvelle base :

$$z_k'(t) = \lambda_k z_k(t) + h_k(t) \qquad \Rightarrow \qquad z_k(t) = c_k e^{\lambda_k t} + e^{\lambda_k t} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} e^{-\lambda_k \tau} h_k(\tau) d\tau$$

Pour obtenir ensuite les solutions dans l'ancienne base, il suffit de re-multiplier toujours à gauche par la matrice de passage $[X]$:

$$[Y(t)] = [X]*[X]^{-1}*[Y(t)] = [X]*[Z(t)] = [X_1] z_1(t) + ... + [X_k] z_k(t) + ... + [X_n] z_n(t)$$

$$= \underbrace{c_1 [X_1] e^{\lambda_1 t} + ... + c_k [X_k] e^{\lambda_k t} + ... + c_n [X_n] e^{\lambda_n t}}_{[Y_h(t)]} + \underbrace{[X_1] e^{\lambda_1 t} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} e^{-\lambda_1 \tau} h_1(\tau) d\tau + ... + [X_k] e^{\lambda_k t} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} e^{-\lambda_k \tau} h_k(\tau) d\tau + ...}_{[Y_s(t)]}$$

EXEMPLE :

Reprenons le système déjà connu : $[Y'] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} * [Y] + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

SOLUTION :

1) Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de $[A] - \lambda [I]$:

$$\det([A] - \lambda [I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 6\lambda - 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Pour obtenir ensuite les vecteurs propres, il faut réintroduire la valeur propre d'une des racines pour trouver le vecteur propre associé :

$$\lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_1 [I]) * [X_1] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3+2 & 1 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\lambda_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad ([A] - \lambda_2 [I]) * [X_2] = [0] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3+4 & 2 \\ 2 & -3+4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) Construire les matrices de passage et la matrice diagonale :

$$[X]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [X]^{-1}=\frac{1}{\det X}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

et :

$$[D]=[X]^{-1}*[A]*[X]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

alors :

$$[H]=[X]^{-1}*[G]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2e^{-2t}\\ -4e^{-2t}\end{bmatrix}$$

et la solution dans la nouvelle base est :

$$[Z'(t)]=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}*[Z(t)]+\begin{bmatrix}-2e^{-2t}\\ -4e^{-2t}\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [Z_g(t)]=\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-2te^{-2t}\\ c_2e^{-4t}-2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

et la solution recherchée en $[Y_g(t)]$ est alors :

$$[Y_g(t)]=[X]*[Z_g(t)]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-2te^{-2t}\\ c_2e^{-4t}-2e^{-2t}\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-4t}-2t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}-2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-2t}$$

Ce qui est exactement le même résultat qu’on avait déjà obtenu par la méthode de variation des paramètres.

EXERCICES

Trouver la solution générale par la méthode de variation des paramètres, puis par la méthode de diagonalisation pour les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y_1' = y_2 + 2e^{2t} \\ y_2' = y_1 - 3e^{2t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 1 - 3t^2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 3\cos t \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 - 2\cos t - \sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2\cosh t \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 + \cosh t + 2\sinh t \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = y_2 - 3\sin t \\ y_2' = -4y_1 + 5\cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + e^t \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 - 3e^t \end{cases}$

Trouver la solution particulière par la méthode de variation des paramètres, puis par la méthode de diagonalisation pour les systèmes avec conditions initiales suivants :

7. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + t^2 \\ y_2' = -3y_1 + 2t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 6t \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - t^2 + t - 1 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + \sin t \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + \cos t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1' = y_2 - \sin t \\ y_2' = -y_1 + \cos t + \sin t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = -2 \end{cases}$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

33. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES NON-HOMOGÈNES

33.1. Méthode utilisant la transformée de Laplace

La transformée de Laplace peut être appliquée pour résoudre un système d'équation différentielles non-homogène. Comme pour le cas d'une seule équation différentielle, elle nous permet de trouver directement la solution particulière.

Soit alors un système d'équations de la forme linéaire à coefficients constants suivant :

$$[Y'(t)] = [A]*[Y(t)] + [G(t)], \quad avec \quad [G(t)] \neq [0] \quad et \quad [A] \equiv [cte]$$

L'application de la transformée de Laplace nous conduit à :

$$s[\mathcal{Y}(s)] - [Y(t=0)] = [\mathcal{A}]*[\mathcal{Y}(s)] + [\mathcal{G}(s)], \quad avec \quad [\mathcal{G}(s)] = \mathcal{L}[G(t)] \quad et \quad [\mathcal{A}] = \mathcal{L}[A]$$

De sorte que la solution $[\mathcal{Y}(s)]$ recherchée dans l'espace des phases est :

$$\boxed{([\mathcal{A}] - s[I])*[\mathcal{Y}_p(s)] = -[\mathcal{G}(s)] - [Y(t=0)]}$$

Une fois que le vecteur $[\mathcal{Y}_p(s)]$ est trouvée dans l'espace des phases, il suffit de reconvertir chacun des éléments de ce vecteur vers l'espace des temps :

$$[Y_p(t)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Y}_p(s)]$$

33.2. Résultats formels pour un système à 2 équations :

Le système se présente sous la forme :

$$[Y'] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}*[Y] + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Par transformation de Laplace et développement du produit matriciel :

$$\begin{aligned} s\mathcal{Y}_1(s) - y_1(0) &= a_{11}\mathcal{Y}_1(s) + a_{12}\mathcal{Y}_2(s) + \mathcal{G}_1(s) \\ s\mathcal{Y}_2(s) - y_2(0) &= a_{21}\mathcal{Y}_1(s) + a_{22}\mathcal{Y}_2(s) + \mathcal{G}_2(s) \end{aligned}$$

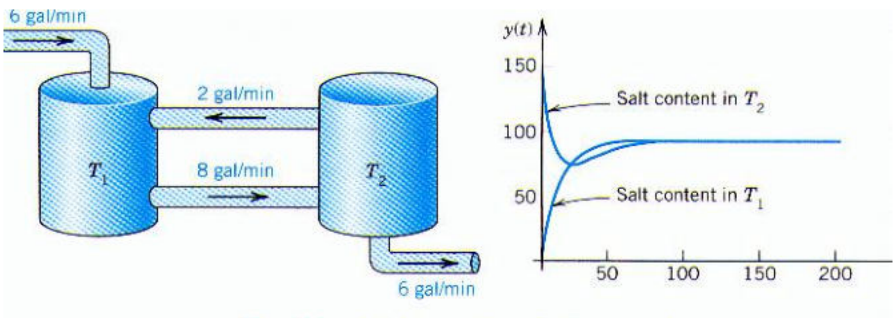
Ou encore :

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)\mathcal{Y}_1(s) + \quad a_{12}\mathcal{Y}_2(s) &= -\mathcal{G}_1(s) - y_1(0) \\ a_{21}\mathcal{Y}_1(s) \quad + (a_{22} - s)\mathcal{Y}_2(s) &= -\mathcal{G}_2(s) - y_2(0) \end{aligned}$$

Il suffit de déterminer les inconnues $\mathcal{Y}_1(s)$ et $\mathcal{Y}_2(s)$ par une méthode quelconque (diagonalisation, substitution, comparaison, méthode de Cramer, etc.) puis de convertir les réponses dans l'espace des temps.

EXEMPLE : PROBLÈME DE MÉLANGE COMPORTANT DEUX RÉSERVOIRS

Soit un réservoir T_1 contenant 100 litres d'eau pure. Un second réservoir T_2 contient aussi 100 litres d'eau, mais dans lequel on a dissous 150 kilogrammes de sel. Le réservoir T_1 est alimentée par une tubulure à raison de 8 litres/minute depuis l'aqueduc, et à raison de 2l/minute depuis le réservoir T_2. Une autre tubulure refoule à raison de 8 litres/minutes depuis le réservoir T_1 vers T_2. Finalement, pour maintenir l'équilibre dans la contenance des réservoir, le réservoir T_2 doit bien sûr refouler 8 litres/minutes dans le système d'égout. La concentration de sel dans les réservoirs est homogénéïsé par brassage mécanique. Trouver les quantités de sel $y_1(t)$ et $y_2(t)$ qui se trouvent à tout instant dans les réservoirs respectifs T_1 et T_2.



SOLUTION :

1) Modélisation du système :

Il faut savoir que la vitesse de variation de sel dans les réservoirs est le bilan de ce qui entre, moins ce qui en sort par minute. Dès lors :

$$y_1' = -\frac{8}{100}y_1 + \frac{2}{100}y_2 + 6\,, \quad y_2' = +\frac{8}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2 - \frac{6}{100}y_2$$

avec les conditions initiales :

$$y_1(0) = 0\,, \quad y_2(0) = 150$$

2) Expression du système dans l'espace des phases:

$$\begin{aligned} s\mathcal{Y}_1 - y_1(0) &= -0{,}08\mathcal{Y}_1 + 0{,}02\mathcal{Y}_2 + \frac{6}{s} \\ s\mathcal{Y}_2 - y_2(0) &= +0{,}08\mathcal{Y}_1 + 0{,}08\mathcal{Y}_2 + 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (-0{,}08 - s)\mathcal{Y}_1 + \quad & 0{,}02\mathcal{Y}_2 = -\frac{6}{s} - 0 \\ 0{,}08\mathcal{Y}_1 \quad & + (0{,}08 - s)\mathcal{Y}_2 = 0 - 150 \end{aligned}$$

3) La solution dans l'espace des phases (par exemple par la méthode de Cramer) :

$$\mathcal{Y}_{1p}(s)=\frac{\begin{vmatrix}-\dfrac{6}{s} & 0,02\\ -150 & -0,08-s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-0,08-s & 0,02\\ 0,08 & -0,08-s\end{vmatrix}}=\frac{9s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\ ,\quad \mathcal{Y}_{2p}(s)=\frac{\begin{vmatrix}-0,08-s & -\dfrac{6}{s}\\ 0,08 & -150\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-0,08-s & 0,02\\ 0,08 & -0,08-s\end{vmatrix}}=\frac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}$$

Soit après décompositions en éléments simples :

$$\begin{cases}\mathcal{Y}_{1p}(s)=\dfrac{9s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}=\dfrac{100}{s}-\dfrac{62,5}{(s+0,12)}+\dfrac{37,5}{(s+0,04)}\\[2ex] \mathcal{Y}_{2p}(s)=\dfrac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}=\dfrac{100}{s}+\dfrac{125}{(s+0,12)}-\dfrac{75}{(s+0,04)}\end{cases}$$

(c'est à vous de vérifier cette décomposition avec la méthode des résidus).

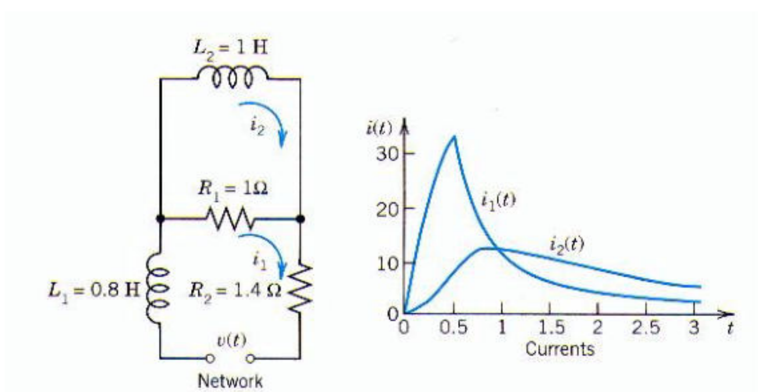
4) Solution particulière dans le domaine temporel :

$$\boxed{\begin{cases}y_{1p}(t)=100-62,5.e^{-0,12t}+37,5.e^{-0,04t}\\ y_{2p}(t)=100+125.e^{-0,12t}-75.e^{-0,04t}\end{cases}}$$

d'ou l'allure des courbes de quantité de sel (voir à coté du croquis des réservoirs):

EXEMPLE : CIRCUIT ÉLECTRIQUE

Soit à trouver l'expression du courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans le circuit électrique suivant :



sachant qu'à l'instant initial $t=0$: $i_1(0)=0$ et $i_2(0)=0$, et que la forme de la tension est : $v(t)=\begin{cases}100 & 0\le t\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & t>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ *Volts*.

SOLUTION :

Les courants désignés $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont appelés les courants de maille. En utilisant la méthode appropriée (méthode des mailles), nous pouvons dresser les équations suivantes d'après la loi de Kirchoff (la somme des tensions le long d'un parcours fermé est nul : $\sum_k V_k = 0$) :

$$\begin{array}{l} \text{maille 1:} \\ \\ \text{maille 2:} \end{array} \begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1(i_1 - i_2) - R_2 i_1 = v(t) \\ \quad R_1(i_2 - i_1) + L_2 \dfrac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

soit, en introduisant la valeur des éléments en remplacement des symboles (pour simplifier la présentation) :

$$\begin{cases} 0,8i_1' + 1(i_1 - i_2) - 1,4i_1 = 100\left[1 - U(t - \tfrac{1}{2})\right] \\ \quad 1(i_2 - i_1) + \;\; 1i_2' = 0 \end{cases}$$

soit, sous forme normalisée pour la résolution des systèmes d'équations :

$$\begin{cases} i_1' = -3i_1 + 1,25i_2 + 125\left[1 - U(t - \dfrac{1}{2})\right] \\ i_2' = \quad i_1 - \quad i_2 + 0 \end{cases}$$

et pas transformée de Laplace :

$$\begin{cases} sI_1 - i_1(0) = -3I_1 + 1,25I_2 + 125\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s/2}}{s}\right] \\ sI_2 - i_2(0) = \quad 1I_1 - \quad 1I_2 + 0 \end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de 2 équations linéaires dont les 2 inconnues sont $I_1(s)$ et $I_2(s)$. Nous pouvons les déterminer selon la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} (s+3)I_1 \quad - \quad 1,25I_2 = -125\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s/2}}{s}\right] + i_1(0) \\ \quad -I_1 \qquad + (s+1)I_2 = 0 \qquad\qquad\qquad + i_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1(s) = \dfrac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1 - e^{-s/2}) \\ I_2(s) = \dfrac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1 - e^{-s/2}) \end{cases}$$

soit après décomposition en fractions partielles :

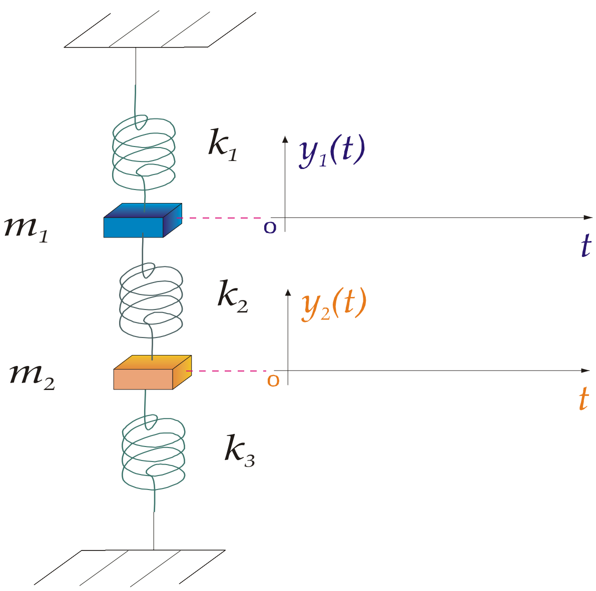
$$\begin{cases} I_1(s) = \left[\dfrac{500}{7s} - \dfrac{125}{3\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \dfrac{625}{21\left(s+\frac{7}{2}\right)}\right](1 - e^{-s/2}) \\ I_2(s) = \left[\dfrac{500}{7s} - \dfrac{250}{3\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \dfrac{250}{21\left(s+\frac{7}{2}\right)}\right](1 - e^{-s/2}) \end{cases}$$

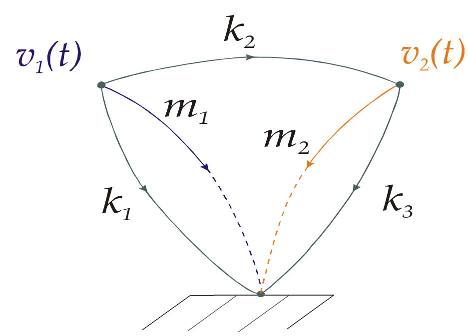
et les solutions dans le domaine temporel sont :

$$\begin{cases} i_1(t) = \left[\dfrac{500}{7} - \dfrac{125}{3}e^{-t/2} - \dfrac{625}{21}e^{-7t/2}\right]1 - \left[\dfrac{500}{7} - \dfrac{125}{3}e^{-(t-\frac{1}{2})/2} - \dfrac{625}{21}e^{-7(t-\frac{1}{2})/2}\right]U(t-\tfrac{1}{2}) \\ i_2(t) = \left[\dfrac{500}{7} - \dfrac{250}{3}e^{-t/2} - \dfrac{250}{21}e^{-7t/2}\right]1 - \left[\dfrac{500}{7} - \dfrac{250}{3}e^{-(t-\frac{1}{2})/2} - \dfrac{250}{21}e^{-7(t-\frac{1}{2})/2}\right]U(t-\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

EXEMPLE : MÉCANIQUE DE TRANSLATION COMPLEXE

Il s'agit du système en mécanique de translation avec 2 masses et trois ressorts vu précédemment au chapitre 26 :





Graphe linéaire associé

dans lequel $m_1 = m_2 = 1$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$, et dont les conditions initiales sont : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = \sqrt{3k}$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$.

Trouver alors l'expression des positions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ à l'aide de la transformée de Laplace.

SOLUTION :

Nous avons déjà noté, à partir du graphe linéaire, bien que ce circuit comporte 5 éléments réactifs, qu'il s'agit d'un système du 4$^{\text{ème}}$ ordre au cause d'un noeud trivial (revoir la note explicative au chapitre 26).

