Exercices Math :

1. On veut construire une salle de vente rectangulaire d'une superficie de 10000 m^2. Le prix de revient de la façade est, au m^2, le double de celui des murs latéraux et arrière. La hauteur de la salle est fixée à 10m. Quelles dimensions doit-on adopter pour que le prix de revient de cette salle doit minimum ?

2. Le prix par heure du carburant consommé par un tracteur est proportionnel au carré de sa vitesse et est de 250 F par heure pour une vitesse de 25km/h. Les autres frais s'élèvent à 1000 F/h, quelle que soit la vitesse. Chercher la vitesse qui rend minimum le prix par km.

3. Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune, les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions totales de la feuille nécessitant le moins de papiers.

4. Un service de livraison de nuit livre uniquement les colis dont la somme de la longueur et du périmètre de la base n'excède pas 90 cm. Quelles doivent être les dimensions d'un paquet ayant une base carrée pour maximiser le volume ?

5. Un vaisseau mouille à 3 km du rivage. En face d'un point situé 5 km plus loin le long de la côte, un autre vaisseau est ancré à 9 km du rivage. Un canot du premier vaisseau doit conduire des passagers jusqu'au rivage et y reprendre d'autres passagers pour les conduire vers l'autre vaisseau. Déterminer le trajet minimum à parcourir par le canot. A quel endroit du rivage doit-il accoster ?

6. Dans une entreprise, la quantité que l'on peut produire à partir d'un nombre L d'unités de travail et d'un nombre K d'unités de capital est donnée par $Q = K*L^{1/2}$. Une unité de travail coûte 2 unités monétaires et une unité de capital en coûte 4. On souhaite produire 125 unités du bien considéré. Combien d'unités de capital et de travail devra-t-on utiliser pour minimiser le coût ?

7. Un marchand de vélos dispose de 100 V.T.T. qu'il loue chacun 1000 francs par jour. Il estime que chaque augmentation de ce prix de 20 francs lui fera perdre un client. A combien doit-il louer ses V.T.T. pour maximiser sa recette quotidienne et combien en louera-t-il alors par jour ?
   Dessiner les graphiques des fonctions donnant, en fonction du prix de location,
   * Le nombre de clients,
   * La recette quotidienne ?

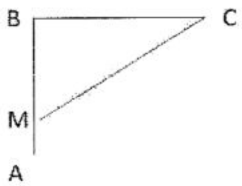
8. Le coût d'exploitation d'un camion, roulant sur l'autoroute, indépendamment du coût de travail, est 0.65 + v/100 unités monétaires par kilomètre, où v est la vitesse constante du

camion exprimée en km/h. Le salaire du chauffeur est de 49 u.m l'heure. Quelle vitesse le camion devrait-il maintenir sur 600 km d'autoroute pour minimiser le coût ?

9. On veut construire un coffre parallélépipédique de capacité égale à 0.64 m^3 et qui possède deux faces opposées carrées. Rechercher les dimensions qui vont minimiser les frais de peinture extérieure sachant que la peinture du couvercle demande 7.5 € par m^2 et celle des faces latérales 2.5 € par m^2, le fond n'étant pas peint.

10. Le lien entre la recette R et les montants x et y versés à deux firmes publicitaires est donné par R = 200X/(5+X) + 100Y/(10+Y). Le profit net s'élève à un cinquième de la recette diminuée des frais de publicité. Le budget publicitaire est de 25 unités monétaires. Déterminer comment ce budget doit être réparti entre les deux firmes pour maximiser le profit net.

11. A la fin d'une course, il ne reste plus aux chevaux qu'une distance de 1.75 km à parcourir : AB d'une longueur de 1 km puis, BC d'une longueur de 0.75 km. Ils peuvent quitter la piste pour atteindre directement l'arrivée en C, mais alors leur vitesse est réduite à 25%. En quel point M, le jockey doit-il quitter la piste pour faire gagner son cheval ?



12. Deux usines A et B situées à 4 km l'une de l'autre émettent tout autour d'elles des fumées qui contiennent des particules polluantes. On suppose que le nombre de particules émises par chaque usine est directement proportionnel à la quantité de fumée et inversement proportionnel au cube de la distance de l'usine. Si l'usine A rejette deux fois plus de fumée que l'usine B, quel est l'endroit entre A et B lo moins pollué ?

13. La piste d'un hippodrome mesure 800 m et a la forme d'un rectangle terminé aux deux extrémités par deux demi-cercles. Quelles sont les dimensions qui maximisent l'aire de la partie rectangulaire ?

14. On désire fabriquer un récipient métallique de forme cylindrique sans couvercle de 1 dm^3 de contenance. La base circulaire est découpée dans une pièce carrée, le reste de la pièce étant mis au rebut. Quelles doivent être les dimensions du récipient pour employer le moins de matériau possible ?

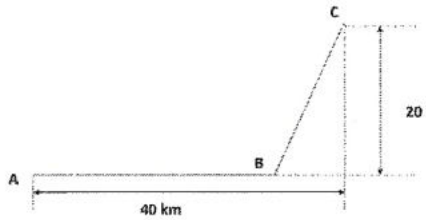
15. Un club d'échecs ayant 2000 membres qui payent 150F par an veut augmenter le prix de sa cotisation annuelle. Une étude de marché montre que, pour chaque augmentation de 25F, le club peut perdre jusqu'à 200membres.
* Représenter le graphique de la fonction donnant, pour chaque prix de la cotisation :
I. le nombre de membres,
II. La recette,

* A quel niveau de cotisation, le club maximise-t-il ses recettes ?

16. Deux localités A et B sont situées du même côté d'une route rectiligne. Leurs distances respectives AC et BD à cette route sont 6 km et 10 km et la distance CD vaut 48km. On se propose de relier ces deux localités par une ligne électrique, non pas directement, mais en dirigeant d'abord cette ligne de A vers un point P de la route, puis de P vers B. Où doit-il être choisi pour que la longueur de la ligne soit minimale ?

17. Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral. Quelles sont les dimensions du rectangle qui donneront à cette fenêtre la plus grande surface, si son périmètre doit être de 36 cm ?

18. On va construire une voie de chemin de fer entre les villes A et C mais le relief montagneux impose de passer par un endroit B à l'est de A, comme indiqué sur la figure. Si la construction de la voie ferrée coûte par km 40000 € sur le tronçon AB er 80000 € sur le tronçon BC, où doit se situer B pour que cette infrastructure coûte le moins cher ?



a) Trouver la distance minimale du point p ☹4,2) à la parabole d'équation $y^2 = 8x$.
b) Si m est le point de cette parabole le plus proche du point p, prouver que la tangente en m à la parabole est perpendiculaire à la droite pm.

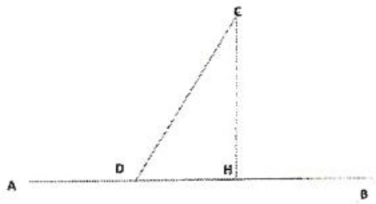
19. Un entrepreneur a l'intention de construire une remise à toit plat de 29 m^3. La base est un rectangle dont la largeur mesure les trois quarts de la longueur. Le coût au mètre carré des matériaux diffère selon qu'il s'agit du sol : 40€, des murs 48 € ou du toit 24 €. Quelles sont les dimensions de la remise la plus économique.

20. A partir d'une feuille de carton qui a la forme d'un carrée de côté a, on désire fabriquer une boîte sans couvercle en enlevant des petits carrées égaux, aux 4 coins de cette feuille de carton et en repliant les bords. Quelle longueur faut-il donner aux côtés des petits carrés pour que le volume de la boîte construite soit maximum ?

21. Deux mâts de 6 et 8 m de haut sont plantés verticalement dans le sol à 10 m l'un de l'autre. Quelle est la longueur du câble le plus court qui puisse joindre les extrémités des mâts tout en touchant le sol quelque part entre les mâts ?

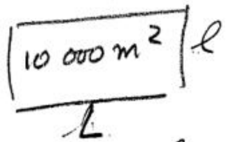
22. On veut installer une ligne électrique entre les villages A et B avec une déviation vers le hameau C à partir d'un point D à déterminer. On dispose des distances suivantes : d(A,B) = 12 km, d(H,B)=4km, d(C,H)= 2km. La ligne principale AD coûte 8 unités monétaires au km, la ligne DB coûte 6 unités monétaires au km et la ligne DC ne coûte que 4 unités monétaires au

km. Où doit-on situer D pour que le coût total de l'installation soit minimum ?.