Dès les équations d'après la seconde loi de Newton étaient :

$$\begin{cases} -m_1 y_1'' - k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2) = 0 \\ +k_2(y_1 - y_2) - m_2 y_2'' - k_3 y_2 = 0 \end{cases}$$

soit après mise en forme pour la résolution :

$$\begin{cases} y_1'' = -(\dfrac{k_1+k_2}{m_1})y_1 + (\dfrac{k_2}{m_1})y_2 \\ y_2'' = +(\dfrac{k_2}{m_2})y_1 - (\dfrac{k_2+k_3}{m_2})y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'' = -2ky_1 + ky_2 \\ y_2'' = ky_1 - 2ky_2 \end{cases}$$

Et par transformation de Laplace :

$$\begin{cases} s^2Y_1 - sy_1(0) - y_1'(0) = -2kY_1 + kY_2 \\ s^2Y_2 - sy_2(0) - y_2'(0) = kY_1 - 2kY_2 \end{cases}$$

le système d'algèbre linéaire à résoudre est donc :

$$\begin{cases} (s^2+2k)Y_1 - kY_2 = sy_1(0) + y_1'(0) \\ -kY_1 + (s^2+2k)Y_2 = sy_2(0) + y_2'(0) \end{cases}$$

soit en introduisant les valeurs :

$$\begin{cases} (s^2+2k)Y_1 - kY_2 = s + \sqrt{3k} \\ -kY_1 + (s^2+2k)Y_2 = s - \sqrt{3k} \end{cases}$$

d'où les solutions dans le domaine des phases :

$$\begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{(s+\sqrt{3k})(s^2+2k) + k(s-\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2 - k^2} = \dfrac{s}{(s^2+k)} + \dfrac{\sqrt{3k}}{(s^2+3k)} \\ Y_2(s) = \dfrac{(s-\sqrt{3k})(s^2+2k) + k(s-\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2 - k^2} = \dfrac{s}{(s^2+k)} - \dfrac{\sqrt{3k}}{(s^2+3k)} \end{cases}$$

et finalement les solutions dans le domaine temporel :

$$\boxed{\begin{cases} y_1(t) = \cos\sqrt{k}t + \sin\sqrt{3k}t \\ y_2(t) = \cos\sqrt{k}t - \sin\sqrt{3k}t \end{cases}}$$

EXERCICES

Trouver la solution particulière par la méthode de la transformée de Laplace pour les systèmes avec conditions initiales suivants :

1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + t^2 \\ y_2' = -3y_1 + 2t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 6t \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - t^2 + t - 1 \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + \sin t \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + \cos t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = y_2 - \sin t \\ y_2' = -y_1 + \cos t + \sin t \end{cases}$ *avec* $\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = -2 \end{cases}$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

34. SÉRIES ET INTÉGRALES DE FOURIER

34.1. Introduction

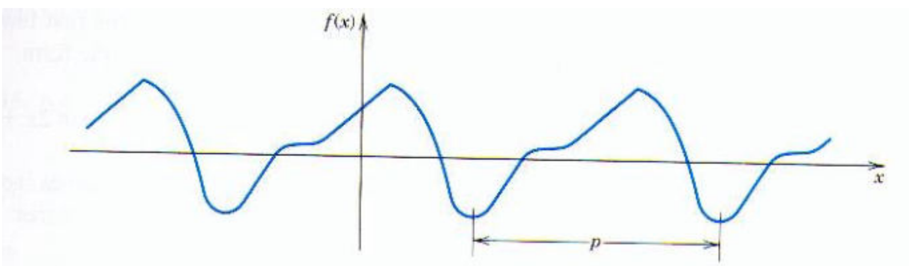
Les séries de Fourier[1] servent à représenter les fonctions qui sont périodiques à l'aide d'une décomposition en termes sinusoïdales et cosinusoïdales.

34.2. Définitions

Une fonction est dite périodique si elle est définie en tout point (excepté en certains points isolés) et qu'il existe un nombre positif p tel que :

$$f(x+p)=f(x)$$

Le nombre p est alors appelée la période de $f(x)$. Le graphique d'une telle fonction est constitué d'une section de forme qui se répète dans le temps après une distance p.



les fonctions périodiques les plus connues sont la fonction sinusoïdale et la fonction cosinusoïdale. Mais on peut remarquer q'une fonction constante est aussi périodique pour une infinité de valeurs de p.

34.3. Propriétés des fonctions périodiques

Si une fonction est périodique de période p, elle est aussi périodique de période $kp, \quad avec \quad k \in N$.

La plus petite valeur périodique de la fonction s'appelle la période fondamentale .

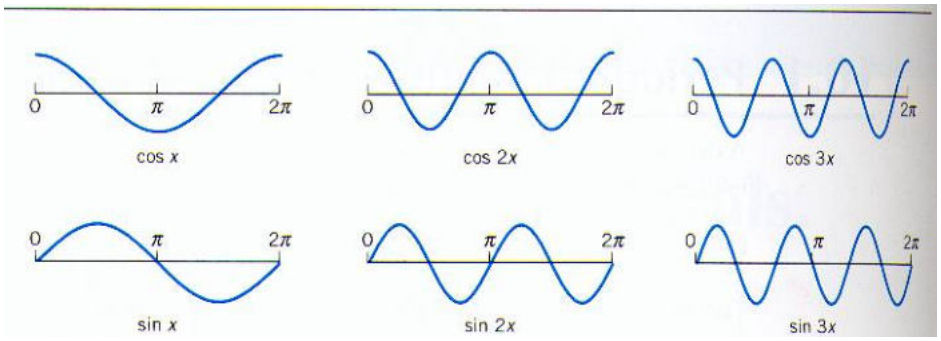
34.4. Séries trigonométriques

Le premier objectif concerne la représentation des fonctions périodiques de période $p=2\pi$ à l'aide de fonctions simples également périodiques de période $p=2\pi$ que sont les fonctions sinusoïdales :

$$1, \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \quad ..., \quad \cos nx, \sin nx, \quad ... .$$

---

[1] *Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien et physicien né Paris. Il avait accompagné Napoléon en Égypte et fut plus tard Préfet de Grenoble. Il a utilisé le développement de séries en sinus et cosinus dans son ouvrage « Théorie analytique de la chaleur » paru en 1822.*



si $f(x+2\pi)=f(x)$ alors :

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx}$$

On dit alors que la fonction est développée en série trigonométrique, et les a_n, b_n sont appelés les coefficients de la série pour la fonction périodique en question.

EXERCICES

Trouver la période fondamentale pour chacune des fonctions suivantes:

1. $\cos x$

2. $\sin x$

3. $\cos 2x$

4. $\sin \pi x$

5. $\cos 2\pi x$

6. $\cos kx$

7. $\sin \frac{2\pi}{k} x$

8. $\sin \frac{L.2\pi}{k} x$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

35. COEFFICIENTS DE FOURIER

35.1. Détermination des coefficients dans les séries trigonométriques

Nous rappelons que si une fonction est périodique de période $p = 2\pi$, alors on peut la représenter sous la forme d'une série trigonométrique :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx}$$

Pour évaluer les coefficients a_0 puis a_n, b_n nous allons démontrer les relations suivantes qui sont les formules de calcul des coefficients.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx$$

c'est à dire si la série trigonométrique est convergente, qu'on peut intervertir l'intégrale et la sommation:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx.dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx.dx \right)$$

on se rend compte que l'intégration sur une période complète pour une fonction sinusoïdale ou cosinusoïdale est nulle, et il ne subsistera que le terme a_0 comme suit :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx + 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx}$$

Pour obtenir le coefficient a_m, il suffit de neutraliser le terme cosinusoïdale comme suit :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos mx.dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) .\cos mx.dx$$

soit :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos mx.dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx.dx + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx.\cos mx.dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx.\cos mx.dx \right)$$

comme on observe que : $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx.dx = 0$, tandis que : $\begin{cases} \cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\ \sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \end{cases}$

il s'ensuit :
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx.\cos mx.dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n+m)x.dx+\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx\right)$$
et
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx.\cos mx.dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n+m)x.dx+\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx\right)$$

Or les intégrales suivantes sont toujours nulles: $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n+m)x.dx=0$ et $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n+m)x.dx=0$, tandis que :

$$\begin{cases}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx=0, & si \quad n\neq m\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx=\int_{-\pi}^{+\pi}1.dx=2\pi, & si \quad n=m\end{cases}\quad \text{et que :}\quad \begin{cases}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx=0, & si \quad n\neq m\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx=\int_{-\pi}^{+\pi}0.dx=0, & si \quad n=m\end{cases}$$

de sorte que l'on obtient :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\cos mx.dx=a_m\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}1.dx\quad\Rightarrow\quad a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\cos mx.dx}$$

de façon analogue, si on veut calculer le coefficient b_m correspondant, il suffit de neutraliser le terme sinusoïdal correspondant :

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\sin mx.dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).\sin x.dx$$

soit :

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x).\sin mx.dx=a_0\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx.dx+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx.\sin mx.dx+b_n\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx.\sin mx.dx\right)$$

On observe que : $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx.dx=0$, tandis que : $\begin{cases}\cos a.\sin b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)\\ \sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\end{cases}$

il s'ensuit que :
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx.\sin mx.dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n+m)x.dx-\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx\right)$$
et
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx.\sin mx.dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx-\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n+m)x.dx\right)$$

Encore une fois, les intégrales suivantes sont nulles: $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n+m)x.dx=0$ et $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n+m)x.dx=0$, tandis que :

$$\begin{cases}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx=0, & si \quad n\neq m\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n-m)x.dx=\int_{-\pi}^{+\pi}1.dx=2\pi, & si \quad n=m\end{cases}\quad \text{et que :}\quad \begin{cases}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx=0, & si \quad n\neq m\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\sin(n-m)x.dx=\int_{-\pi}^{+\pi}0.dx=0, & si \quad n=m\end{cases}$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin mx.dx = b_m \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} 1.dx \quad \Rightarrow \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin mx.dx}$$

RÉSUMÉ :

Toute fonction périodique de période $p = 2\pi$ peut être décomposée en série trigonométrique :

$$f(x+2\pi) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

avec les coefficients évalués selon les formules d'Euler :

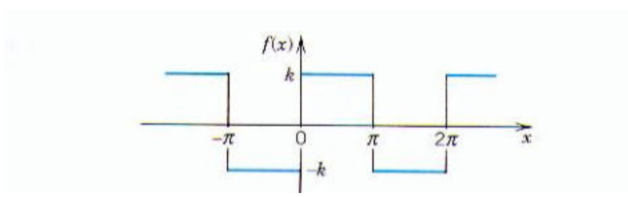
$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).1.dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos nx.dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin nx.dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}}$$

EXEMPLE : SÉRIE DE FOURIER POUR UNE ONDE CARRÉE

Il s'agit de traduire l'expression des coefficients dans le cas d'une onde carrée : $f(x) = \begin{cases} -h, & -\pi < x < 0 \\ +h, & 0 < x < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$

SOLUTION :

1) D'abord faire une esquisse de la fonction périodique :



2) Calculer les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).1.dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -h.1.dx + \int_{0}^{+\pi} h.1.dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -h.\cos nx.dx + \int_{0}^{\pi} h.\cos nx.dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-h.\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[h.\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{+\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -h.\sin nx.dx + \int_{0}^{\pi} h.\sin nx.dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[h.\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[h.\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{+\pi} = \frac{2h}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} & a_0 = 0 \\ & a_n = 0, \quad \forall n \in N \\ & b_n = \begin{cases} \dfrac{4h}{n\pi}, & \text{pour } n \quad \text{impair} \\ 0, & \text{pour } n \quad \text{pair} \end{cases} \end{aligned}$$

de sorte que la série trigonométrique pour l'onde carrée est :

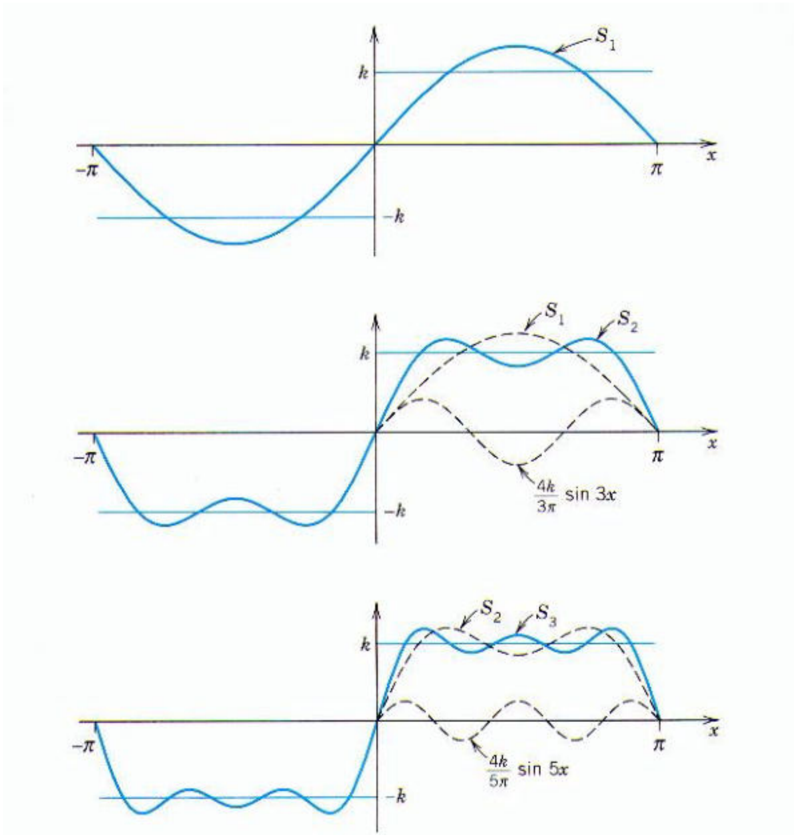
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4h}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x}$$

on peut donc reconstruire l'onde carrée à partir de suites de sommes partielles, incorporant au fur et à mesure les termes de la série :

$$S_1 = \frac{4h}{\pi}\sin x \qquad S_2 = \frac{4h}{\pi}\sin x + \frac{4h}{3\pi}\sin 3x \qquad S_3 = \frac{4h}{\pi}\sin x + \frac{4h}{3\pi}\sin 3x + \frac{4h}{5\pi}\sin 5x$$

$$S_4 = ...$$

d'où les figures d'approximation successives de l'onde carrée.



REMARQUE :

Cette mise en série trigonométrique permet de déduire la valeur de certaines séries en fixant la variable x à certaines valeurs remarquables.

Par exemple dans l'onde carrée, si on fixe $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4h}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\tfrac{\pi}{2} = \frac{4h}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} ....\right) = h$$

d'où on en déduit la valeur de la série :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} .... = \frac{\pi}{4}$$

telle que trouvée par Leibniz en 1673 (mais à partir de considérations géométriques) .

35.2. Orthogonalité des composants de la série trigonométrique

Les éléments : 1, $\cos x, \sin x$, $\cos 2x, \sin 2x$, ..., $\cos nx, \sin nx$, ... constituent une base (de dimension infinie) orthogonale sur l'intervalle $-\pi < x < +\pi$.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx.\cos mx.dx = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m \\ 2\pi, & si\ n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx.\sin mx.dx = \{0, \qquad \forall\ n,m$$

et $$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx.\sin mx.dx = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m \\ 2\pi, & si\ n = m \end{cases}$$

Attention à la définition de l'orthogonalité, qui n'est pas pour un point précis, mais lorsque résumée sur l'ensemble de la plage $]-\pi,+\pi[$.

35.3. Convergence et somme des séries de Fourier

THÉORÈME

Si une fonction est périodique de période $p = 2\pi$, continue par morceaux dans l'intervalle $]-\pi,+\pi[$, et possède des dérivées à droite et des dérivées à gauche en tout point de cet intervalle, alors la série de Fourier est convergente. Et la somme infinie des termes donne exactement $f(x)$, sauf aux points de discontinuïté, où elle vaut la moyenne des valeurs de limite à gauche et limite à droite du point de considéré.

DÉMONSTRATION :

La démonstration que nous allons faire concerne seulement les fonctions continues et au moins 2 fois dérivables. La démonstration pour des fonctions continues par morceaux est plus complexe et renvoyé à des ouvrages plus spécialisés.

Soit à calculer le coefficient a_n de la série, en utilisant l'intégration par parties :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos nx.dx = \left[\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x).\sin nx.dx$$

le 1er terme de droite est nul $\left[\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$, tandis qu'on peut de nouveau intégrer par parties sur le 2ème terme :

$$-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x).\sin nx.dx = \left[\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(x).\cos nx.dx$$

De nouveau, le 1er terme de droite est nul $\left[\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$, car $f'(x)$ est continue et aussi de période $p = 2\pi$. Si de plus, la dérivée seconde $f''(x)$ est continue sur l'intervalle d'intégration, on peut la borner par une valeur M :

$$|f''(x)| < M\ , \quad \forall x \in\ ]-\pi,+\pi[$$

De plus :

$$|\cos nx| \leq 1\,, \quad \forall x \in \left]-\pi, +\pi\right[\,.$$

De sorte que :

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi} f''(x).\cos nx.dx\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} M.dx = \frac{2M}{n^2}$$

De la même façon, on trouvera que :

$$|b_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi} f''(x).\sin nx.dx\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} M.dx = \frac{2M}{n^2}$$

Comme la série $|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$ converge, donc il y a convergence absolue de la série :

$$\left|a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n \cos nx| + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n \sin nx| < |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$$

c'est à dire en fin de compte que la série : $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge.

EXERCICES

Déterminer les séries de Fourier pour les fonctions suivantes :

1. $f(x)=\begin{cases}+1, & -\pi < x < 0 \\ -1, & 0 \le x < +\pi\end{cases}.$

2. $f(x)=\begin{cases}+1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}\end{cases}.$

3. $f(x)=\begin{cases}x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}\end{cases}.$

4. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x < 2\pi\end{cases}.$

5. $f(x)=\begin{cases}x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}\end{cases}.$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

36. SÉRIES DE FOURIER- FONCTIONS PÉRIODIQUES 2L

36.1. Calcul des coefficients dans le cas de période autre que $p = 2\pi$:

Nous rappelons que si une fonction est périodique de période $p = 2\pi$, alors on peut la représenter sous la forme d'une série trigonométrique :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)}$$

Il s'agit à présent d'étendre cette représentation à des fonction périodiques qui sont de période quelconque $p = 2L$.

Il s'agit dans ce cas de faire une conversion d'échelle pour l'axe x. Ainsi, on sait que les fonctions sinusoïdales sont périodiques $p = 2\pi$. Il s'agit alors de faire en sorte que les fonctions sinusoïdales voient toujours leur période $p = 2\pi$ lorsque x passe de $x \to x + 2L$. D'où l'écriture de la **série de Fourier** :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Dans ce cas les formules d'Euler pour calculer les coefficients de la série deviennent :

$$\boxed{\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}.dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5,... \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}.dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5,...
\end{aligned}}$$

NOTE :

Il s'agit de bien faire la distinction de terminologie. Lorsqu'on parle de la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ en général, les coefficients a_n et b_n ne sont pas encore déterminés, on parle tout simplement de **série trigonométrique**. Lorsque les coefficients a_n et b_n sont fixés pour représenter une certaine fonction périodique $f(x)$, on parle de série de Fourier qui représente la fonction périodique $f(x)$.

DÉMONSTRATION :

Il s'agit de montrer que les formules ci-dessus redonnent bien les formules des séries trigonométriques $p = 2\pi$, après le changement de variable approprié. Soit donc à poser : $u = \frac{\pi x}{L}$.

Dès lors : $f(x) = g(u(x)) = \left(g \circ u\right)(x)$, avec : $f(x+2L)=f(x) \quad \Rightarrow \quad g(u(x+2L))=\left(g\circ u\right)(x+2L)=\left(g\circ u\right)(x)$.

Or on constate que : $g(u(x+2L))=g(u+2\pi)=g(u)$, c'est à dire que la période de la fonction transformée est $p=2\pi$.