23. On désire construire un récipient ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée et ayant une capacité de 500 litres. Sachant que le matériau utilisé pour la confection du couvercle est deux fois plus coûteux que celui qui entre dans la fabrication du fond et des parois latérales. Quelles doivent être

1)



$S = lL = 10\,000 \text{ m}^2$

$\hookrightarrow l = \dfrac{10\,000}{L}$

on construit la fonction coût:

$$C = \underbrace{2p \cdot 10L}_{\text{façade}} + \underbrace{p\, 10L}_{\text{face arrière}} + \underbrace{2p\, 10l}_{\text{faces latérales}}$$

p = prix au m²

$$= 30pL + 20pl = 10p[3L + 2l]$$

$$= 10p\left[3L + \frac{20000}{L}\right]$$

$$C' = 3 - \frac{20\,000}{L^2} = 0 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{20\,000}{3}} = 81{,}6 \text{ m.}$$

$$\Rightarrow l = 122{,}5 \text{ m.} \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L = 81{,}6 \text{ m} \\ l = 122{,}5 \text{ m} \end{array}}$$

L		81,6	
C'	$-$	0	$+$
C	↘	min	↗

Il s'agit bien d'un min

---

2) $p = k v^2 \Rightarrow$ pour $v = 25$: $k = \dfrac{p}{v^2} = \dfrac{250}{25^2} = 0{,}4$

Fonction coût par heure

$$C = 1000 + 0{,}4v^2$$

Distance parcourue en 1 h $\quad d = 1 \cdot v$

Fonction coût par km

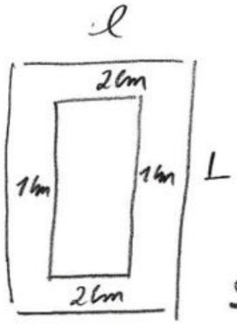
$$F = \frac{C}{v} = \frac{1000}{v} + 0{,}4v$$

$$F' = -\frac{1000}{v^2} + 0{,}4 = 0 \Rightarrow \boxed{v = 50 \text{ km/h}}$$

v		50	
F'	$-$	0	$+$
F	↘	min	↗

Il s'agit bien d'un min

3)



$$(l-2)(L-4) = 392$$

$$\Rightarrow l = \frac{392}{L-4} + 2$$

$$S = l \cdot L = \left(\frac{392}{L-4} + 2\right) L.$$

$$S' = -\frac{392}{(L-4)^2} \cdot L + \left(\frac{392}{L-4} + 2\right) \cdot 1$$

$$= -\frac{392L}{(L-4)^2} + \frac{392}{L-4} + 2$$

$$\Rightarrow -392L + 392(L-4) + 2(L-4)^2 = 0$$

$$-392L + 392L - 1568 + 2(L-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (L-4)^2 = 784 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L = \sqrt{784} + 4 \\ \quad = 32 \text{ cm} \\ \Rightarrow l = 16 \text{ cm} \end{array}}$$

		32	
S'	$-$	0	$+$
S	↘	min	↗

Il s'agit bien d'un min

---

4) Contrainte $h + 2(L+l) \leq 90$ cm.

Si base carrée $h + 4L \leq 90$ cm

$$V = h \cdot L^2 = (90 - 4L)L^2 = 90L^2 - 4L^3$$

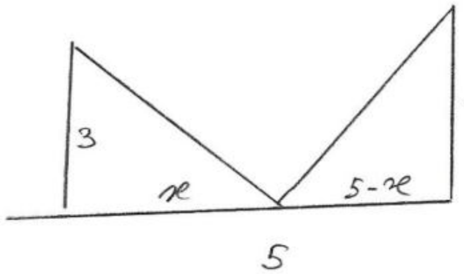
$$V' = 180L - 12L^2 = 12L[15 - L] = 0$$

$\rightarrow L = 15$ cm

$h = 30$ cm

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L = 15 \text{ cm} \\ h = 30 \text{ cm} \end{array}}$$

5



3

Trajet $T = \sqrt{3^2+x^2} + \sqrt{(5-x)^2+9^2}$

$$T' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3^2+x^2}}\cdot\cancel{2}x + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{(5-x)^2+9^2}}\,\cancel{2}(5-x)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3^2+x^2}} = \frac{5-x}{\sqrt{(5-x)^2+9^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2+x^2} = \frac{(5-x)^2}{(5-x)^2+9^2}$$

$$\Rightarrow x^2\left[(5-x)^2+9^2\right] = (5-x)^2(3^2+x^2)$$

on développe et on réduit

$\Rightarrow 72x^2 + 30x - 225 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}5 \text{ (à rejeter)} \\ x_2 = 1{,}5 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x = 1{,}5 \text{ km}}$

		1,5	
T'	$-$	0	$+$
T	↘	m	↗

Il s'agit bien d'un minimum.

---

6. $Q = K \cdot L^2 = 125 \Rightarrow K = \frac{125}{L^2}$

Fonction Coût

$$C = 2L + 4K = 2L + \frac{500}{L^2}$$

$$C' = 2 - \frac{500}{L^4}\cdot 2L = 2 - \frac{1000}{L^3} = 0$$

$$L = \sqrt[3]{500} = 7{,}94 \Rightarrow K = 1{,}984$$

		7,94	
C'	$-$	0	$+$
C	↘	m.	↗

$$\boxed{\begin{array}{l} L = 7{,}94 \\ K = 1{,}984 \end{array}}$$

(4)

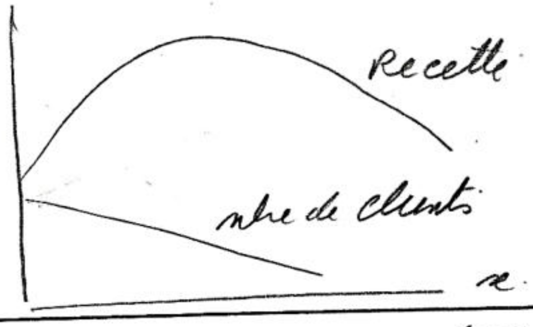
7 $R = (1000 + 20x)(100 - x)$

$R' = 20(100 - x) + (1000 + 20x)(-1)$

$= 2000 - 20x - 1000 - 20x$

$= 1000 - 40x = 0 \Rightarrow x = 25$

$\Rightarrow$ Il faut louer à 1500 F/j ce qui correspond à 75 clients



8) Durée du trajet $t = 600/v$

Cout du trajet

$C = \left(0{,}65 + \frac{v}{100}\right)600 + 49 . t$

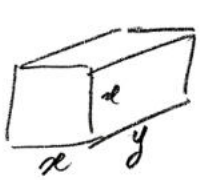
$= 390 + 6v + 49 . 600/v$

$C' = 6 - \frac{29400}{v^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{29400}{6}} = 70 \text{ km/h}}$

		70	
C'	$-$	0	$+$
C	$\searrow$	m	$\nearrow$

c'est bien un min

9)



$V = x^2 y = 0{,}64 \text{ m}^3 \Rightarrow y = \frac{0{,}64}{x^2}$

$C = 7{,}5 . xy + 2(x+y) . x . 2{,}5$

$= 7{,}5 . x . \frac{0{,}64}{x^2} + 5x^2 + \frac{5 . 0{,}64\, x}{x^2}$

$= 5x^2 + \frac{4{,}8}{x^2} + \frac{3{,}2}{x^2} = 5x^2 + \frac{8}{x^2}$

(5)

$$C' = 10x - \frac{8}{x^4} \cdot 2x = 10x - \frac{16}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow x^4 = \frac{16}{10} \Rightarrow \boxed{x = 1{,}125 \text{ m}}$$
$$\Rightarrow \boxed{y = 0{,}506 \text{ m}}$$

		0,506		
C'	$-$	0	$+$	Il s'agit bien d'un min
C	$\searrow$	m	$\nearrow$	

---

10) $$R = \frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}$$

$$P = \frac{1}{5}(R - 25)$$

$$x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{5}\left[\frac{200x}{5+x} + \frac{100[25-x]}{10+25-x} - 25\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{200x}{5+x} + \frac{2500-100x}{35-x} - 25\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{200x(35-x) + (2500-100x)(5+x) - 25(5+x)(35-x)}{(5+x)(35-x)}\right]$$

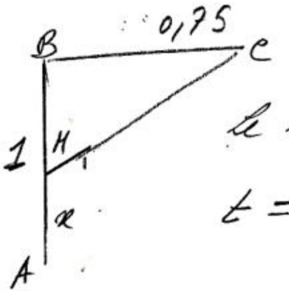
$$= \dots = \frac{55x^2 - 1650x - 1625}{(5+x)(35-x)}$$