En calculant les coefficients pour cette fonction périodique $g(u)$, d'après les formules d'Euler originales :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(u).1.du \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(u).\cos nu.du, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(u).\sin nu.du, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots
\end{aligned}
$$

Si on substitue $u=\dfrac{\pi x}{L}$, $g(u)=f(x)$, et $du=\dfrac{\pi}{L}dx$ dans ces formules, et qu'on substitue les bornes d'intégration correspondantes :

$$
\begin{aligned}
u \to -\pi\} &\quad \Leftrightarrow \quad \{x \to -L \\
u \to +\pi\} &\quad \Leftrightarrow \quad \{x \to +L
\end{aligned}
$$

On arrive finalement aux expressions citées pour une période quelconque $p=2L$:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{+L} f(x).1.\frac{\pi}{L}dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{+L} f(x).\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right).\frac{\pi}{L}dx, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{+L} f(x).\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).\frac{\pi}{L}dx, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots
\end{aligned}
$$

REMARQUE : INTERVALLE D'INTÉGRATION

Il n'est pas nécessaire dans les formules d'Euler, de prendre les bornes absolument symétriques, on obtiendra les mêmes coefficients du moment qu'un intègre sur une période complète $p=2L$:

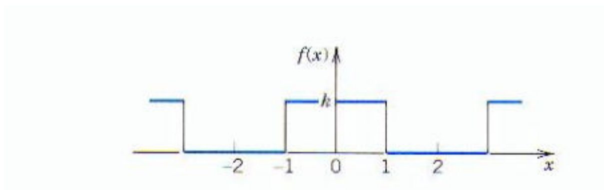
$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}.dx, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}.dx, \quad n=1,2,3,4,5,\ldots
\end{aligned}
}
$$

EXEMPLE : SÉRIE DE FOURIER POUR UNE ONDE CARRÉE

Soit à trouver la série de Fourier pour la fonction périodique suivante : $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ h, & -1\le x\le +1\\ 0, & +1<x<+2\\ f(x+4)=f(x)\end{cases}$

SOLUTION :

1) Tout d'abord faire une esquisse de la fonction périodique $p=4$:



2) Calcul des coefficients, mais cette fois-ci en partant de $\alpha=-1$:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{-1+4}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}h.dx+\frac{1}{4}\int_{+1}^{+3}0.dx=\frac{h}{2}$$

$$\text{soit : }\boxed{a_0=\frac{h}{2}}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+4}f(x).\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}h.\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{+1}^{+3}0.\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{h}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-1}^{+1}$$

$$\text{soit : }\boxed{a_n=\begin{cases}+\dfrac{2h}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair}=1, 5, 9,...\\ -\dfrac{2h}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair}=3, 7, 11,...\\ 0, & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+4}f(x).\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}h.\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{+1}^{+3}0.\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{-h}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-1}^{+1}$$

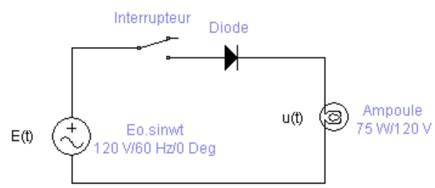
$$\boxed{b_n=\{0, \quad \forall\, n=1,2,3,4,5,6,...}$$

Cela est normal que les coefficients $b_n=0$, car la fonction $f(x)$ est paire, et qu'en conséquence, il ne peut y avoir des composantes impaires dans la série de Fourier.

$$\boxed{f(x)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\left(\cos\tfrac{\pi}{2}x-\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3\pi}{2}x+\tfrac{1}{5}\cos\tfrac{5\pi}{2}x-\tfrac{1}{7}\cos\tfrac{7\pi}{2}x+\tfrac{1}{9}\cos\tfrac{9\pi}{2}x-....\right)}$$

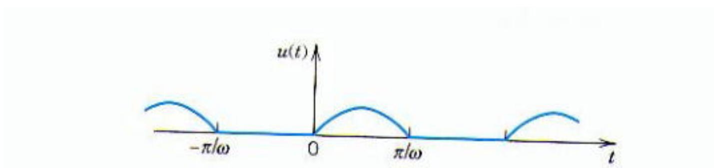
EXEMPLE : SÉRIE DE FOURIER POUR UNE SINUSOÏDE REDRESSÉE DEMI-ONDE

Soit une onde sinusoïdale qui correspond à la tension d'alimentation électrique dans les foyers : $E(t) = E_0 \sin \omega t$. On fait effectuer un redressement mono-alternance à l'aide d'une diode pour alimenter à moindre tension une ampoule (c'est le cas des lampadaires à 2 intensités que vous achetez). Donner alors la série de Fourier d'une telle onde.



SOLUTION :

1) Esquisse de la fonction :



Déterminer les coefficients de la série de Fourier pour cette fonction périodique qui est :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} < x < 0 \\ E_0 \sin \omega t, & 0 \le x \le +\frac{\pi}{\omega} \\ u(t+\frac{2\pi}{\omega}) = u(t) & \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{+\frac{\pi}{\omega}} u(t)dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} 0.dt + \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{+\frac{\pi}{\omega}} E_0 \sin \omega t.dt = \frac{E_0}{\pi}$$

Soit : $\boxed{a_0 = \frac{E_0}{\pi}}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{+\frac{\pi}{\omega}} u(t).\cos n\omega t.dt = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} 0.\cos n\omega t.dt + \frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{+\frac{\pi}{\omega}} E_0 \sin \omega t.\cos n\omega t.dt$$

$$= \frac{E_0}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)}\right]_0^{+\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E_0}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)} - \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)} + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1-n)}\right]$$

$$\text{soit : } \boxed{a_n = \begin{cases} \frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{2}{(1+n)} + \frac{2}{(1-n)}\right] = -\frac{2E_0}{(n^2-1)\pi}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{+\frac{\pi}{\omega}} u(t).\sin n\omega t.dt = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} 0.\sin n\omega t.dt + \frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{+\frac{\pi}{\omega}} E_0 \sin\omega t.\sin n\omega t.dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega E_0}{2\pi}\left[\dfrac{\sin(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} - \dfrac{\sin(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}\right]_0^{+\frac{\pi}{\omega}} = \dfrac{\omega E_0}{2\pi}\left[\dfrac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\omega} - \dfrac{\sin(1+n)\pi}{(1+n)\omega} - \dfrac{0}{(1-n)\omega} + \dfrac{0}{(1+n)\omega}\right], & \text{si} \quad n \neq 1 \\ \dfrac{\omega E_0}{2\pi}\left[t - \dfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{+\frac{\pi}{\omega}} = \dfrac{\omega E_0}{2\pi}\left[\dfrac{\pi}{\omega} - \dfrac{\sin 2\pi}{2\omega} - 0 + \dfrac{\sin 0}{2\omega}\right], & \text{si} \quad n = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{b_n = \begin{cases} \dfrac{E_0}{2}, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n = 2,3,4,5,\ldots \end{cases}}$$

D'où l'expression en série de Fourier de l'onde redressée mono-alternance :

$$\boxed{u(t) = \frac{E_0}{\pi} + \frac{E_0}{2}\sin\omega t - \frac{2E_0}{\pi}\left(\tfrac{1}{3}\cos 2\omega t + \tfrac{1}{15}\cos 4\omega t + \tfrac{1}{35}\cos 6\omega t + \tfrac{1}{63}\cos 8\omega t + ...\right)}$$

EXERCICES

Déterminer les séries de Fourier pour les fonctions suivantes :

1. $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ +1, & 0\le x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

2. $f(x)=\begin{cases}+1, & -1<x<0\\ -1, & 0\le x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ 2, & 0\le x<+2\\ f(x+4)=f(x)\end{cases}.$

4. $f(x)=\begin{cases}-2, & -2<x<0\\ +2, & 0\le x<+2\\ f(x+4)=f(x)\end{cases}.$

5. $f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

6. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

7. $f(x)=\begin{cases}3x^2, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

37. SÉRIES DE FOURIER- FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

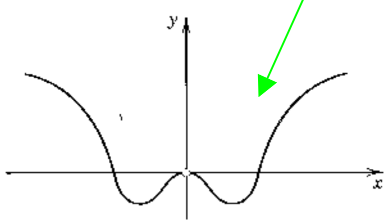
37.1. Introduction

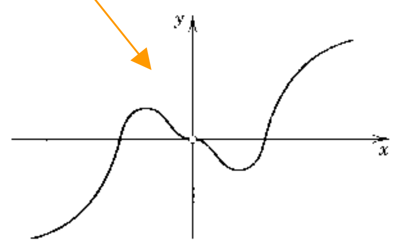
Nous avons vu dans certains exemples des chapitres précédents, que lorsqu'une fonction est paire, il s'avère que les coefficients b_n qui correspondent aux termes sinusoïdales, sont tous nuls. De la même façon, lorsqu'une fonction est impaire, les coefficients a_n qui correspondent aux termes cosinusoïdales sont tous nuls. Nous allons confirmer ces résultats par des théorèmes, ce qui va nous permettre, lorsqu'une fonction est soit paire, soit impaire, de ne pas chercher à calculer inutilement ces coefficients pour constater par la suite qu'ils sont nuls…Cela va nous éviter de nous tromper durant les calculs longs et inutiles et de déduire des valeurs erronées de coefficients qui devaient être nuls.

37.2. Définitions des fonctions paires ou impaires

Une fonction est dite paire si : $\boxed{f(-x) = f(x)}$

Une fonction est dite impaire si : $\boxed{f(-x) = -f(x)}$





37.3. Propriétés d'intégrales de fonctions paire et impaires

THÉORÈMES

1) Si une fonction est paire, l'intégrale sur des **bornes symétriques** équivaut à :

$$\boxed{\int_{-L}^{+L} f(x)dx = 2\times \int_{0}^{+L} f(x)dx}$$

2) Si une fonction est impaire, l'intégrale sur des **bornes symétriques** équivaut à :

$$\boxed{\int_{-L}^{+L} f(x)dx = 0}$$

3) Le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire.

DÉMONSTRATIONS

1) Dans le cas de la fonction paire: $\int_{-L}^{+L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x).dx + \int_{0}^{+L} f(x).dx = \int_{-L}^{0} f(-x).dx + \int_{0}^{+L} f(x).dx$

puisque qu'on sait que : $f(-x) = f(x)$. Soit en faisant le changement de variable : $u = -x \quad \Rightarrow \quad du = -dx$, on obtient :

$$\int_{-L}^{+L} f(x)dx = \int_{+L}^{0} -f(u).du + \int_{0}^{+L} f(x).dx = \int_{0}^{+L} f(u).du + \int_{0}^{+L} f(x).dx = 2\times \int_{0}^{+L} f(x).dx$$. CQFD.

2) Dans le cas de la fonction impaire : $\int_{-L}^{+L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} -f(-x)dx + \int_{0}^{+L} f(x)dx$

puisque l'on on sait que $f(-x) = -f(x)$. Soit en faisant le changement de variable : $u = -x \quad \Rightarrow \quad du = -dx$, on obtient :

$$\int_{-L}^{+L} f(x)dx = \int_{+L}^{0} f(u).du + \int_{0}^{+L} f(x).dx = -\int_{0}^{+L} f(u).du + \int_{0}^{+L} f(x).dx = 0$$. CQFD.

3) Soit g une fonction paire et h une fonction impaire : $\begin{cases} g(-x) = g(x) \\ h(-x) = -h(x) \end{cases}$.

Dès lors : $q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)(-h(x) = -g(x)h(x) = -q(x)$. CQFD.

COROLLAIRES

En conséquence de la multiplication d'une fonction paire par une fonction impaire, si $f(x)$ est paire, alors : $f(x).\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ est impaire à cause de la fonction sinus qui est impaire. Ce qui implique que tous les coefficients b_n sont tous nuls:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}.dx = 0$$

De sorte que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ **paire** ne comporte que des termes cosinusoïdales :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

De même si $f(x)$ est impaire, alors $f(x).\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ est une fonction impaire. Ce qui cause l'annulation de tous les coefficients a_n :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}.dx = 0$$

De sorte que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ **impaire** ne comporte que des termes sinusoïdales :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

THÉORÈME

1) Les coefficients de Fourier de la somme de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est la somme des coefficients correspondants aux mêmes termes :

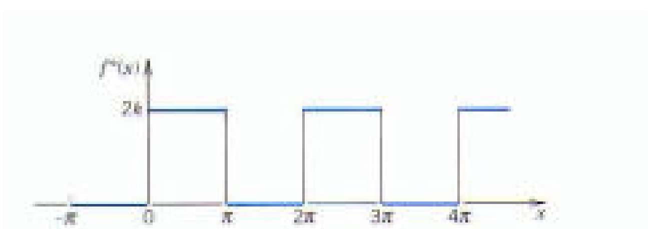
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\left(a_{01}+a_{02}\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n1}+a_{n2})\cos\frac{n\pi x}{L}+(b_{n1}+b_{n2})\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

2) Les coefficients de Fourier du produit d'une fonction $f(x)$ par un scalaire λ sont les coefficients correspondants multipliés par le scalaire λ.

$$\lambda f(x)=\lambda a_0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\lambda b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

EXEMPLE : PULSE RECTANGULAIRE

Soit la fonction $f^*(x)$ représenté à la figure suivante.



Trouver sa série de Fourier.

SOLUTION :

Il s'agit de la somme d'une fonction : $f(x)=\begin{cases}-h, & -\pi<x<0\\ +h, & 0<x<+\pi\\ f(x+2\pi)=f(x)\end{cases}$ dont on a déjà calculé la série de Fourier au chapitre 35, et d'un fonction constante de hauteur h.

D'après le théorème ci-dessus, il suffit de sommer les coefficients correspondants :

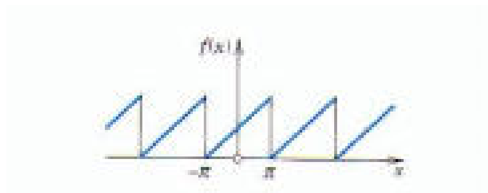
$$\boxed{f^*(x)=f(x)+h(x)=\left(0+h\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4h}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x}$$

EXEMPLE : ONDE EN DENT DE SCIE

Trouver la série de Fourier pour l'onde en dent de scie suivant : $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi<x<+\pi \\ f(x+2\pi)=f(x) \end{cases}$

SOLUTION :

1) tracer la figure :



2) Il suffit d'écrire $f(x)$ comme la somme d'une fonction $_{1}(\ )=$ et $f_2(x)=\pi$. Comme $f_1(-x)=-f(x)$ est une fonction impaire, nous pouvons déduire que les coefficients a_n sont tous nuls; y compris a_0. Il nous suffit maintenant d'évaluer l'expression des coefficients b_n :

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x.\sin nx.dx$$

Or le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire. De sorte que :

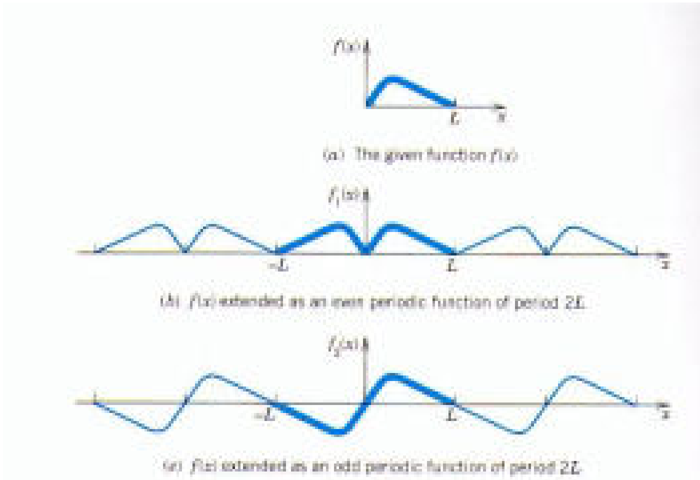
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} x.\sin nx.dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^{+\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{+\pi}\cos nx.dx=-\frac{2}{\pi}\cos n\pi$$

d'où l'expression de la série de Fourier :

$$\boxed{f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\cos n\pi.\sin nx\right)}$$

37.4. Extension en fonction périodique paire et extension en fonction périodique impaire.

On peut se servir d'une fonction $f(x)$ délimitée seulement sur un intervalle $0<x<L$ et répéter cette fonction de façon à construire une fonction $f_1(x)$ périodique paire ou une fonction $f_2(x)$ périodique impaire, de période $p=2L$.



(a) The given function f(x)
(b) f(x) extended as an even periodic function of period 2L
(c) f(x) extended as an odd periodic function of period 2L

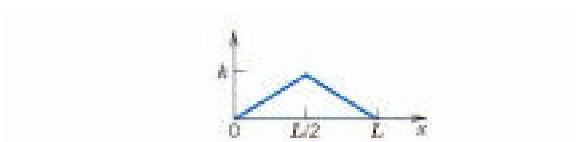
EXEMPLE : ONDE TRIANGULAIRE

Soit une fonction définie sur $0 < x < L$ comme suit : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{L}x, & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2h}{L}(L-x), & \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$

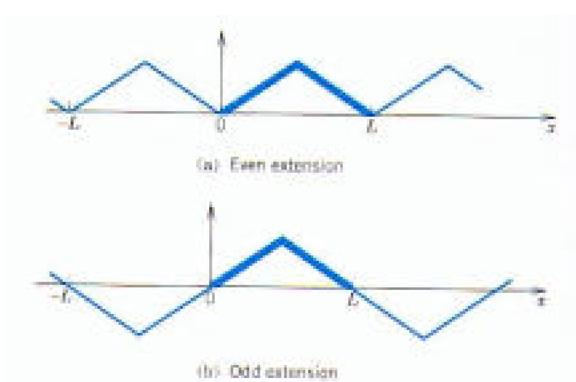
Construire la fonction périodique paire de période $p = 2L$, puis la fonction périodique impaire, et calculer les coefficients des séries de Fourier correspondantes.

SOLUTION :

1) Figure :



2) Dans le cas d'extension en fonction périodique paire, on ne calcule que les coefficients a_n basés justement sur la demi-onde originale.



(a) Even extension
(b) Odd extension

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f_1(x).dx = \frac{1}{L}\left[\int_0^{L/2}\frac{2h}{L}x.dx + \int_{L/2}^{L}\frac{2h}{L}(L-x).dx\right] = \frac{h}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f_1(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2}\frac{2h}{L}x.\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L}\frac{2h}{L}(L-x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

soit par intégration par parties sur le premier terme:

$$\begin{aligned}\int_0^{L/2}\frac{2h}{L}x.\cos\frac{n\pi x}{L}dx &= \frac{2h}{L}\left[\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} - \frac{2h}{L}\int_0^{L/2}\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\ &= \frac{2h}{L}\left[\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right] + \frac{2h}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right]\end{aligned}$$

et par intégration par parties sur le deuxième terme :

$$\begin{aligned}\int_{L/2}^{L}\frac{2h}{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx &= \frac{2h}{L}\left[\frac{L}{n\pi}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} + \frac{2h}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\ &= \left[0 - \frac{2h}{L}.\frac{L}{n\pi}(L-\frac{L}{2})\sin\frac{n\pi}{2}\right] - \frac{2h}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

d'où l'expression du coefficient :

$$\boxed{a_n = \frac{4h}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)}$$

et la série de Fourier :

$$\boxed{f_1(x) = \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4h}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).\cos\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Dans le cas d'une extension en fonction périodique impaire, les coefficients a_n son tous nuls, y compris a_0. Il reste alors qu'à évaluer l'expression des coefficients b_n :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f_2(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f_2(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

sachant que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire. Une même démarche nous amène à :

$$\boxed{b_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}}$$

d'où la série de Fourier :

$$\boxed{f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8h}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right).\cos\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

EXERCICES

Déterminer les séries de Fourier pour les fonctions suivantes en utilisant les propriétés de parité:

1. $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ +1, & 0\leq x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

2. $f(x)=\begin{cases}+1, & -1<x<0\\ -1, & 0\leq x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ 2, & 0\leq x<+2\\ f(x+4)=f(x)\end{cases}.$

4. $f(x)=\begin{cases}-2, & -2<x<0\\ +2, & 0\leq x<+2\\ f(x+4)=f(x)\end{cases}.$

5. $f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

6. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

7. $f(x)=\begin{cases}3x^2, & -1<x<+1\\ f(x+2)=f(x)\end{cases}.$

QUESTIONS & PROBLÈMES

38. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES-CONCEPTS DE BASE

38.1. Définitions

- Une équation qui implique une ou plusieurs dérivées partielles d'une fonction (l'inconnue que nous cherchons) à deux ou plusieurs variables indépendantes, est appelée une **équation aux dérivées partielles**.