On calcule la dérivée et on obtient après simplification

$$P' = -\frac{8000(2x-30)}{(5+x)(35-x)} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 15 \Rightarrow y = 10}$$

		15		
P'	$+$	0	$-$	c'est bien un maximum
P	$\nearrow$	M	$\searrow$	

11)



Soit v la vitesse

Le temps de parcours selon AMC

$$t = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{0{,}75^2 + (1-x)^2}}{0{,}25\, v}$$

$$= \frac{1}{v}\left[x + 4\sqrt{0{,}75^2 + (1-x)^2} \right]$$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{v}\left[1 + 4 \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{0{,}75^2 + (1-x)^2}} \cdot \cancel{2}(1-x)\cdot(-1) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(1-x)}{\sqrt{0{,}75^2 + (1-x)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow 16(1-x)^2 = 0{,}75^2 + (1-x)^2$$

$$\Rightarrow 15(1-x)^2 = 0{,}75 \Rightarrow (1-x)^2 = \frac{0{,}75}{15} = 0{,}05$$

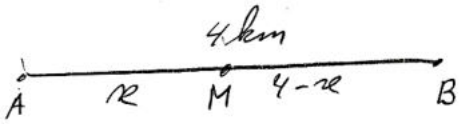
$$\Rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{0{,}05} = 0{,}776 \text{ km}}$$

		0,776	
t'	$-$	0	$+$
t	$\searrow$	m	$\nearrow$

Il s'agit bien d'un min

---

12)



Pollution en M

$$P = 2 \cdot Q \frac{1}{x^3} + Q \frac{1}{(4-x)^3}$$

↑ quantité de fumées émises

$$P' = -\frac{2Q}{x^6} 3x^2 - \frac{Q}{(4-x)^6} \cdot 3(4-x)^2 \cdot (-1)$$

$$= -\frac{6Q}{x^4} + \frac{3Q}{(4-x)^4} = 0$$

$$6(4-x)^4 = 3x^4$$

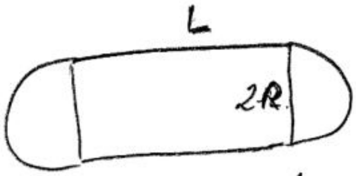
$$\sqrt[4]{2}\,(4-x) = x \Rightarrow (\sqrt[4]{2}+1)x = 4\sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}+1} = 2{,}172 \text{ km}}$$

		2,172		
P'	−	0	+	Il s'agit bien
P	↘	m	↗	d'un minimum.

---

13)



la longueur est égale à

$$2L + 2 \cdot \pi R = 800 \text{ m}$$

$$\Rightarrow L = 400 - \pi R$$

$$A = L \cdot 2R = (400 - \pi R)\, 2R$$
$$= 800R - 2\pi R^2$$

$$A' = 800 - 4\pi R = 0 \Rightarrow R = \frac{800}{4\pi} = 63{,}66 \text{ m}$$

$$\Rightarrow L = 400 - \pi \cdot 63{,}66 = 200 \text{ m}$$

les dimensions doivent donc être de

$$\boxed{200\text{ m} \times 137{,}32 \text{ m.}}$$

		63,66		
A'	+	0	−	c'est bien un max
A	↗	M.	↘	

---

14)

$$V = \pi R^2 h = 1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$$

la surface de métal est donnée par

$$A = \pi R^2 + 2\pi R h$$ (Il n'y a pas de couvercle)

$$= \pi R^2 + \frac{2}{R}$$

(8)

$$A' = 2\pi R - \frac{2}{R^2} = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}683 \text{ dm.}$$

$$H = 0{,}683 \text{ dm.}$$

		0,683	
A'	$-$	0	$+$
A	$\searrow$	m	$\nearrow$

c'est bien un min

15)

$$R = (2000 - 200x)(150 + 25x)$$

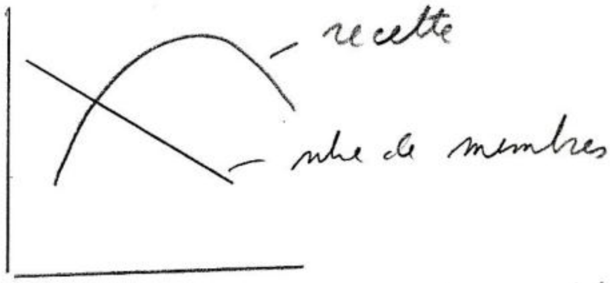
$$R' = -200(150 + 25x) + (2000 - 200x).25$$

$$= -5050(6 + x) + 5000(10 - x)$$

$$= -5000[-6 - x + 10 - x]$$

$$= \ldots 00[\,4 - 2x] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2 \Rightarrow R = 300000 \text{ €}}$$



		4	
R'	$+$	0	$-$
R	$\nearrow$	M	$\searrow$

Il s'agit bien d'un max

Le prix doit être de

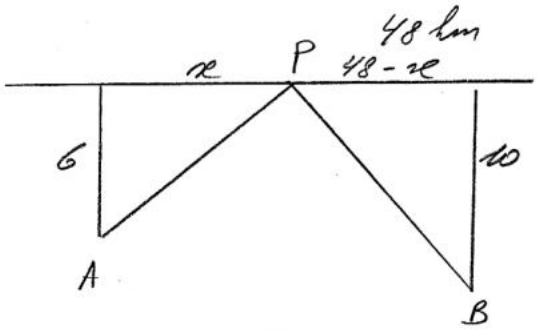
$150 + 4.25 = \boxed{250 \text{ €}}$

La recette sera de

300 000 €

16.

9



On construit la fonction à optimiser

$$L = \sqrt{6^2+x^2} + \sqrt{(48-x)^2+10^2}$$

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{6^2+x^2}} + \frac{-2(48-x)}{2\sqrt{(48-x)^2+10^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{(48-x)^2+10^2} = (48-x)\sqrt{6^2+x^2}$$

$$x^2\left[(48-x)^2+10^2\right] = (48-x)^2(6^2+x^2)$$

On développe et on ramène tout dans le premier membre pour obtenir

$$64x^2 + 3456x - 82944 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 64(x^2+54x-1296) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 64(x+72)(x-18) = 0$$

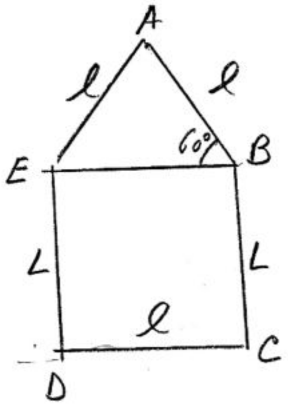
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = -72 & \text{à rejeter} \\ x = 18 \text{ km} \end{cases}$$

		-72		18	
L'	+	0	−	0	+
L	↗	M	↘	m	↗

Il s'agit bien d'un minimum

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 18 \text{ km}}$$

17



Le triangle ABE étant équilatéral on a 10

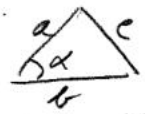
$AB = AE = l$

Contrainte $2L + 3l = 36 \Rightarrow L = 18 - \frac{3}{2}l$

Fonction à optimiser.

$$A = lL + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \sin 60^\circ}_{\text{Aire du triangle}}$$

Rappel aire d'un triangle



$A = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin \alpha.$

$$\Rightarrow A = lL + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \left(18 - \frac{3}{2}l\right) l + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

$$= 18l + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right) l^2$$

$$A' = 18 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right) l \Rightarrow l = \frac{-18}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} = 8{,}43 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow L = 5{,}35 \text{ cm}$$

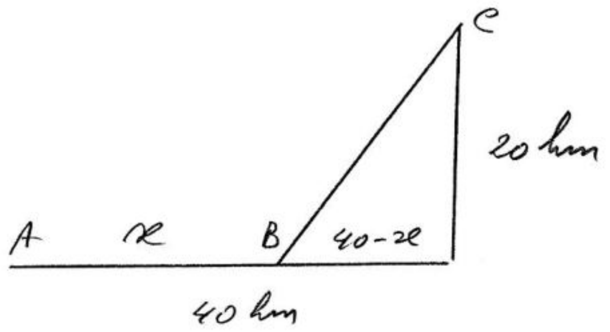
		8,43	
A'	+	0	−
A	↗	M	↘

Il s'agit bien d'un max

Conclusion. $\boxed{\begin{array}{l} L = 5{,}35 \text{ cm} \\ l = 8{,}43 \text{ cm} \end{array}}$

18.