- L'ordre de la dérivée partielle la plus élevée détermine **l'ordre de l'équation**.

- On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si elle est composée d'une combinaison linéaire de la fonction et de ses dérivées partielles.

- On parle d'équation **homogène** si l'équation ne comporte pas de terme autre la fonction ou des dérivées partielles. En présence d'un terme indépendant dans l'équation, or parle d'équation **non-homogène**.

38.2. Exemples d'équations linéaires du second ordre

Voici les équations aux dérivées partielles les mieux connues en physique :

Équation d'onde à une dimension : $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Équation de la chaleur à une dimension : $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Équation de Laplace à deux dimensions : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Équation de Poisson à deux dimensions : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Équation d'onde à deux dimensions : $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Équation d'onde de Laplace à trois dimensions : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

On constate que l'équation de Poisson est une équation non-homogène.

38.3. Solution de l'équation aux dérivées partielles

Une solution à l'équation aux dérivées partielles qui a été définie sur un domaine $\Re$ de l'espace des variables indépendantes, est une fonction, qui possède toutes les dérivées partielles apparaissant dans l'équation, pour un domaine incluant $\Re$, et satisfaisant l'équation sur tout le domaine $\Re$.

En général, il existe une grande variété de fonctions qui satisfont une équation aux dérivées partielles. Ainsi les fonctions suivantes :

$$u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln(x^2 + y^2).$$

sont toutes des solutions de l'équation de Laplace à deux dimensions : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. L'étudiant est invité à les vérifier en effectuant les dérivées partielles et les substituer dans l'équation.

Nous verrons plus tard qu'une **solution particulière** à un problème donné, nécessite l'introduction de **conditions aux frontières** (problèmes de Derichlet) pour u, ou encore de **conditions initiales** (si l'une des variables indépendantes est le temps).

38.4. Principe de superposition des solutions

THÉORÈME

Si deux fonctions u_1 et u_2, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles homogène sur le domaine d'intersection $\Re = \Re_1 \cap \Re_2$, alors fonction en combinaison linéaire : $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ est aussi solution de l'équation homogène sur le même domaine d'intersection $\Re = \Re_1 \cap \Re_2$.

EXEMPLE :

Soit à trouver la fonction à deux variables $u(x, y)$ qui soit solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - u(x, y) = 0$$

SOLUTION :

Cette équation n'implique aucune dérivée par rapport à la seconde variable indépendante y. Donc qu'il n'y a aucune imposition sur la dépendance en y. De sorte qu'on peut alors résoudre cette équation comme une équation différentielle ordinaire du second ordre en x, en considérant y comme une constante :

$$u'' - u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Où C_1 et C_2 étaient les constantes à déterminer. Pour avoir une solution $u(x, y)$, il suffit donc que ces constantes soient des fonctions de y :

$$\boxed{u(x, y) = c_1(y) e^x + c_2(y) e^{-x}}$$

Vérifiez cette solution, en effectuant la dérivée partielle seconde et réintroduisez-la de nouveau dans l'équation.

EXEMPLE :

Soit à trouver la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$u_{xy} - u_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

SOLUTION :

On se rend compte que chaque terme de l'équation comporte à la base, la dérivée première par rapport à x. De sorte que l'on peut poser : $u_x = p \quad \Rightarrow \quad u_{xy} = \frac{\partial p}{\partial y} = p_y$. Et l'équation devient une équation à une seule variable :

$$u_{xy} - u_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_y - p = 0$$

La solution de cette nouvelle équation différentielle ordinaire du premier ordre est évidemment :

$$p = Ce^{-y}$$

Pour une solution en x et y, il suffit d'appliquer la variation de la constante :

$$p(x,y) = c(x)e^{-y}$$

d'où la forme solution :

$$\boxed{u(x,y) = g(y) + \int_o^x c(\tilde{x})e^{-y}.d\tilde{x} = g(y) + e^{-y} f(x)}$$

EXERCICES

Vérifier que les fonctions à deux variables suivantes sont des solutions de l'équation d'onde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

1. $u(x,t) = x^2 + t^2$.

2. $u(x,t) = \sin 9t . \sin \frac{x}{4}$.

3. $u(x,t) = \cos 4t . \sin 2x$.

4. $u(x,t) = \sin ct . \sin x$.

Vérifier que les fonctions à deux variables suivantes sont des solutions de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

5. $u(x,t) = e^{-t} \sin x$.

6. $u(x,t) = e^{-4t} \cos 3x$.

7. $u(x,t) = e^{-9t} \cos \omega x$.

8. $u(x,t) = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x$.

Vérifier que les fonctions à deux variables suivantes sont des solutions de l'équation de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

9. $u(x,y) = 2xy$.

10. $u(x,y) = e^x \sin y$.

11. $u(x,y) = \cos x \sinh y$.

12. $u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Résolvez les équations aux dérivées partielles suivantes comme des équations différentielles ordinaires :

13. $u_y = u$.

14. $u_{xx} + 9u = 0$.

15. $u_y + 2y.u = 0$.

16. $u_{xy} = u_x$.

17. $u_{yy} = u$.

18. $u_y = 2xy.u$.

19. $u_{yy} = 0$.

20. $u_{yy} = u_y$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Démontrer le théorème de superposition des solutions, dans le cas des équations homogènes du second ordre pour deux, puis pour trois variables indépendantes.

SOLUTIONNAIRE

AIDE-MÉMOIRE

Ce résumé ne contient aucun concept ou signification des symboles. Ces liens doivent être mémorisés lors de votre présence au cours (fussiez-vous un génie que vous ne pourriez remplacer 45 heures de cours par un couple de formules que vous ne comprendriez pas). Lors des examens ce résumé n'est pas admissible, vous devrez alors en recopier l'essentiel dans vos neuronnes.

Méthode à variables séparables:

$$g(y)y' = f(x) \quad \rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

Forme se ramenant à la méthode des variables séparables:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \rightarrow \quad \text{poser} \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + c \quad \rightarrow \quad \text{trouver } u \quad \rightarrow \quad \text{trouver } y$$

Équation exacte à 2 inconnues:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Vérifier que l'équation est exacte: } \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}, \text{ sinon} \\ \text{appliquer procédure pour équation non-exacte.} \\ \text{2) Évaluer } U(x,y) = \displaystyle\int N dy + l(x). \\ \text{3) Chercher } l(x): \; \dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial l}{\partial x} = \ldots \quad \rightarrow \quad l(x) = \displaystyle\int \ldots \\ \text{4) Vérifier qu'on a bien: } \; \dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Équation non-exacte à 2 inconnues:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Vérifier que l'équation est non-exacte: } \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \text{ sinon} \\ \text{appliquer directement procédure pour équation exacte.} \\ \text{2) Évaluer le facteur intégrant: } F(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \\ \qquad \text{ou } F(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \\ \text{3) Procéder comme pour l'éuqation exacte avec:} \begin{cases} M = FP \\ N = FQ \end{cases} \end{cases}$$

Équation de Bernoulli:

$$y' + \tilde{p}(x)y = g(x)y^a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Poser: } u(x) = [y]^{1-a} \\ \text{2) Résoudre directement l'équation différentielle devenue linéaire:} \\ u'(x) + \underbrace{(1\text{-}a)\tilde{p}(x)}_{=p(x)}u(x) = \underbrace{(1\text{-}a)g(x)}_{=r(x)} \quad \rightarrow \quad \text{trouver } u(x) \quad \rightarrow \quad \text{trouver y}(x) \end{cases}$$

Méthode itérative de Picard:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) } y_n(x) = y_0 + \int_{t=x_0}^{t=x} f(t, y_{n-1}(t)).dt \\ \text{2) Répéter 1) pour que } y_n(x) \text{converge vers la solution } y_n(x)\text{:} \end{cases}$$

Équation générale linéaire du 1er ordre:

$$y' + p(x)y = r(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Trouver la solution de l'équation homogène: } y'_h(x) + p(x)y_h(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y_h(x) = Cy_1(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \\ \text{2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):} \\ y'_s(x) + p(x)y_s(x) = r(x) \quad \rightarrow \quad y_s(x) = y_1(x)\int \frac{r(x)}{y_1(x)}dx \\ \text{3) Former la solution générale:} \\ y_g(x) = y_h(x) + y_s(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} r(x).dx + c\right] \\ \text{4) Trouver la solution particulière:} \\ \quad \text{Introduire la condition initiale } y(x_0) = k_0 \text{pour fixer la constante } C \end{cases}$$

Nombres complexes:

$$\begin{cases} e^{+i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x \\ e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x \end{cases}$$

$$C_1e^{+i\omega x} + C_2e^{-i\omega x} = \begin{cases} A\cos\omega x + B\sin\omega x \\ \text{en posant } \begin{cases} A = C_1 + C_2 \\ B = i(C_1 - C_2) \end{cases} \end{cases}$$

$$A\cos\omega x + B\sin\omega x = \begin{cases} C\cos(\omega x - \theta) \\ \text{en posant } \begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \theta = \arctan(-\frac{B}{A}) \end{cases} \end{cases}$$

Équation à coefficients non-constants d'Euler-Cauchy:

$x^2 y''+axy'+by=r(x) \quad \rightarrow$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$x^2 y''_h+axy'_h+by_h=0 \quad \rightarrow \quad$ poser: $y(x)=x^m$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$$m^2+(a-1)m+b=0$$

$\underline{\text{cas\_1: } m_1 \neq m_2 \text{ 2 racines réelles:}}$

$$y_h(x)=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}$$

$\underline{\text{cas\_2: } m_1 = m_2 \text{ 1 racine double:}}$

$$y_h(x)=\left(C_1+C_2\ln(x)\right)x^{m_1}$$

$\underline{\text{cas\_1: } m_1 = \overline{m_2} \text{ 2 racines complexes conjuguées:}}$

$$y_h(x)=x^{\alpha}\left[A\cos(\ln x)+B\sin(\ln x)\right]$$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$x^2 y''_s+axy'_s+by_s=r(x) \quad \rightarrow \quad y_s(x)=-y_1\int\frac{y_2 r(x)dx}{x^2(y_1y'_2-y'_1y_2)}+y_2\int\frac{y_1 r(x)dx}{x^2(y_1y'_2-y'_1y_2)}$$

3) Former la solution générale:

$y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les 2 conditions initiales $\begin{cases} y_g(x_0)=k_0 \\ y'_g(x_0)=k_1 \end{cases}$ pour fixer les constantes $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Équation générale linéaire du 2ème ordre mais à coefficients constants seulement:

$y''+ay'+by=r(x) \quad \rightarrow$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$y''_h+ay'_h+by_h=0 \quad \rightarrow \quad$ poser: $y(x)=e^{\lambda x}$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

$\underline{\text{cas\_1: } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 2 racines réelles:}}$

$$y_h(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

$\underline{\text{cas\_2: } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ 1 racine double:}}$

$$y_h(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^{\lambda_1 x}$$

$\underline{\text{cas\_3: } \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \text{ 2 racines complexes conjuguées:}}$

$$y_h(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left[A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)\right] \quad ,\omega=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

$\underline{\text{cas\_4: } \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \text{ 2 racines imaginaires pures } (a=0)\text{:}}$

$$y_h(x)=\left[A\cos(\omega_0 x)+B\sin(\omega_0 x)\right] \qquad ,\omega_0=\sqrt{b}$$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$y''_s+ay'_s+by_s=r(x) \quad \rightarrow \quad y_s(x)=-y_1\int\frac{y_2 r(x)dx}{(y_1y'_2-y'_1y_2)}+y_2\int\frac{y_1 r(x)dx}{(y_1y'_2-y'_1y_2)}$$

3) Former la solution générale:

$y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les 2 conditions initiales $\begin{cases} y_g(x_0)=k_0 \\ y'_g(x_0)=k_1 \end{cases}$ pour fixer les constantes $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Méthode de Lagrange (variation de paramètre pour trouver la 2ème forme solution):

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0 \\ y_1 \quad \text{est connue} \\ y_2 \quad \text{est recherchée} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{poser :} \quad y_2(x)=u(x)y_1(x) \quad \rightarrow \quad y_2(x)=y_1 \cdot \int \left(\dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \right) dx \end{cases}$$

Transformation de Laplace:

Définition

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Transformation des fonctions dérivées

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-sf(0)-f'(0)$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\sum_{k=0}^{k=n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$$

Transformation des fonctions primitives

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\varsigma f(\tau)d\tau d\varsigma\right]=\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\ldots=\ldots$$

Dérivées des transformées

$$\mathcal{L}\left[t.f(t)\right]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[f(t)\right]=-F'(s)$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

Intégrales des transformées

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{\upsilon=s}^{\upsilon=\infty} F(\upsilon)d\upsilon$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\int_{\upsilon=s}^{\upsilon=\infty}\left(\ldots\int_{\psi=\ldots}^{\psi=\infty} F(\psi)d\psi\right)\ldots d\upsilon$$

Translation dans le temps

$$\mathcal{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

Translation dans les phases

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$$

Propriété pour une fonction périodique de période T

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{t=0}^{t=T} e^{-st}f(t)dt$$

Laplace - Table des transformées:

f(t)	F(s)
$\frac{t^0}{0!}$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^1}{1!}$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!} \quad (n \in N)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^a}{\Gamma(a+1)} \quad (a \in R)$	$\frac{1}{s^{a+1}}$
$\frac{e^{at}}{0!}$	$\frac{1}{(s-a)}$
$\frac{t.e^{at}}{1!}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{t^n e^{at}}{n!} \quad (n \in N)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^b e^{at}}{\Gamma(b+1)} \quad (b \in R)$	$\frac{1}{(s-a)^{b+1}}$
$\frac{e^{at}-e^{at}}{(a-b)} \quad avec\ (a \neq b)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{at}}{(a-b)} \quad avec\ (a \neq b)$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

f(t)	F(s)
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$	$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos \omega t)$	$\frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$
$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$	$\frac{1}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}$
$U(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – Résolution par la transformée de Laplace:

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - Méthode de variation des paramètres:

$$[Y'] = [A]*[Y] + [G(t)] \quad \rightarrow$$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$[Y_h'] = [A]*[Y_h] \quad \rightarrow \quad$ poser: $[Y_h(t)] = [X]e^{\lambda t}$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$([A] - \lambda[I])[X] = 0$

<u>cas λ_i tous distincts:</u>

introduire valeur de λ_i dans $([A] - \lambda_i[I])[X_i] = 0$

et déterminer vecteur propre associée $[X_i]$

<u>cas λ_i racine double:</u>

introduire valeur de λ_i dans $([A] - \lambda_i[I])[U] = [X_i]$

pour trouver 2ème vecteur indépendant:

$[Y_h] = \ldots + c_{i0}[X_i]e^{\lambda_i t} + c_{i1}\left([X_i]t + [U]\right)e^{\lambda_i t} + \ldots$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$[Y_s(t)] = [\mathbf{Y}(t)]*\left(\int_{t_0}^{t}[\mathbf{Y}(\tau)]^{-1}*[G(\tau)]\,d\tau\right) + [\mathbf{Y}(t)]*[C_s]$$

3) Former la solution générale:

$$[Y_g(t)] = [Y_h(t)] + [Y_s(t)]$$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les n conditions initiales dans la solution générale pour fixer les constantes $C_1 \ldots . C_n$.

39. ÉQUATION DE LA CORDE VIBRANTE ET ÉQUATION D'ONDE

39.1. Introduction

La vibration d'une corde de violon est un phénomène physique complexe, néanmoins, sous certaines hypothèses simplificatrices, nous allons pouvoir modéliser ce phénomène à l'aide d'une équation aux dérivées partielles que nous allons pouvoir résoudre.

39.2. La corde vibrante

Soit une corde de violon, dont les deux bouts sont fixés, l'un à l'abscisse $x = 0$, l'autre à l'abscisse $x = L$. Le problème consiste à déterminer les vibrations de cette corde lorsqu'on le relâche du pincement. Il s'agit de connaître en tout point de l'axe des x et à tout instant t, la déviation transversale u. Il s'agit donc de trouver la fonction $u(x,t)$ qui soit solution de l'équation de vibration.

Pour poser cette équation de vibration, nous allons assumer les données physiques suivantes :

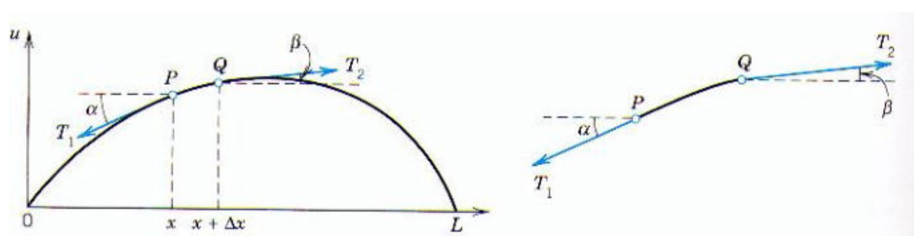
- La masse de la corde est répartie uniformément par unité de longueur.

- La corde est entièrement élastique et n'a pas de frottement (résistance de déformation mécanique de la corde).

- Les mouvements transverses sont tellement petits qu'on peu considérer que chaque point de la corde se meut perpendiculairement à l'axe des x.

- La tension de rappel de la corde est si élevée qu'on peut négliger l'apport de la force de gravitation sur la masse (pesante) de la corde.

Dans ces conditions on peut chercher l'équation d'équilibre des forces comme suit (voir figure ci-dessous):



Étant donnée l'absence de résistance mécanique de déformation, la tension est toujours tangentielle à la courbure de la corde en tout point (autrement il y aurait une composante perpendiculaire).

De plus comme nous avons postulé que tous les points de la corde n'effectue qu'un mouvement strictement vertical, les composantes horizontales de tension doivent s'équilibrer.

Ainsi, si au point P la corde subit une tension $\vec{T}_1$ et qu'au point Q elle subit un tension $\vec{T}_2$, les composantes horizontales doivent s'équilibrer :

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$$

où $T = const$ est la tension originelle de la corde.

Dans le sens vertical, la seconde loi de Newton nous donne que le résultante des forces provoque une accélération de la masse d'inertie. C'est à dire :

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho.\Delta x.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Accélération verticale

Densité linéaire massique

En divisant cette équation par la précédente, nous obtenons :

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho.\Delta x}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Soit :

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho.\Delta x}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

or $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ sont respectivement les pentes aux points x et $x+\Delta x$. C'est à dire :

$$\tan\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \qquad \text{et} \qquad \tan\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

d'où l'équation remaniée :

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = \frac{\rho}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit lorsque Δx est infiniment petit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que l'on met souvent sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

C'est la forme de l'équation de la corde vibrante simplifiée, mais c'est aussi l'équation d'onde à une dimension qu'on retrouve pour la propagation des ondes électromagnétiques.

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Retrouver cette équation d'onde en puisant dans les derneir chapitres de votre cours de « champ électromagnétique » et exposer cette démonstration.