(11)



On construit une fonction qui représente le coût de construction

$$C = 40\,000 \cdot x + 80\,000 \cdot \sqrt{(40-x)^2+20^2}$$
$$= 40000\left[x + 2\sqrt{(40-x)^2+20^2}\right]$$
$$C' = 40000\left[1 + \frac{2}{2\sqrt{(40-x)^2+20^2}}\,2\cdot(40-x)(-1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{2(40-x)}{\sqrt{(40-x)^2+20^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(40-x^2)^2+20^2} = 2(40-x)$$

$$\Rightarrow \quad (40-x)^2 + 20^2 = 4(40-x)^2$$

$$3(40-x)^2 = 20^2$$

$$40 - x = \pm \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 28{,}45 \text{ km} \\ x = 40 + \frac{20}{\sqrt{3}} = 51{,}55 \text{ km} \end{cases}$$

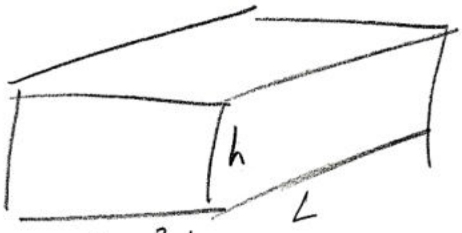
à rejeter

		28,45		51,35	
C'	$-$	0	$+$	0	$-$
C	↘	m	↗	M	↘

Il s'agit bien d'un min

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 28{,}45 \text{ km}}$$

19



$l = \frac{3}{4} L$

Contrainte

$V = L.l.h = 29\ m^3$

On construit une fonction coût

$$C = \underbrace{40 \cdot lL}_{\text{Sol}} + \underbrace{48 \cdot 2(l+L)h}_{\text{Paroi}} + \underbrace{24 \cdot lL}_{\text{Toit}}$$

$$= 40 \frac{3}{4} L^2 + 96 \cdot \left(\frac{3}{4} L + L\right) h + 24 \frac{3}{4} L^2$$

$$= 48 L^2 + 168 L h.$$

or $L \cdot l \cdot h = \frac{3}{4} L^2 h = 29 \Rightarrow h = \frac{116}{3 L^2}$

$$\Rightarrow C = 48 L^2 + \frac{6496}{L} = 16\left(3L^2 + \frac{406}{L}\right)$$

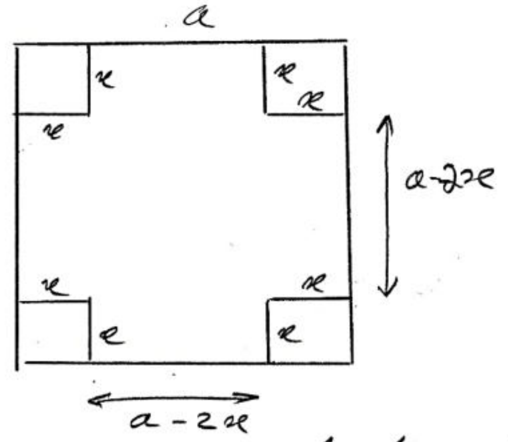
$$\Rightarrow C' = 16\left[6L - \frac{406}{L^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow L^3 = \frac{406}{6} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L = 4{,}075\ m \\ l = 3{,}056\ m \\ h = 2{,}329\ m. \end{array}}$$

		4,075	
C'	$-$	0	$+$
C	$\searrow$	m	$\nearrow$

Il s'agit d'un minimum.

20)



le volume de la boîte est

$$V = (a-2x)^2 x$$

$$V' = 2(a-2x)(-2)\cdot x + (a-2x)^2$$

$$= -4ax + 8x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2$$

$$= 12x^2 - 8ax + a^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

$$\Rightarrow x = a/2 \quad \text{A rejeter}$$

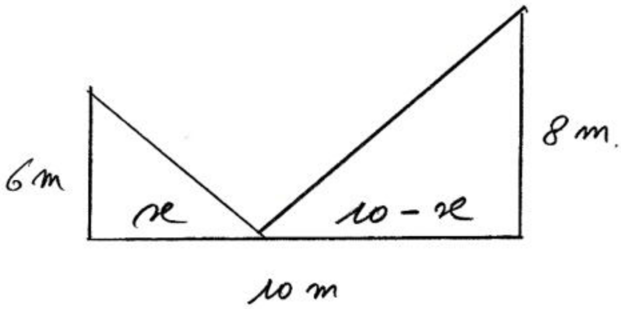
$$x = a/6$$

		$a/6$		$a/2$	
V'	+	0	−	0	+
V	↗	M	↘	m	↗

Il s'agit bien d'un max

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{6} \\ V = 2a^3/27 \end{array}}$$