SOLUTIONNAIRE

40. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'ONDE PAR SÉPARATION DES VARIABLES

40.1. Introduction

Le chapitre 39 avait introduit l'équation d'onde à une dimension, qui est aussi l'équation de la corde vibrante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Afin de trouver une solution particulière à la corde de violon , nous devons introduire les conditions aux frontières (conditions aux limites). Étant donné que les bouts de la corde sont immobilisés, nous avons :

$$\boxed{\begin{cases} u(0,t) = 0, & \forall t \\ u(L,t) = 0, & \forall t \end{cases}}$$

De plus, la forme de mouvement (vertical) de la corde dépend de la déflection initiale en tout point de l'axe x et de sa vitesse instantanée à ce moment là :

$$\boxed{\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \end{cases}}$$

Trouver une solution particulière à cet ensemble : équation d'onde + conditions, consiste en la stratégie suivante :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,t) = v(x).w(t)$.

2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières.

3) Déterminer la forme solution $w(t)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.

4) Exprimer la solution $u(x,t)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent aux conditions sur t (conditions initiales).

40.2. Fonction à variables séparées :

Afin de simplifier la recherche de la forme solution, nous posons la solution comme étant le produit de deux fonctions à variables séparées :

$$u(x,t) = v(x).w(t)$$

dès lors, les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.w(t) = v''.w$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v.w''$$

Évidemment, dans ces relations, la notation du prime (') pour chaque fonction v ou w correspond à la dérivée par rapport à son unique variable indépendante (x ou t respectivement).

Et en faisant la séparation des variables (revoir la méthode pour l'équation différentielle du 1er ordre) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad v''.w = \frac{1}{c^2}v.w'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w''}{w}.$$

Comme il s'agit de deux variables x et t qui sont indépendantes, les expressions dans chaque membre de droite et de gauche ne peuvent être en tout temps égales que si elles sont égales à une constante arbitraire k :

$$\frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w''}{w} = k.$$

Ce qui nous permet de séparer en deux équations :

$$\boxed{\begin{cases} v'' - k.v = 0 \\ w'' - c^2 k.w = 0 \end{cases}}$$

Cela nous ramène à la résolution de deux équations différentielles ordinaires du second ordre.

40.3. Satisfaire les conditions aux limites :

L'équation en $v(x)$:

$$v'' - k.v = 0$$

a pour forme solution :

$$\begin{aligned} v(x) &= ax + b, && \text{si } k = 0. \\ v(x) &= C_1 e^{+\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}, && \text{si } k > 0. \\ v(x) &= A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x, && \text{si } k < 0. \end{aligned}$$

Or l'introduction des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0)w(t) = 0, & \forall t \\ u(L,t) = v(L)w(t) = 0, & \forall t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

nous démontre que les deux premières formes ne peuvent exister, puisque :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0)=a0+b \;\Rightarrow\; b=0 \\ \text{puis}\quad v(L)=aL+0=0 \;\Rightarrow\; a=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; v(x)\equiv 0,\quad \forall x.$$

et :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0)=C_1e^{+\sqrt{k}.0}+C_2e^{-\sqrt{k}.0}=0 \;\Rightarrow\; C_1+C_2=0 \\ \text{puis}\quad v(L)=C_1e^{+\sqrt{k}.L}-C_1e^{-\sqrt{k}.L}=0 \;\Rightarrow\; C_1=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; C_1=C_2=0 \;\Rightarrow\; v(x)\equiv 0,\quad \forall x.$$

Il ne nous reste alors que la troisième possibilité, lorsque $k=-p^2<0$:

$$v(0)=A\cos\sqrt{k}.0+B\sin\sqrt{k}.0=0 \;\Rightarrow\; \{A=0$$

$$\text{puis}\quad v(L)=0.\cos\sqrt{k}.L+B.\sin\sqrt{k}.L=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} B=0 \\ ou\quad \sin\sqrt{k}.L=0 \end{cases}$$

Bien sûr, nous devons choisir $B\neq 0$, si nous ne voulons pas avoir de nouveau une solution triviale. De sorte que nous devons avoir :

$$\sin\sqrt{k}.L=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{k}.L=n\pi \;\Rightarrow\; \sqrt{k}=\frac{n\pi}{L}$$

d'où l'expression de la solution pour $v(x)$:

$$\boxed{v_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad n=1,2,3,....}$$

On a omis le coefficient B, qui réapparaîtra plus tard, intégré dans A_n et B_n.

Il y a donc toute une famille de fonctions solutions qui satisfont les conditions (aux limites) sur x.

40.4. Conséquence sur la fonction temporelle

En résolvant la deuxième équation pour trouver $w(t)$:

$$w''-c^2k.w=0.$$

par un raisonnement semblable que pour $v(x)$, on aurait trois possibilités :

$$\begin{aligned} w(t)&=at+b, &&\text{si } c^2k=0.\\ w(t)&=C_1e^{+c\sqrt{k}t}+C_2e^{-c\sqrt{k}t}, &&\text{si } c^2k>0.\\ w(t)&=A\cos c\sqrt{k}.t+B\sin c\sqrt{k}.t, &&\text{si } c^2k<0. \end{aligned}$$

Or, seule la troisième forme solution est à retenir puisqu'on avait déjà restreint : $k=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=i^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2<0$, et qu'en conséquence, nous avons également : $c^2k=-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2<0$, puisque c, la constante physique de propagation, ne peut être imaginaire. En conséquence, nous avons également une famille de solutions pour $w(t)$:

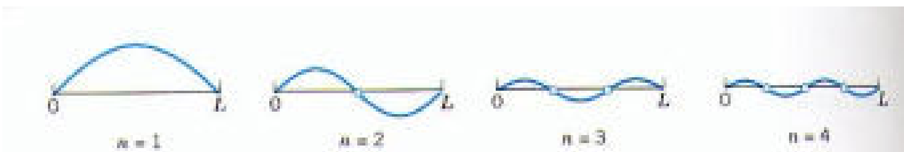
$$\boxed{w_n(t) = A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t, \quad n = 1,2,3,....}$$

On en déduit qu'il y a une famille de solutions dans la forme générale :

$$\boxed{u_n(x,t) = v_n(x) \times w_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times \left(A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t\right), \quad n = 1,2,3,....}$$

Les coefficients A_n et B_n ne seront résolus que plus tard, grâce aux conditions initiales.

INTERPRÉTATION :



Chaque valeur de n conduit à un mode de vibration de la corde. Chaque fonction $u_n(x,t)$ est alors appelée une **fonction propre** (ou fonction caractéristique), et chaque $\omega_n = \frac{cn\pi}{L} = 2\pi f_n$ est appelée la **valeur propre** (ou valeur caractéristique). En termes de la physique des ondes, il s'agit de la pulsation propre du n$^{\text{ème}}$ mode de vibration.

On est en présence d'un **nœud** de vibration lorsque le déplacement vertical est nul en un point de l'axe x, et ce, quelque soit l'instant t considéré. On observant l'expression de la fonction propre $u_n(x,t)$, on obtient un nœud lorsque $\sin\frac{n\pi}{L}x = 0$, c'est à dire lorsque $x = 0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, ..., \frac{kL}{n}, ..., L$. Il y a donc en tout $n-1$ nœuds de vibration (en plus des points de fixation $x = 0$ et $x = L$) pour la mode n.

On est en présence d'un **ventre** de vibration si on se trouve à un endroit de la corde ou le déplacement vertical est maximal en fonction du temps. C'est l'étudiant de déterminer le nombre de ventre de vibrations pour le mode n.

Afin d'accorder la note de la corde (fréquence de vibration) $f_n = \frac{cn}{2L}$, on ajuste la tension T qui influe sur la constante de propagation : $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Lorsque $n = 1$, on parle de la fréquence fondamentale $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, lorsque $n > 1$, on parle de fréquence harmonique $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

40.5. Solution complète de l'équation d'onde

Il apparaît généralement qu'une seule fonction propre :

$$u_n(x,t) = v_n(x)w_n(t) = \left(A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,3,....$$

ne suffit pas à satisfaire les conditions initiales. Cette fonction n'est qu'une forme solution parmi un ensemble.

La solution générale sera donc une combinaison linéaire de toutes les formes solutions :

$$\boxed{u_g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

On s'aperçoit alors qu'il s'agit du produit scalaire d'une série de Fourier temporelle par une série de Fourier en x.

PREMIÈRE CONDITION INITIALE :

Par introduction de la 1ère condition initiale $u(x,0)=f(x)$:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}0+B_n\sin\frac{cn\pi}{L}0\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

soit:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Cela nous permet de calculer les coefficients A_n selon les formules connues d'Euler pour les fonctions périodiques $p=2L$:

$$\boxed{A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx}$$

$f(x)$ doit nécessairement avoir un prolongement impair fictif entre $-L<x<0$, de sorte que $f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ constitue une fonction paire.

DEUXIÈME CONDITION INITIALE :

Ensuite, par introduction de la 2ème condition initiale : $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{A_n cn\pi}{L}\sin\frac{cn\pi}{L}t+\frac{B_n cn\pi}{L}\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{t=0}=g(x)$$

soit :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n c n\pi}{L} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Il s'agit, une fois encore, de calculer les coefficients B_n selon les formules d'Euler pour des fonctions périodiques $p = 2L$:

$$\boxed{\frac{B_n c n\pi}{L} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x.dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x.dx \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_{0}^{L} g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x.dx}$$

Encore une fois, $g(x)$ doit nécessairement avoir un prolongement impair.

40.6. Propagation avant et propagation arrière sur l'axe des x

L'expression de la solution $u(x,t)$, bien que complète sous la forme d'une série de Fourier ne nous permet pas d'interpréter facilement le phénomène de propagation de l'ondulation de la corde de violon. Supposons, pour simplifier un peu l'expression, que la vitesse transversale de déplacement est nulle en tout point : $g(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = 0, \quad \forall n$.

L'expression de la solution particulière est alors :

$$u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

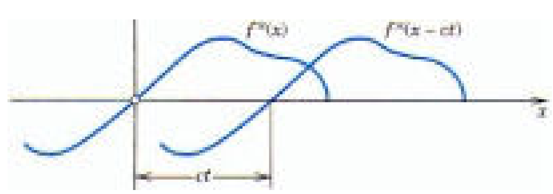
soit à l'aide des relations trigonométriques :

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} (x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} (x + ct)$$

et lorsque ces séries convergent :

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2} \left[f^*(x - ct) + f^*(x + ct) \right]$$

où f^* est la fonction étendue impaire de f. Il s'agit donc de la combinaison d'un déplacement de la forme initiale $f(x)$, se propageant suivant l'axe des x, à la vitesse c et d'un déplacement de la même forme, se propageant selon les x négatifs, à la même vitesse c.



EXEMPLE : DÉFLECTION INITIALE EN TRIANGLE DE LA CORDE VIBRANTE

Soit à trouver les positions successives dans le temps de la corde de violon, lorsque celle-ci est pincée originellement en triangle.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{L}x, & si \quad 0<x<\dfrac{L}{2}\\ \dfrac{2h}{L}(L-x), & si \quad \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

et que la vitesse initiale est nulle en toit point de x.

SOLUTION :

Puisque la vitesse initiale est nulle $g(x)\equiv 0$, nous obtenons la solution formelle exprimée précédemment :

$$u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

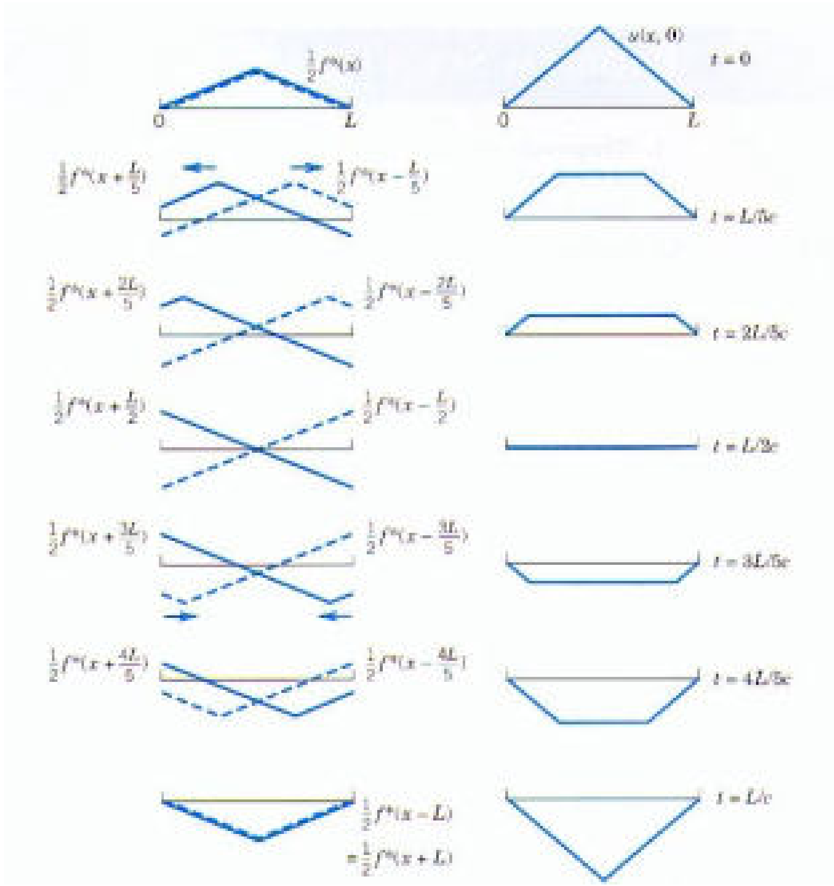
avec les coefficients comme suit :

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Déjà calculés au préalable au chapitre 37 . C'est à dire, sous forme extensive :

$$\boxed{u_p(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi c}{L}t\times\sin\frac{\pi}{L}x-\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi c}{L}t\times\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi c}{L}t\times\sin\frac{5\pi}{L}x+\frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi c}{L}t\times\sin\frac{7\pi}{L}x+...\right]}$$

Pour tracer le mouvement de la corde à divers temps de vibration, il serait plus facile de ne pas évaluer cette série et d'utiliser plutôt la combinaison des deux fonctions $f^*(x-ct)$ et $f^*(x+ct)$ prolongées impaires de $f(x)$. Voici ci-dessous les positions de la corde à des instants différents.



u(x, 0)
t = 0
0
L
t = L/5c
t = 2L/5c
t = L/2c
t = 3L/5c
t = 4L/5c
t = L/c

EXERCICES

Déterminer la série de Fourier qui est la solution particulière de l'équation d'onde dans les cas de déflection originelle suivants ($c^2 = 1$, et $g(x) \equiv 0$):

1. $f(x) = 0.01\sin\frac{3\pi x}{L}$.

2. $f(x) = h.\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{h}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}$.

3. $f(x) = 0.1\times\frac{\pi x}{L}\left(\pi - \frac{\pi x}{L}\right)$.

4. $f(x) = 0.1\times\frac{\pi x}{L}\left(\pi^2 - \left(\frac{\pi x}{L}\right)^2\right)$.

Trouver les solutions générales en utilisant la méthode de séparation des variables pour les équations aux dérivées partielles suivantes :

5. $u_x + u_y = 0$.

6. $u_x - u_y = 0$.

7. $u_x + u_y = (x + y)u$.

8. $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

9. $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

10. $u_{xx} - u = 0$.

11. $y^2 u_x - x^2 u_y = 0$.

12. $xu_{xy} + 2yu = 0$.

QUESTIONS & PROBLÈMES

1. Déterminer la relation entre la fréquence fondamentale de vibration f_1 et la tension T appliquée sur la corde.

2. Déterminer l'expression de la pulsation ω_n caractéristique du mode harmonique n .

3. Récapitulez la démarche pour trouver la solution particulière à l'équation d'onde.

4. Combien a-t-on introduit de conditions initiales (y compris les conditions aux limites qui sont considérées comme des conditions initiales selon x) en tout. Quel lienfaites-vous entre ce nombre et la somme des ordres de dérivées partielles.

5. Ce chapitre utilise le terme ω_n en lieu du λ_n indiquée dans le Kreysig. Lequel vous semble plus approprié et pourquoi? Exprimez pour cela la relation que vous savez apprise en physique des ondes entre la pulsation et la longueur d'onde.

41. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR PAR SÉPARATION DES VARIABLES

41.1. Introduction

(∇^2) est l'opérateur Laplacien scalaire

L'équation de la chaleur est la seconde équation en importance dans les connaissances d'un ingénieur:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\nabla^2 u=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\quad avec \quad c^2=\frac{K}{\sigma\rho}}$$

K est la conductivité thermique, σ la chaleur spécifique et ρ est la densité volumique du corps. Notez la façon d'écrire ci-dessus du Laplacien scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes.

Si on suppose qu'on travaille avec une poutre infiniment plus longue qu'épaisse, on veut négliger la propagation radiale de la chaleur, ou encore, si on s'intéresse à un fil dont la section est constante et de densité volumique homogène, situé selon l'axe x, et après passage en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il s'agit de l'équation de la chaleur selon une seule dimension. N'oubliez que $u(x,t)$ est la température du corps en un point donné de l'axe x à un instant donné t. Si nous avons les conditions aux frontières suivantes (lorsque que les deux extrémités sont plongés à une température de zéro degrés):

$$\boxed{\begin{cases} u(0,t)=0, & \forall t \\ u(L,t)=0, & \forall t \end{cases}}$$

et l'unique condition initiale :

$$\boxed{u(x,0)=f(x)}$$

Nous avons tout un ensemble (équation d'onde + conditions) pour trouver une solution particulière. Pour cela, nous adoptons de nouveau la stratégie suivante :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,t)=v(x).w(t)$.

2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières.

3) Déterminer la forme solution $w(t)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.

4) Exprimer la solution $u(x,t)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent à la condition initiale sur t.

41.2. Fonction à variables séparées :

Encore une fois, afin de simplifier la recherche de la forme solution, nous posons la solution comme étant le produit de deux fonctions à variables séparées :

$$u(x,t) = v(x).w(t)$$

dès lors, les dérivées partielles première et seconde respectives sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.w(t) = v''.w$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x)\frac{\partial w}{\partial t} = v.w'$$

Et en pratiquant la séparation des variables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad v.w' = c^2 v''.w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w'}{w}$$

Comme il s'agit de deux variables x et t qui sont indépendantes, les expressions dans chaque membre de droite et de gauche ne peuvent être en tout temps égales que si elles sont égales à une constante arbitraire k :

$$\frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w'}{w} = k.$$

Ce qui nous permet de séparer en deux équations :

$$\boxed{\begin{cases} v'' - k.v = 0 \\ w' - kc^2.w = 0 \end{cases}}$$

Cela nous ramène à la résolution de deux équations différentielles ordinaires, une du premier ordre, et une du second ordre.

41.3. Satisfaire les conditions aux limites :

L'équation du second ordre en $v(x)$:

$$v'' - k.v = 0$$

a pour forme solution :

$$\begin{aligned} v(x) &= ax + b, &&\text{si } k = 0. \\ v(x) &= C_1 e^{+\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}, &&\text{si } k > 0. \\ v(x) &= A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x, &&\text{si } k < 0. \end{aligned}$$

Or l'introduction des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0)w(t) = 0, & \forall t \\ u(L,t) = v(L)w(t) = 0, & \forall t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

nous démontre que les deux premières formes ne peuvent exister, puisque :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0) = a0 + b \Rightarrow & b = 0 \\ \text{puis} \quad v(L) = aL + 0 = 0 \Rightarrow & a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \equiv 0, \quad \forall x.$$

et :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0) = C_1 e^{+\sqrt{k}.0} + C_2 e^{-\sqrt{k}.0} = 0 \Rightarrow & C_1 + C_2 = 0 \\ \text{puis} \quad v(L) = C_1 e^{+\sqrt{k}.L} - C_1 e^{-\sqrt{k}.L} = 0 \Rightarrow & C_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0, \quad \forall x.$$

Il ne nous reste alors que la troisième possibilité, lorsque $k < 0$:

$$\begin{array}{rl} v(0) = A\cos\sqrt{k}.0 + B\sin\sqrt{k}.0 = 0 \Rightarrow & \{A = 0 \\ \text{puis} \quad v(L) = 0.\cos\sqrt{k}.L + B.\sin\sqrt{k}.L = 0 \Rightarrow & \begin{cases} B = 0 \\ ou \quad \sin\sqrt{k}.L = 0 \end{cases} \end{array}$$

Nous devons choisir $B \neq 0$, si nous ne voulons pas avoir une solution triviale. De sorte que nous devons avoir, pour ce qu'on appelle le nombre d'onde p :

$$\sin\sqrt{k}.L = 0 \Rightarrow \sqrt{k}.L = n\pi \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{n\pi}{L}.$$

d'où l'expression de la solution pour $v(x)$:

$$\boxed{v_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,3,....}$$

Le coefficient B est omis ici, mais réapparaîtra plus tard, intégré dans la solution de $w(t)$.

Il y a donc toute une famille de fonctions solutions qui satisfont les conditions (aux limites) sur x.

41.4. Conséquence sur la fonction temporelle

En résolvant l'équation d'ordre 1 pour trouver $w(t)$:

$$w' - kc^2.w = 0.$$

Qui se retrouve être, à cause de la contrainte : $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$ sur la solution $v(x)$:

$$w' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 w = 0$$

La solution générale de cette équation est, selon le nombre n :

$$\boxed{w_n(t) = C_n e^{-\int_0^t \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 d\tilde{t}} + 0}$$

En conséquence nous avons une famille de formes solutions $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = v_n(x) \times w_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1,2,3,....$$

Et la solution générale $u_g(x,t)$ sera évidemment la combinaison linéaire de toutes ces formes solutions. C'est donc une série trigonométrique qui représente la solution générale à cette équation aux dérivées partielles homogène :

$$\boxed{u_g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}}$$

41.5. Solution particulière de l'équation de la chaleur

Il s'agit à présent de fixer les coefficients C_n à l'aide de l'unique condition initiale : $u(x,0) = f(x)$.

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 .0} = f(x)$$

Les coefficients seront donc calculés selon les formules d'Euler pour les fonctions périodiques $p = 2L$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx$$

$f(x)$ doit nécessairement avoir un prolongement impair fictif entre $-L < x < 0$ (d'après son expression en série trigonométrique), de sorte que $f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ constitue une fonction paire. Et alors :

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx}$$

EXEMPLE : TEMPÉRATURE INITIALE EN TRIANGLE LE LONG DE LA POUTRELLE

Soit à trouver la température le long de la poutrelle à tout instant ultérieur lorsque la distribution originelle en température est triangulaire, et que les bouts sont maintenus à zéro degrés.

$$f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ (L-x), & si \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

SOLUTION :

La solution est telle que formulée pour une poutrelle de longueur L quelconque :

$$u_g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

avec les coefficients comme suit :

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx=\frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x.\sin\frac{n\pi}{L}x.dx+\int_{L/2}^{L}(L-x).\sin\frac{n\pi}{L}x.dx\right)$$

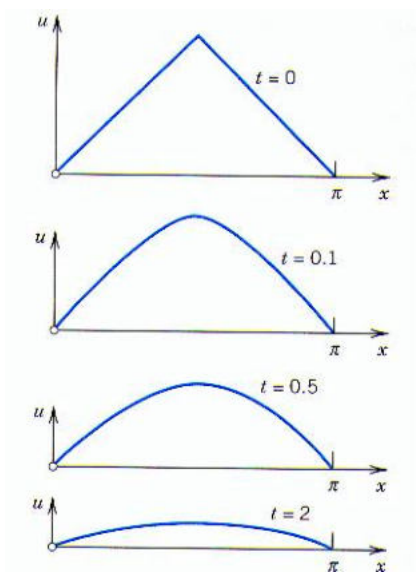
Ce calcul avait déjà été effectué par parties au chapitre 37, dont il suffit de remplacer $\frac{2h}{L}=1$. De sorte que :

$$C_n=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},\quad \text{avec } n \text{ impair}.$$

Et la forme extensive la solution particulière est :

$$\boxed{u_p(x,t)=\frac{4L}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{5c\pi}{L}\right)^2 t}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{7c\pi}{L}\right)^2 t}+\ldots\right]}$$

Cette fois, il n'est pas facile d'utiliser une identité trigonométrique comme précédemment pour mettre en évidence la forme $f^*(x-ct)$ et $f^*(x+ct)$ prolongées impaires de $f(x)$. Voici toutefois la distribution de la température le long de la poutre à différents instants. En l'évaluant numériquement avec un ordinateur et au développement limité ci-dessus pour $u_p(x,t)$.



EXEMPLE : DISTRIBUTION INITIALE DE LA TEMPÉRATURE EN FORME DE SINUS

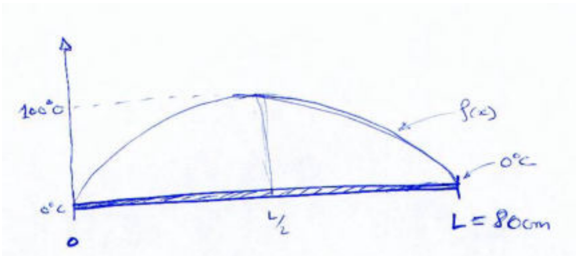
Soit à trouver la distribution de la température le long d'une poutrelle de cuivre long de $L = 80 \quad cm$, si la distribution initiale est $f(x) = u_p(x,0) = 100\sin\frac{\pi x}{80} \quad {}^oC$, et que les bouts (conditions aux frontières) sont maintenus à $0\ {}^oC$. Combien de temps a-il fallu pour que le point de température maximal tombe à $50\ {}^oC$.

Les données sur le cuivre sont :

- Conductivité thermique du cuivre : $K = 0{,}95 \quad cal/cm/\sec/{}^oC$.
- Chaleur spécifique du cuivre : $\sigma = 0{,}092 \quad cal/gm/{}^oC$.
- Densité volumique du cuivre : $\rho = 8{,}92 \quad gm/cm^3$.

SOLUTION :

D'abord un croquis sur la distribution initiale en température :



À partir des données, on peut calculer la constante de propagation :

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} = \frac{0{,}95}{0{,}092 \times 8{,}92} = 1{,}158 \quad \text{cm}^2/\text{sec}.$$

Et que :

$$\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1{,}158}\times 3{,}14}{80}\right)^2 = 0{,}001785 \quad \text{sec}^{-1}$$

Comme la condition initiale est telle que :

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 .0} = f(x) = 100\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

On en déduit par simple inspection que :

$$C_1 = 1 \quad et \quad C_n = 0, \quad \forall n = 2,3,4,...$$

et que l'expression particulière de la solution est :

$$\boxed{u_p(x,t) = 100\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\times e^{-0,001785t}}$$

le point de la tige où la température est maximale est en :

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2}.$$

Et qu'alors :

$$\boxed{u_p(\frac{L}{2},t) = 100\times e^{-0,001785t}}$$

Le moment t_1 cette température sera redescendue à $50\ ^oC$ est :

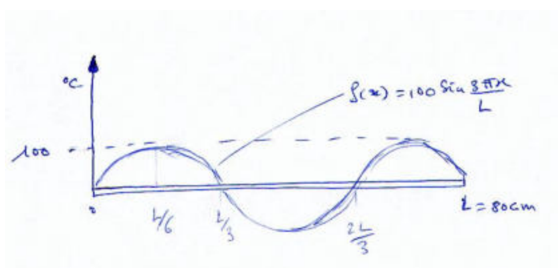
$$u_p(\frac{L}{2},t_1) = 100\times e^{-0,001785t_1} = 50\ ^oC \quad \Rightarrow \quad t_1 = \ln\left(\frac{50}{100}\right)/\left(-0,001785\right) = 388 \quad \text{sec}.$$

EXEMPLE : VITESSE DE DÉCROISSANCE DE LA TEMPÉRATURE

Soit à résoudre le même problème que l'exemple précédent, mais dont l'expression de la distribution initiale de température a été changée pour : $f(x) = u_p(x,0) = 100\sin\frac{3\pi x}{80}\quad ^oC$. Les conditions aux limites sont inchangées.

SOLUTION :

D'abord un croquis de la distribution de la distribution initiale en température :



Cette fois–ci, le seul terme de la série de Fourier qui représente la distribution en température est :

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2.0} = f(x) = 100\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

le troisième terme, ce qui implique :

$$C_3 = 100 \quad et \quad C_n = 0, \quad \forall n = 1,2,4,5,6,...$$

Et la solution particulière est :

$$u_p(x,t) = 100\sin\frac{3\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t}$$

Cette fois-ci le temps t_2 de décroissance de température à $50\ ^oC$ sera :

$$\boxed{u_p(\frac{L}{6},t_2) = 100\times e^{-0,01607t_2} = 50\ ^oC \quad \Rightarrow \quad t_2 = \ln\left(\frac{50}{100}\right)/\left(-0,01607\right) \approx 43 \quad \text{sec}}.$$

Voir la suite dans le chapitre 42.

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

42. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR (SUITE)

42.1. Cas de condition aux extrémités de poutrelle isolées thermiquement

Dans le Chapitre 41, nous avions abordé des exemples de poutrelle dont les deux bouts ont été maintenus à une température de référence de zéro degrés. À présent nous voudrions savoir ce qui se passe lorsque ces bouts sont mis en isolation thermique, c'est à dire qu'il ne peut y a voir de fuite thermique par ces bouts.

Dans ce cas, il faut savoir physiquement que s'il ne peut y avoir d'échange thermique aux bouts, il ne peut y avoir de variation thermique en ces points. Ainsi, au lieu d'avoir des conditions aux limites qui sont des températures nulles aux deux bouts, nous avons des conditions aux limites qui sont des variations de température nulles aux deux bouts :

$$\boxed{\begin{cases} u_x(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}u(0,t) = 0, & \forall t \\ u_x(L,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}u(L,t) = 0, & \forall t \end{cases}}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver une solution générale à l'équation de la chaleur lorsque les conditions aux limites sont $\begin{cases} u_x(0,t) = 0, & \forall t \\ u_x(L,t) = 0, & \forall t \end{cases}$, et la condition initiale étant $u(x,0) = f(x)$.

SOLUTION :

Il nous faut appliquer de nouveau la démarche indiquée au chapitre 41, soit :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,t) = v(x).w(t)$.

2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières.

3) Déterminer la forme solution $w(t)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.

4) Exprimer la solution $u(x,t)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent à la condition initiale sur t.

L'étape 1) ne change pas, et nous avions les mêmes équations séparées :

$$\begin{cases} v'' - k.v = 0 \\ w' - kc^2.w = 0 \end{cases}$$

Et la forme de la solution pour $v(x)$ dépend des conditions aux limites qui ont maintenant changé :

$$v''-k.v=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v(x)=ax+b, & \text{si } k=0. \\ v(x)=C_1e^{+\sqrt{k}x}+C_2e^{-\sqrt{k}x}, & \text{si } k>0. \\ v(x)=A\cos\sqrt{k}x+B\sin\sqrt{k}x, & \text{si } k<0. \end{cases}$$

or ces conditions sont :

$$\boxed{\begin{cases} u_x(0,t)=v'(0)w(t)=0, & \forall t \\ u_x(L,t)=v'(L)w(t)=0, & \forall t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v'(0)=0 \\ v'(L)=0 \end{cases}}$$

De sorte que la 1ère forme solution sera :

$$v(x)=ax+b \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v'(0)=a=0 & \Rightarrow\quad a=0 \\ v'(L)=a=0 & \Rightarrow\quad a=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad v(x)\equiv cte, \quad \text{si } k=0.$$

C'est la solution triviale d'une barre thermiquement isolée et non pas seulement aux deux bouts.

La 2ème forme solution est impossible car :

$$v(x)=C_1e^{+\sqrt{k}x}+C_2e^{-\sqrt{k}x} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v'(0)=\sqrt{k}C_1e^{+\sqrt{k}.0}-\sqrt{k}C_2e^{-\sqrt{k}.0}=0 & \Rightarrow\quad C_1-C_2=0 \\ \text{puis } v'(L)=\sqrt{k}C_1e^{+\sqrt{k}.L}-\sqrt{k}C_1e^{-\sqrt{k}.L}=0 & \Rightarrow\quad impossible \end{cases}, \quad \text{si } k>0$$

Il nous reste alors à explorer la 3ème forme solution :

$$v(x)=A\cos\sqrt{k}x+B\sin\sqrt{k}x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v'(0)=-\sqrt{k}A\sin\sqrt{k}.0+\sqrt{k}B\cos\sqrt{k}.0=0 \quad\Rightarrow\quad B=0 \\ \text{puis } v'(L)=-\sqrt{k}A\sin\sqrt{k}.L+0.\cos\sqrt{k}.L=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=0, & \text{si } k<0 \\ ou \quad \sin\sqrt{k}.L=0 \end{cases} \end{cases}$$

Afin d'éviter une forme triviale nous devons choisir :

$$\sin\sqrt{k}.L=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{k}.L=n\pi \quad\Rightarrow\quad \sqrt{k}=\frac{n\pi}{L}.$$

Et la solution en $v(x)$ est donc :

$$\boxed{v_n(x)=\cos\frac{n\pi}{L}x, \quad n=1,2,3,....}$$

Le coefficient A a été omis, mais il réapparaîtra plus tard, intégré dans la solution de $w(t)$.

Trouvons à présent la forme solution pour $w(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} w'-kc^2.w=0 \\ \text{avec } k=-\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad w'+\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 w=0$$

La solution générale à cette équation est, selon le nombre n :

$$\boxed{w_n(t) = C_n e^{-\int_0^t \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 d\tilde{t}} + 0}$$

En conséquence nous avons une famille de formes solutions $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = v_n(x) \times w_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 0,1,2,3,....$$

Et la solution générale $u_g(x,t)$ à l'équation de la chaleur (homogène) sera de nouveau une série trigonométrique :

$$\boxed{u_g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}}$$

EXEMPLE : CAS DE DISTRIBUTION THERMIQUE INITIALE EN TRIANGLE

Il s'agit de trouver à présent la solution particulière à l'équation de la chaleur, connaissant la condition initiale qui est une distribution initiale de la chaleur en forme de triangle suivant :

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ (L-x), & si \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases}.$$

SOLUTION :

La solution générale a été formulée ci-haut pour une poutrelle de longueur L avec les bouts isolés :

$$u_g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

et en introduisant la condition initiale :

$$\left. u_p(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 .0} = f(x) \right\} \Rightarrow \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right.$$

les coefficients seront calculés selon les formules d'Euler :

$$C_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f^*(x).dx$$

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f^*(x) \cos\frac{n\pi}{L} x.dx$$

Bien sûr, nous devons supposer $f^*(x)$ en prolongement périodique pair de $f(x)$. Un calcul semblable de ces coefficients a déjà été réalisé au chapitre 37 :

$$\boxed{C_0 = \frac{2}{2L}\int_0^L f^*(x).dx = \frac{1}{L}\left[\int_0^{L/2} x.dx + \int_{L/2}^{L}(L-x).dx\right] = \frac{L}{4}}$$

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f^*(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} x.\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L}(L-x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)}$$

d'où l'expression extensive de cette solution particulière :

$$\boxed{u_p(x,t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\left[\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{2c\pi}{L}\right)^2 t} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{6c\pi}{L}\right)^2 t} + \frac{1}{8^2}\cos\frac{8\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{8c\pi}{L}\right)^2 t} + \dots\right]}$$

On remarque que lorsque le temps passe, la température se distribue uniformément $u(x,\infty) \to \frac{L}{4}$, à cause l'isolation des bouts, tandis dans le cas du chapitre 41, la température $u(x,\infty) \to 0$, à cause de la fuite de chaleur par les deux bouts maintenus à zéro degrés.

42.2. Écoulement thermique en deux dimensions

L'équation de la chaleur selon la distribution dans un plan est :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad avec \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}}$$

Cette équation est du 5ème ordre (deux pour x, deux pour y, et une pour t). Pour la réduire d'un degré, nous pouvons supposer la situation où l'écoulement thermique est constant, c'est à dire où il n'y a pas de variation thermique dans le temps $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Dans cette situation l'équation de la chaleur se réduit à **l'équation de Laplace** (plusieurs type d'équation se réduisent à l'équation de Laplace si on élimine le temps) :

$$\boxed{\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0}$$

Comme il n'y a plus de condition initiale à introduire, seulement les conditions aux limites pour x et pour y, on parle de **problème aux frontières**. On désigne par frontière, la courbe fermée C qui délimite la région R du plan xy sur laquelle l'équation de Laplace doit être satisfaite.

DÉFINITIONS :

- On parle de problème de **Derichlet** si c'est la frontière (conditions aux limites) C est appliquée à la fonction $u(x, y)$ elle-même.

- On parle de problème de **Neumann** si la frontière C est appliquée sur la normale à $u(x,y)$, c'est-à-dire à $\frac{\partial}{\partial n}u(x,y)$.

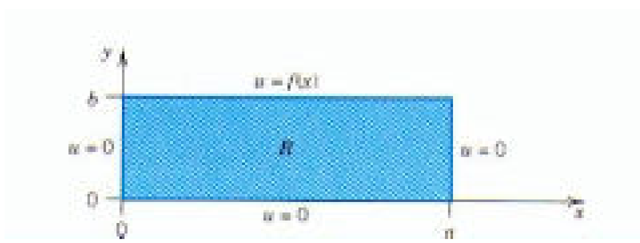
- On parle de problème **mixte** si une partie de la frontière C est appliquée sur $u(x,y)$ et l'autre partie de C sur sa normale $\frac{\partial}{\partial n}u(x,y)$.

42.3. Problème de Derichlet sur un domaine R rectangulaire

Considérons le cas d'une frontière thermique découpée rectangulaire sur le plan xy :

$$\begin{cases} u(0,y)=0, & \forall 0<y<b \\ u(a,y)=0, & \forall 0<y<b \\ u(x,0)=0, & \forall 0<x<a \\ u(x,b)=f(x), & \forall 0<x<a \end{cases}$$

c'est à dire la figure suivante :



Nous allons chercher à résoudre ce problème selon la méthode suivante :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,y)=v(x).w(y)$.

2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières pour x.

3) Déterminer la forme solution $w(y)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.

4) Exprimer la solution $u(x,y)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent aux conditions aux frontières pour y.