21)



La longueur du câble est

$$L = \sqrt{6^2 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 8^2}$$

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{6^2+x^2}} + \frac{2(10-x)(-1)}{2\sqrt{(10-x)^2+8^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{(10-x)^2+8^2} = (10-x)\sqrt{6^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2\left[(10-x)^2+8^2\right] = (10-x)^2(6^2+x^2)$$

On développe et après simplification, on trouve

$$4(x^2 + 180x - 900) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 & \text{à rejeter} \\ x = 4{,}29 \end{cases}$$

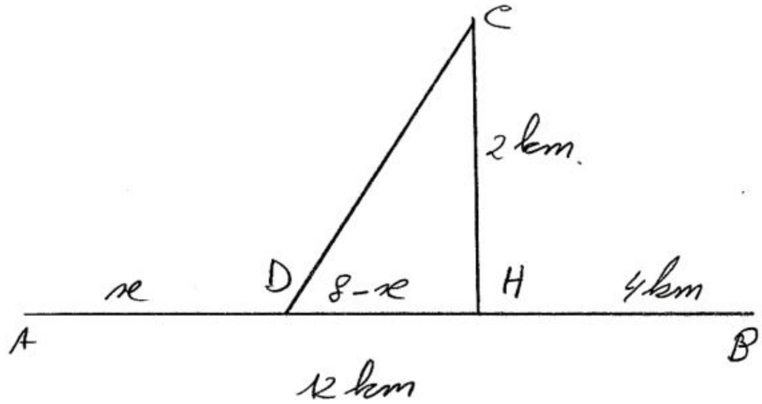
		-30		+4,29	
L	+	0	−	0	+
L'	↗	M	↘	m	↗

Il s'agit bien d'un min

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 4{,}29}$$

22)

15



on construit une fonction coût

$$C = \underbrace{8x}_{AD} + \underbrace{6(12-x)}_{DB} + \underbrace{4\sqrt{(8-x)^2+2^2}}_{DC}$$

$$= 2x + 72 + 4\sqrt{(8-x)^2+2^2}$$

$$= 2\left[x + 36 + 2\sqrt{(8-x)^2+2^2}\right]$$

$$C' = 2\left[1 + \frac{2\cdot\cancel{2}(8-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(8-x)^2+2^2}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(8-x)^2+2^2} = 2(8-x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow (8-x)^2 + 4 = 4(8-x)^2$$

$$\Rightarrow 3(8-x)^2 = 4 \Rightarrow (8-x) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$\Rightarrow x = 6{,}845$

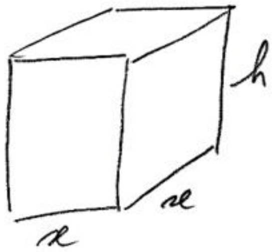
$x = 9{,}155$ A rejeter car selon l'équation (1) $x \leq 8$. En effet une racine carrée est toujours positive

		6,845		9,155	
C'	−	0	+	0	−
C	↘	m	↗	M	↘

Il s'agit bien d'un min

$$\Rightarrow \boxed{x = 6{,}845 \text{ km.}}$$

23) 16



Contrainte $V = x^2 \cdot h = 500$

$\Rightarrow h = 500/x^2$

On construit une fonction coût

$$C = \underbrace{x^2}_{\text{fond}} + \underbrace{4x \cdot h}_{\text{parois}} + \underbrace{2x^2}_{\text{couvercle}}$$

$$= 3x^2 + 4xh = 3x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$C' = 6x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2000}{6}} = 6{,}934 \text{ dm}$$

$$\Rightarrow h = 10{,}4 \text{ dm}$$

		6,934	
C'	$-$	0	$+$
C	$\searrow$	min	$\nearrow$

Il s'agit bien d'un min

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 6{,}934 \text{ dm} \\ h = 10{,}4 \text{ dm} \end{array}}$$