SÉPARATION DES VARIABLES :

$$u(x,y)=v(x)w(y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}.w(y)=v''.w \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=v(x).\dfrac{\partial^2 w(y)}{\partial y^2}=v.w'' \end{cases}$$

et l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad v''.w=-v.w'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''}{v}=-\frac{w''}{w}$$

Comme encore une fois, les variables x et y sont indépendantes, la seule façon pour que les quantités de droite et de gauche soient égales à tout moment, c'est que ces quantités soient égalent elles-même à une constante :

$$\frac{v''}{v}=-\frac{w''}{w}=-k$$

Ce qui nous conduit à deux équations différentielles ordinaires séparées :

$$\boxed{\begin{cases} v''+k.v=0 \\ w''-k.w=0 \end{cases}}$$

LA SOLUTION POUR $v(x)$:

Des trois formes ci-dessous :

$$\begin{aligned} v(x)&=ax+b, &&\text{si } k=0. \\ v(x)&=C_1e^{+\sqrt{k}x}+C_2e^{-\sqrt{k}x}, &&\text{si } k<0. \\ v(x)&=A\cos\sqrt{k}x+B\sin\sqrt{k}x, &&\text{si } k>0. \end{aligned}$$

Seule la troisième forme sera retenue à cause des conditions aux frontières suivantes :

$$\begin{cases} u(0,y)=v(0)w(y)=0, & \forall 0<y<b \\ u(a,y)=v(a)w(y)=0, & \forall 0<y<b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0)=0 \\ v(a)=0 \end{cases}$$

et la forme est :

$$\boxed{v_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n=1,2,3,....}$$

LA SOLUTION POUR $w(y)$:

À cause de la contrainte sur $k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2>0$, nous avons l'équation suivante pour $w(y)$:

$$w''-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 w=0$$

des trois formes envisagées :

$$w(y) = ay + b, \quad \text{si} \;\; k = 0.$$
$$w(y) = C_1 e^{+\sqrt{k}\,y} + C_2 e^{-\sqrt{k}\,y}, \quad \text{si} \;\; k > 0.$$
$$w(y) = A\cos\sqrt{k}.y + B\sin\sqrt{k}.y, \quad \text{si} \;\; k < 0.$$

Seule la deuxième forme est acceptable :

$$\boxed{w_n(y) = C_{1n} e^{+\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} + C_{2n} e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}, \quad n = 1,2,3,....}$$

CONDITIONS AUX FRONTIÈRES POUR y :

$$\begin{cases} u(x,0) = v(x)w(0) = 0 \quad , & \forall 0 < x < a \\ u(x,b) = v(x)w(b) = f(x), & \forall 0 < x < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$$

de la 1ère condition, nous pouvons tirer directement :

$$w_n(0) = C_{1n} e^{+\left(\frac{n\pi}{a}\right).0} + C_{2n} e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right).0} \quad \Rightarrow \quad C_{1n} + C_{2n} = 0$$

Donc que le terme doit s'écrire :

$$w_n(y) = C_n \left[e^{+\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} - e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} \right] = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)y$$

Pour pouvoir utiliser la seconde condition sur y, il faut d'abord user de la solution générale qui est la série des termes :

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) w_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right) y \times \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) x}$$

et :

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right) b \times \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) x = f(x) \quad \Rightarrow \quad C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right) b = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x.dx$$

c'est à dire pour les coefficients :

$$\boxed{C_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x.dx}$$

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

43. MEMBRANE VIBRANTE ET ÉQUATION D'ONDE À DEUX DIMENSIONS

43.1. Introduction

Au chapitre 39, nous avions introduit la modélisation de vibration d'une corde et de propagation d'onde selon un seul axe. Nous récidivons avec la modélisation d'un phénomène plus complexe à deux dimensions dans l'espace.

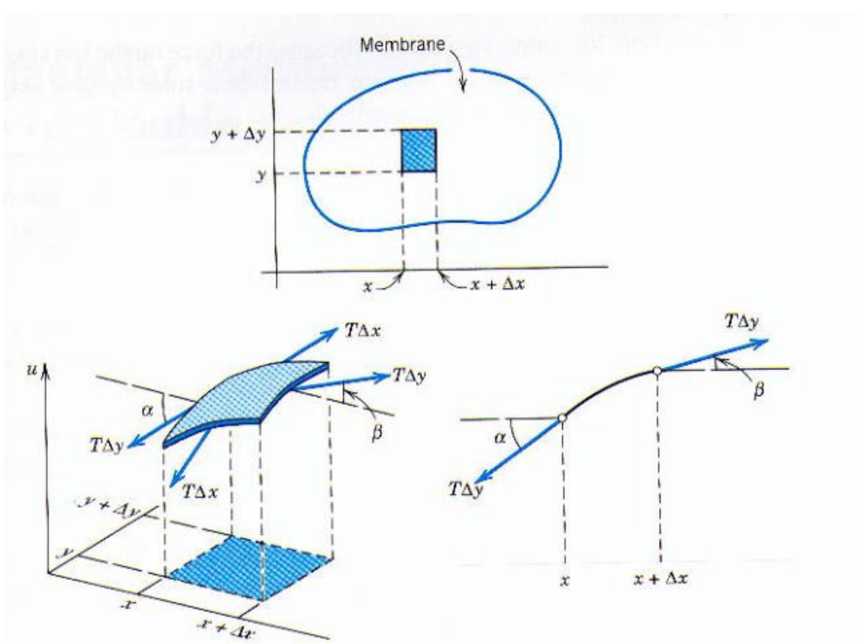
43.2. Mouvement d'une membrane élastique

Comme dans le chapitre 39, le phénomène physique réel est toujours beaucoup plus complexe, néanmoins, avec certaines hypothèses, nous pouvons modéliser le phénomène avec une approximation pratique acceptable.

Pour poser cette équation de vibration, nous allons assumer les données physiques suivantes :

- La masse de la membrane est répartie uniformément par unité de surface (densité superficielle homogène).
- La membrane est entièrement élastique et n'offre pas de résistance à la déformation.
- La membrane a été étirée et tendue fixe sur tout le pourtour et les déformations transversales sont de petite amplitude (angles de déformation petites). Il n'y a pas de mouvement latéral de la membrane.
- La tension d'étirement est constante en tout point de la membrane et égale dans toutes les directions durant le mouvement.
- On néglige évidemment l'effet de la pesanteur terrestre sur la masse de la membrane.

Dans ces conditions on peut chercher l'équation d'équilibre des forces comme suit (voir figure ci-dessous):



Du fait de l'élasticité totale de la membrane, il ne peut y avoir de composante de force normale à la surface de la membrane, uniquement des composantes tangentielles notées $T\Delta x$ et $T\Delta y$ sur la figure. Attention, contrairement au chapitre 39, ici T n'est pas la force de d'étirement (la tension) en elle-même, mais la constante de rappel, force par unité de longueur.

Pour qu'il n'y ait aucun mouvement latéral de la membrane, il faudrait que la composante de force parallèle au plan xy soit nulle en tout point et à tout moment, c'est à dire décomposée sur les axes cartésiennes :

$$T\Delta y\cos\beta - T\Delta y\cos\alpha + T\Delta x\cos\lambda - T\Delta x\cos\gamma = 0$$

Par contre, la résultante des forces verticales, non nulle, est responsable de l'accélération de la quantité de masse inerte en ce point.

$$T\Delta y\sin\beta - T\Delta y\sin\alpha + T\Delta x\sin\lambda - T\Delta x\sin\gamma = \rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}$$

Cette équation est non-linéaire, mais sous approximation d'angles petits, nous pouvons écrire :

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \approx T\Delta y\left(\tan\beta - \tan\alpha -\right) + T\Delta x\left(\tan\lambda - \tan\gamma\right)$$

Or :

$$\tan\beta = \frac{u(x,y_1,t)-u(x+\Delta x,y_1,t)}{x-x+\Delta x} = u_x(x+\Delta x,y_1,t) \qquad \tan\lambda = \frac{u(x_1,y,t)-u(x_1,y+\Delta y,t)}{y-y+\Delta y} = u_y(x_1,y+\Delta y,t)$$

$$\tan\alpha = \frac{u(x+\Delta x,y_2,t)-u(x,y_2,t)}{x+\Delta x-x} = u_x(x,y_2,t) \quad \text{et} \quad \tan\alpha = \frac{u(x_2,y+\Delta y,t)-u(x_2,y,t)}{y+\Delta y-y} = u_y(x_2,y,t)$$

c'est à dire que :

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \approx T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x,y_1,t)-u_x(x,y_2,t)\right] + T\Delta x\left[u_y(x_1,y+\Delta y,t)-u_y(x_2,y,t)\right]$$

et en divisant le tout par $\Delta x\Delta y$:

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \approx T\left[\frac{u_x(x+\Delta x,y_1,t)-u_x(x,y_2,t)}{\Delta x}\right] + T\left[\frac{u_y(x_1,y+\Delta y,t)-u_y(x_2,y,t)}{\Delta y}\right]$$

soit par passage à la limite $\Delta x \to 0 \quad et \quad \Delta y \to 0$:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \approx \frac{T}{\rho}\left[u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)\right]$$

d'où la forme de l'équation d'onde à deux dimensions :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \qquad \text{avec} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}}$$

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE

44. MEMBRANE RECTANGULAIRE

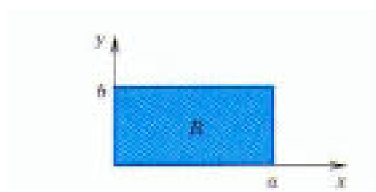
44.1. Introduction

Afin de résoudre l'équation d'onde à deux dimensions, nous allons l'appliquer en premier lieu lorsque la fonction est définie sur un domaine rectangulaire, de sorte que les limites sont indépendantes dans les coordonnées cartésiennes.

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad \text{avec } c^2=\frac{T}{\rho}$$

Cette équation est du sixième ordre (deux en x, deux en y et deux en t). De sorte qu'il nous faut quatre conditions aux limites (deux pour x et deux pour y) :

$$\boxed{\begin{cases} u(0,y,t)=0, & \forall t, \forall 0<y<b \\ u(a,y,t)=0, & \forall t, \forall 0<y<b \\ u(x,0,t)=0, & \forall t, \forall 0<x<a \\ u(x,b,t)=0, & \forall t, \forall 0<x<a \end{cases}}$$



Et deux conditions initiales :

$$\boxed{\begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y) \end{cases}}$$

Trouver une solution particulière à cet ensemble : équation d'onde + conditions, consiste en la stratégie suivante :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,y,t)=v(x,y).w(t)$.

2) Déterminer une solution $v(x,y)$ qui satisfasse aux conditions aux limites pour x et pour y.

3) Déterminer la forme solution $w(t)$ contrainte par la solutions en $v(x,y)$.

4) Élaborer la solution générale $u_g(x,y,t)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse aux présent aux conditions sur t (conditions initiales).

5) Fixer les coefficients pour trouver la solution particulière $u_p(x, y, t)$.

44.2. Fonction à variables séparées

Posons :

$$u(x, y, t) = v(x, y).w(t)$$

Ce qui donne les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.w(t) = v_{xx}.w$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.w(t) = v_{yy}.w$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v.w"$$

Et l'équation d'onde devient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(v_{xx} + v_{yy}\right).w = \frac{1}{c^2}v.w" \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{v_{xx}}{v} + \frac{v_{yy}}{v}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{w"}{w}$$

après avoir divisé les deux membres par $u = v.w$.

Comme le membre de droite ne dépend uniquement que de la variable indépendante t, alors que le membre de gauche n'en dépend pas, ces deux membres ne peuvent s'égaler que si elles sont égales à une constante k :

$$\left(\frac{v_{xx}}{v} + \frac{v_{yy}}{v}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{w"}{w} = k$$

Ce qui nous amène à deux équations séparées :

$$\boxed{\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} - k.v = 0 \\ w" - c^2 k.w = 0 \end{cases}}$$

La première équation s'appelle l'équation d'Helmholtz[1].

---

[1] *Hermann Von Helmholtz (1821-1894) était un physicien et physiologiste allemand né à Postdam. Il avait formulé le principe de conservation d'énergie et le concept d'énergie potentielle. Il avait mesuré la vitesse de l'influx nerveux et découvert le rôle des harmoniques dans le timbre des sons. Ses travaux touchent l'acoustique, la thermodynamique, et la mécanique des fluides.*

44.3. La solution de l'espace :

L'équation de Helmholtz est une équation dépendante seulement des variables de l'espace. Pour la résoudre nous allons de nouveau la scinder en deux autres fonctions selon x, et selon y.

$$v(x,y)=h(x)g(y)\,.$$

De sorte que :

$$v_{xx}+v_{yy}-kv=0 \quad \Leftrightarrow \quad h''.g+h.g''-k.h.g=0$$

soit toujours en divisant par $v=h.g$:

$$\frac{h''}{h}+\frac{g''}{g}=k$$

Encore une fois, nous utiliserons le même argument : pour que la somme des quantités $\frac{h''}{h}$ et $\frac{g''}{g}$ soient toujours égale à la constante k alors que les quantités $h(x)$ et $g(y)$ varient indépendamment, puisque x n'est pas relié à y, c'est que ces quantités soient elles-mêmes égales à une constante :

$$\frac{h''}{h}=k_x,\quad \frac{g''}{g}=k_y,\quad et \quad k_x+k_y=k$$

Ainsi, nous avons les système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{cases} h''-k_x h=0 \\ g''-k_y g=0 \\ k_x+k_y=k \end{cases}$$

44.4. Satisfaire les conditions aux limites

L'équation en $h(x)$:

$$h''-k_x.h=0$$

a pour forme solution :

$$\begin{aligned} h(x)&=C_1x+C_0, &&\text{si } k_x=0. \\ h(x)&=C_1e^{+\sqrt{k_x}x}+C_2e^{-\sqrt{k_x}x}, &&\text{si } k_x>0. \\ h(x)&=A\cos\sqrt{k_x}x+B\sin\sqrt{k_x}x, &&\text{si } k_x<0. \end{aligned}$$

Or l'introduction des conditions aux limites pour x :

$$\begin{cases} u(0,y,t)=v(0,y)w(t)=h(0)g(y)w(t)=0, & \forall y,\forall t \\ u(a,y,t)=v(a,y)w(t)=h(a)g(y)w(t)=0, & \forall y,\forall t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(0)=0 \\ h(a)=0 \end{cases}$$

nous démontre que les deux premières formes ne peuvent exister, puisque :

$$\left.\begin{array}{rl} h(0)=C_1.0+C_0 \;\Rightarrow\; C_0=0 \\ \text{puis}\quad h(a)=C_1.a+0=0 \;\Rightarrow\; C_1.a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=C_0=0 \Rightarrow h(x)\equiv 0, \quad \forall x.$$

et :

$$\left.\begin{array}{rl} h(0)=C_1e^{+\sqrt{k_x}.0}+C_2e^{-\sqrt{k_x}.0}=0 \;\Rightarrow\; C_1+C_2=0 \\ \text{puis}\quad h(a)=C_1e^{+\sqrt{k_x}.a}-C_1e^{-\sqrt{k_x}.a}=0 \;\Rightarrow\; C_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=C_2=0 \Rightarrow h(x)\equiv 0, \quad \forall x.$$

Il ne nous reste alors que la troisième possibilité :

$$\begin{array}{rl} h(0)=A\cos\sqrt{k_x}.0+B\sin\sqrt{k_x}.0=0 \;\Rightarrow\; A=0 \\ \text{puis}\quad h(a)=0.\cos\sqrt{k_x}.a+B.\sin\sqrt{k_x}.a=0 \;\Rightarrow\; B=0 \quad ou \quad \sin\sqrt{k_x}.L=0 \end{array}$$

d'afin de ne pas retomber de nouveau sur une forme triviale, nous devons choisir :

$$\sin\sqrt{k_x}.a=0 \Rightarrow \sqrt{k_x}.a=m\pi \Rightarrow \sqrt{k_x}=\frac{m\pi}{a}$$

d'où la forme solution pour $h(x)$:

$$\boxed{h_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x, \quad m=1,2,3,....}$$

Un raisonnement identique à partir de l'équation :

$$g''-k_y.g=0$$

amène aussi à trois possibilités :

$$\begin{aligned} g(y)&=C_1y+C_0, && \text{si } k_y=0. \\ g(y)&=C_1e^{+\sqrt{k_y}y}+C_2e^{-\sqrt{k_y}y}, && \text{si } k_y>0. \\ g(y)&=A\cos\sqrt{k_y}y+B\sin\sqrt{k_x}y, && \text{si } k_y<0. \end{aligned}$$

mais dont les conditions aux limites pour y :

$$\begin{cases} u(x,0,t)=v(x,0)w(t)=h(x)g(0)w(t)=0, & \forall x,\forall t \\ u(x,b,t)=v(x,b)w(t)=h(x)g(b)w(t)=0, & \forall x,\forall t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0)=0 \\ g(b)=0 \end{cases}$$

nous limite à la seule troisième forme acceptable, lorsque :

$$\sin\sqrt{k_y}.b = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k_y}.b = n\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k_y} = \frac{n\pi}{b}$$

d'où la forme solution pour $g(y)$:

$$\boxed{g_n(y) = \sin\frac{n\pi}{b}y, \quad n = 1,2,3,....}$$

Et finalement la forme solution pour l'espace :

$$\boxed{v_{mn}(x,y) = h_m(x)g_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\times\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad \text{avec} \quad m,n = 1,2,3,....}$$

44.5. La solution du temps

L'équation pour la fonction temporelle est à présent contrainte aux valeurs possibles pour la constante k :

$$\left.\begin{array}{r} k_x < 0 \\ et \quad k_y < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_x + k_y = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k < 0$$

de sorte que l'équation pour $w(t)$:

$$w'' - c^2k.w = 0 .$$

a trois possibilités :

$$\begin{aligned} w(t) &= C_1t + C_0, \quad \text{si } k = 0. \\ w(t) &= C_1e^{+c\sqrt{k_y}y} + C_2e^{-c\sqrt{k_y}y}, \quad \text{si } k > 0. \\ w(t) &= A\cos c\sqrt{k}t + B\sin c\sqrt{k}t, \quad \text{si } k < 0. \end{aligned}$$

mais dont seule la troisième forme devra être retenue à cause des contraintes sur k :

$$\boxed{w_{mn}(t) = A_{mn}\cos c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,t + B_{mn}\sin c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,t, \quad m,n = 1,2,3,....}$$

44.6. La solution de l'espace-temps

Nous avons à présent la forme de solution avec les trois variables indépendantes :

$$u_{mn}(x,y,t) = \sin\frac{m\pi x}{a}\times\sin\frac{n\pi y}{b}\times\left[A_{mn}\cos c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\,t + B_{mn}\sin c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\,t\right], \quad m,n = 1,2,3,....$$

Cette forme seule n'est pas suffisante pour construire une solution particulière en introduisant les conditions initiales, aussi devons nous d'abord formuler la solution générale qui est une double-combinaison de toutes les formes solutions :

$$\boxed{u_g(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left[A_{mn}\cos c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\,t+B_{mn}\sin c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\,t\right]}$$

44.7. La solution particulière par introduction des conditions initiales

PREMIÈRE CONDITION INITIALE :

L'introduction de la première condition va nous permettre de déterminer les coefficients A_{mn} de la double série de Fourier comme suit :

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left[A_{mn}.1+B_{mn}.0\right]=f(x,y)$$

c'est à dire :

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\times K_m(y)$$

On voit alors que $K_m(y)$ joue le rôle de coefficient dans la série de Fourier primaire, de sorte q'on peut les calculer selon les formules d'Euler à partir de la position initiale $f(x,y)$:

$$K_m(y)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}dx$$

d'autre part nous avions :

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

De sorte qu'on peut maintenant calculer les coefficients A_{mn} ciblés, à partir des résultats pour chaque $K_m(y)$:

$$A_{mn}=\frac{1}{b}\int_{-b}^{+b}K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

c'est à dire les formules d'Euler généralisées à deux dimensions :

$$A_{mn}=\frac{1}{b}\int_{-b}^{+b}\left(\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}f^*(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx\right)\sin\frac{n\pi y}{b}dy=\frac{1}{ab}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}f^*(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

Bien évidemment, il faut supposer une extension de la fonction $f(x,y)$ en $f^*(x,y)$ périodique paire par rapport à x et périodique paire par rapport à y pour ne pas avoir tous ces coefficients identiquement nuls. Dans quel cas l'expression de ces coefficients est :

$$\boxed{A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^{+b}\int_0^{+a} f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy}$$

DEUXIÈME CONDITION INITIALE :

L'introduction de la deuxième condition va nous permettre de déterminer les coefficients B_{mn} de la double série de Fourier comme suit :

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c\pi\sqrt{\left(\tfrac{m}{a}\right)^2+\left(\tfrac{n}{b}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left[A_{mn}.0 - B_{mn}.1\right] = g(x,y)$$

une même raisonnement que pour les coefficients A_{mn} nous conduira à :

$$\boxed{B_{mn} = \frac{4}{ab}\frac{1}{c\pi\sqrt{\left(\tfrac{m}{a}\right)^2+\left(\tfrac{n}{b}\right)^2}}\int_0^{+b}\int_0^{+a} g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy}$$

EXEMPLE :

Soit à trouver la solution particulière pour une membrane vibrante, dont les dimensions sont : $a = 4$ m., $b = 2$ m., la tension étant : $T = 12{,}5$ kg/m., la densité superficielle du caoutchouc utilisé pour membrane étant : $\rho = 2{,}5$ kg/m^2, et lorsque la position initiale de la membrane est : $f(x,y) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2)$ m., et que sa vélocité initiale est : $g(x,y) = 0.0$ m/sec..

SOLUTION :

D'abord un croquis :

Ensuite calculons la vitesse de propagation selon les données :

$$c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{12{,}5}{2{,}5} = 5 \;\; m^2/s^2$$

Expression de la solution générale. Étant donné qu'il s'agit de la membrane vibrante dont on avait déjà fait l'étude formelle, son expression à partir des données physiques est alors :

$$u_g(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{4}\times\sin\frac{n\pi y}{2}\times\left[A_{mn}\cos 5\pi\sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}\,t+B_{mn}\sin 5\pi\sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}\,t\right]$$

Calcul des coefficients A_{mn} :

$$\begin{aligned}A_{mn}&=\frac{4}{4\times 2}\int_0^4\int_0^2\underbrace{0{,}1(4x-x^2)(2y-y^2)}_{f(x,y)}\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}dxdy\\&=\frac{1}{20}\int_0^2(2y-y^2)\sin\frac{n\pi y}{2}dy\times\int_0^4(4x-x^2)\sin\frac{m\pi x}{4}dx\end{aligned}$$

Soit par intégration par parties en deux fois :

$$\begin{aligned}\int_0^2\underbrace{(2y-y^2)}_{u}\underbrace{\sin\frac{n\pi y}{2}}_{v'}dy&=\left[\underbrace{(2y-y^2)}_{u}\times\underbrace{-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{2}}_{v}\right]_0^2+\int_0^2\underbrace{(2-2y)}_{u'}\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{2}dy\\&=\left[-(2y-y^2)\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{2}\right]_0^2+\left[(2-2y)\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi y}{2}\right]_0^2+\int_0^2 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi y}{2}dy\\&=0+0+\left[2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^3\cos\frac{n\pi y}{2}\right]_0^2=\begin{cases}\dfrac{32}{n^3\pi^3}, & \text{si } n \text{ impair}\\ 0, & \text{si } n \text{ pair}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4\underbrace{(4x-x^2)}_{u}\underbrace{\sin\frac{m\pi x}{4}}_{v'}dx&=\left[\underbrace{(4x-x^2)}_{u}\times\underbrace{-\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{4}}_{v}\right]_0^4+\int_0^4\underbrace{(4-2x)}_{u'}\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{4}dx\\&=\left[-(4x-x^2)\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{4}\right]_0^4+\left[(4-2x)\left(\frac{4}{m\pi}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{4}\right]_0^4+\int_0^4 4\left(\frac{4}{m\pi}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{4}dx\\&=0+0+\left[2\left(\frac{4}{m\pi}\right)^3\cos\frac{m\pi x}{4}\right]_0^4=\begin{cases}\dfrac{256}{m^3\pi^3}, & \text{si } m \text{ impair}\\ 0, & \text{si } m \text{ pair}\end{cases}\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$A_{mn}=\begin{cases}\dfrac{1}{20}\times\dfrac{256}{m^3\pi^3}\times\dfrac{32}{n^3\pi^3}, & \text{si } m \text{ et } n \text{ impairs}\\ 0, & \text{si } m \text{ ou } n \text{ pair}\end{cases}$$

Calcul des coefficients B_{mn} . Ces coefficients sont tous nuls car :

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\frac{1}{c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}\int_0^{+b}\int_0^{+a}\underbrace{0}_{g(x,y)}.\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy = 0$$

d'où l'expression de la solution particulière :

$$\boxed{u_p(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{409,6}{(2m+1)^3(2n+1)^3\pi^6}\times\sin\frac{(2m+1)\pi}{4}x\times\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}y\times\cos 5\pi\sqrt{\left(\frac{(2m+1)}{4}\right)^2+\left(\frac{(2n+1)}{2}\right)^2}t}$$

EXERCICES

Trouver la solution particulière pour la membrane vibrante lorsque les dimensions sont : $a = 3\,m$, $b = 1\,m$, vitesse de propagation : $c = 1.0$ m/sec., vitesse initiale : $g(x, y) = 0.0$ m/sec. , et que la position initiale est :

1. $f(x, y) = 0.1 \sin 3\pi x \sin 4\pi y$ m.

2. $f(x, y) = k \sin \pi x \sin \pi y$ m.

3. $f(x, y) = kxy(1-x)(1-y)$ m.

4. $f(x, y) = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y$ m.

Trouver la solution particulière pour la membrane vibrante lorsque les dimensions sont : $a = 2\,m$, $b = 1\,m$, vitesse de propagation : $c = 1.0$ m/sec., position initiale $f(x, y) = 0.0$ m., et que la vitesse initiale est :

5. $g(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y$ m/sec.

QUESTIONS & PROBLÈMES

45. LAPLACIEN EN COORDONNÉES POLAIRES

45.1. Introduction

Lorsque la frontière de la membrane vibrante n'est pas rectangulaire, il est préférable de transposer le problème par un changement du système de coordonnées afin que dans cette nouvelle base, on puisse séparer facilement les fonctions à intégrer, puisque les limites transposées deviennent de nouveau indépendantes.

45.2. Cas d'une membrane circulaire

Un cas de changement de coordonnées concerne les membranes circulaires (peau d'un tambour) où la frontière est décrite par une relation implicite entre x et y de la forme : $x^2 + y^2 = r^2$. Dans ce cas, il est préférable de passer en coordonnées polaires par les changements de variable suivants :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

45.3. Équation de la membrane vibrante dans le système de coordonnées polaires

Il faut savoir comment est modifiée l'équation d'onde à deux dimensions dans ce nouveau système de coordonnées, alors que le Laplacien était exprimé originellement dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

Pour cela nous allons développer en utilisant la différentielle totale et la règle de chaîne :

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

donc pour une dérivée seconde :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(u_r r_x + u_\theta \theta_x\right)_x = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned}$$

or :

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} \qquad \text{et} \qquad \theta_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{r^2}$$

et ensuite :

$$r_{xx} = \frac{r - r_x x}{r^2} = \frac{r - \left(\frac{x}{r}\right)x}{r^2} = \frac{y^2}{r^3} \qquad \text{et} \qquad \theta_{xx} = \left(-\frac{y}{r^2}\right)_x = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right) = \frac{2xy}{r^4}$$

d'où :

$$u_{xx} = u_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + u_{r\theta}\left(\frac{x}{r}\right)\left(-\frac{y}{r^2}\right) + u_r\left(\frac{y^2}{r^3}\right) + u_{\theta r}\left(\frac{x}{r}\right)\left(-\frac{y}{r^2}\right) + u_{\theta\theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)^2 + u_\theta\left(\frac{2xy}{r^4}\right)$$

et compte tenu que les dérivées partielles secondes sont continues, alors les dérivés croisées sont égales : $u_{r\theta} = u_{\theta r}$. Donc :

$$u_{xx} = u_{rr}\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + u_{r\theta}\left(-\frac{2xy}{r^3}\right) + u_r\left(\frac{y^2}{r^3}\right) + u_{\theta\theta}\left(\frac{y^2}{r^4}\right) + u_\theta\left(\frac{2xy}{r^4}\right)$$

De façon similaire, on aura :

$$u_{yy} = u_{rr}\left(\frac{y^2}{r^2}\right) + u_{r\theta}\left(\frac{2xy}{r^3}\right) + u_r\left(\frac{x^2}{r^3}\right) + u_{\theta\theta}\left(\frac{x^2}{r^4}\right) + u_\theta\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

d'où l'expression du Laplacien en coordonnées polaires :

$$\boxed{\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}$$

Dans le cas d'extension aux coordonnées cylindriques, on aura, puisque la troisième coordonnée ne change pas :

$$\boxed{\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

AIDE-MÉMOIRE

Ce résumé ne contient aucun concept ou signification des symboles. Ces liens doivent être mémorisés lors de votre présence au cours (fussiez-vous un génie que vous ne pourriez remplacer 45 heures de cours par un couple de formules que vous ne comprendriez pas). Lors des examens ce résumé n'est pas admissible, vous devrez alors en recopier l'essentiel dans vos neuronnes.

Méthode à variables séparables:

$$g(y)y' = f(x) \quad \rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

Forme se ramenant à la méthode des variables séparables:

$$y' = g(\frac{y}{x}) \quad \rightarrow \quad \text{poser} \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + c \quad \rightarrow \quad \text{trouver } u \quad \rightarrow \quad \text{trouver } y$$

Équation exacte à 2 inconnues:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Vérifier que l'équation est exacte: } \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}, \text{ sinon} \\ \text{appliquer procédure pour équation non-exacte.} \\ \text{2) Évaluer } U(x,y) = \displaystyle\int N dy + l(x). \\ \text{3) Chercher } l(x): \ \dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \ \rightarrow \ \dfrac{\partial l}{\partial x} = \ldots \ \rightarrow \ l(x) = \displaystyle\int \ldots \\ \text{4) Vérifier qu'on a bien: } \dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Équation non-exacte à 2 inconnues:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{1) Vérifier que l'équation est non-exacte: } \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \text{ sinon} \\ \text{appliquer directement procédure pour équation exacte.} \\ \text{2) Évaluer le facteur intégrant: } F(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \\ \qquad \text{ou } F(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \\ \text{3) Procéder comme pour l'éuqation exacte avec:} \begin{cases} M = FP \\ N = FQ \end{cases} \end{cases}$$

Équation de Bernoulli:

$$y'+\tilde{p}(x)y=g(x)y^{a} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \text{1) Poser: } u(x)=[y]^{1-a} \\ \text{2) Résoudre directement l'équation différentielle devenue linéaire:} \\ u'(x)+\underbrace{(1\text{-}a)\tilde{p}(x)}_{=p(x)}u(x)=\underbrace{(1\text{-}a)g(x)}_{=r(x)} \quad\rightarrow\quad \text{trouver } u(x) \quad\rightarrow\quad \text{trouver y}(x) \end{cases}$$

Méthode itérative de Picard:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \text{1) } y_n(x)=y_0+\int_{t=x_0}^{t=x} f(t,y_{n-1}(t)).dt \\ \text{2) Répéter 1) pour que } y_n(x) \text{converge vers la solution } y_n(x)\text{:} \end{cases}$$

Équation générale linéaire du 1er ordre:

$$y'+p(x)y=r(x) \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \text{1) Trouver la solution de l'équation homogène: } y'_h(x)+p(x)y_h(x)=0 \quad\rightarrow\quad y_h(x)=Cy_1(x)=Ce^{-\int p(x)dx} \\ \text{2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):} \\ y'_s(x)+p(x)y_s(x)=r(x) \quad\rightarrow\quad y_s(x)=y_1(x)\int\frac{r(x)}{y_1(x)}dx \\ \text{3) Former la solution générale:} \\ y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}r(x).dx+c\right] \\ \text{4) Trouver la solution particulière:} \\ \quad \text{Introduire la condition initiale } y(x_0)=k_0 \text{pour fixer la constante } C \end{cases}$$

Nombres complexes:

$$\begin{cases} e^{+i\omega x}=\cos\omega x+i\sin\omega x \\ e^{-i\omega x}=\cos\omega x-i\sin\omega x \end{cases}$$

$$C_1e^{+i\omega x}+C_2e^{-i\omega x}=\begin{cases} A\cos\omega x+B\sin\omega x \\ \text{en posant } \begin{cases} A=C_1+C_2 \\ B=i(C_1-C_2) \end{cases} \end{cases}$$

$$A\cos\omega x+B\sin\omega x=\begin{cases} C\cos(\omega x-\theta) \\ \text{en posant } \begin{cases} C=\sqrt{A^2+B^2} \\ \theta=\arctan(-\frac{B}{A}) \end{cases} \end{cases}$$

Équation à coefficients non-constants d'Euler-Cauchy:

$$x^2y''+axy'+by=r(x) \quad \rightarrow$$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$x^2y''_h+axy'_h+by_h=0 \quad \rightarrow \quad$ poser: $y(x)=x^m$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$$m^2+(a-1)m+b=0$$

cas_1: $m_1 \neq m_2$ 2 racines réelles:

$$y_h(x)=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}$$

cas_2: $m_1 = m_2$ 1 racine double:

$$y_h(x)=\left(C_1+C_2\ln(x)\right)x^{m_1}$$

cas_1: $m_1=\overline{m_2}$ 2 racines complexes conjuguées:

$$y_h(x)=x^{\alpha}\left[A\cos(\ln x)+B\sin(\ln x)\right]$$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$x^2y''_s+axy'_s+by_s=r(x) \quad \rightarrow \quad y_s(x)=-y_1\int\frac{y_2r(x)dx}{x^2(y_1y'_2-y'_1y_2)}+y_2\int\frac{y_1r(x)dx}{x^2(y_1y'_2-y'_1y_2)}$$

3) Former la solution générale:

$$y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)$$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les 2 conditions initiales $\begin{cases} y_g(x_0)=k_0 \\ y'_g(x_0)=k_1 \end{cases}$ pour fixer les constantes $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Équation générale linéaire du 2ème ordre mais à coefficients constants seulement:

$$y''+ay'+by=r(x) \quad \rightarrow$$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$y''_h+ay'_h+by_h=0 \quad \rightarrow \quad$ poser: $y(x)=e^{\lambda x}$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

cas_1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 2 racines réelles:

$$y_h(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

cas_2: $\lambda_1=\lambda_2$ 1 racine double:

$$y_h(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^{\lambda_1 x}$$

cas_3: $\lambda_1=\overline{\lambda_2}$ 2 racines complexes conjuguées:

$$y_h(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left[A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)\right] \quad ,\omega=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

cas_4: $\lambda_1=\overline{\lambda_2}$ 2 racines imaginaires pures ($a=0$):

$$y_h(x)=\left[A\cos(\omega_0 x)+B\sin(\omega_0 x)\right] \quad ,\omega_0=\sqrt{b}$$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$y''_s+ay'_s+by_s=r(x) \quad \rightarrow \quad y_s(x)=-y_1\int\frac{y_2r(x)dx}{(y_1y'_2-y'_1y_2)}+y_2\int\frac{y_1r(x)dx}{(y_1y'_2-y'_1y_2)}$$

3) Former la solution générale:

$$y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)$$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les 2 conditions initiales $\begin{cases} y_g(x_0)=k_0 \\ y'_g(x_0)=k_1 \end{cases}$ pour fixer les constantes $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Méthode de Lagrange (variation de paramètre pour trouver la 2ème forme solution):

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0 \\ y_1 \quad \text{est connue} \\ y_2 \quad \text{est recherchée} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{poser :} \quad y_2(x)=u(x)y_1(x) \rightarrow y_2(x)=y_1.\int\left(\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\right)dx \end{cases}$$

Transformation de Laplace:

Définition

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$

Transformation des fonctions dérivées

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-sf(0)-f'(0)$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n.\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\sum_{k=0}^{k=n-1}s^k f^{(n-1-k)}(0)$$

Transformation des fonctions primitives

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\int_0^{\varsigma} f(\tau)d\tau d\varsigma\right]=\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\ldots=\ldots$$

Dérivées des transformées

$$\mathcal{L}\left[t.f(t)\right]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[f(t)\right]=-F'(s)$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

Intégrales des transformées

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{\upsilon=s}^{\upsilon=\infty}F(\upsilon)d\upsilon$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\int_{\upsilon=s}^{\upsilon=\infty}\left(\ldots\int_{\psi=\ldots}^{\psi=\infty}F(\psi)d\psi\right)\ldots d\upsilon$$

Translation dans le temps

$$\mathcal{L}\left[f(t-a).U(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

Translation dans les phases

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$$

Propriété pour une fonction périodique de période T

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{t=0}^{t=T}e^{-st}f(t)dt$$

Laplace - Table des transformées:

f(t)	F(s)
$\frac{t^0}{0!}$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^1}{1!}$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!} \quad (n \in N)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^a}{\Gamma(a+1)} \quad (a \in R)$	$\frac{1}{s^{a+1}}$
$\frac{e^{at}}{0!}$	$\frac{1}{(s-a)}$
$\frac{t.e^{at}}{1!}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{t^n e^{at}}{n!} \quad (n \in N)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^b e^{at}}{\Gamma(b+1)} \quad (b \in R)$	$\frac{1}{(s-a)^{b+1}}$
$\frac{e^{at}-e^{at}}{(a-b)} \quad avec\ (a \neq b)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{at}}{(a-b)} \quad avec\ (a \neq b)$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

f(t)	F(s)
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$	$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos \omega t)$	$\frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$
$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$	$\frac{1}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}$
$U(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES – Résolution par la transformée de Laplace:

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - Méthode de variation des paramètres:

$[Y'] = [A]*[Y] + [G(t)] \quad \rightarrow$

1) Trouver la solution de l'équation homogène:

$[Y_h'] = [A]*[Y_h] \quad \rightarrow \quad$ poser: $[Y_h(t)] = [X]e^{\lambda t}$

$\rightarrow$ équation caractéristique associé:

$([A] - \lambda[I])[X] = 0$

cas λ_i tous distincts:

introduire valeur de λ_i dans $([A] - \lambda_i[I])[X_i] = 0$

et déterminer vecteur propre associée $[X_i]$

cas λ_i racine double:

introduire valeur de λ_i dans $([A] - \lambda_i[I])[U] = [X_i]$

pour trouver 2ème vecteur indépendant:

$[Y_h] = \ldots + c_{i0}[X_i]e^{\lambda_i t} + c_{i1}\left([X_i]t + [U]\right)e^{\lambda_i t} + \ldots$

2) Trouver la solution singulière (par la méthode de variation des paramètres):

$$[Y_s(t)] = [\mathbf{Y}(t)]*\left(\int_{t_0}^{t}[\mathbf{Y}(\tau)]^{-1}*[G(\tau)]\,d\tau\right) + [\mathbf{Y}(t)]*[C_s]$$

3) Former la solution générale:

$[Y_g(t)] = [Y_h(t)] + [Y_s(t)]$

4) Trouver la solution particulière:

Introduire les n conditions initiales dans la solution générale pour fixer les constantes $C_1 \ldots C_n$.