Fiche TRI001 – Les équations trigonométriques.

1 – Type sin x = a

Méthode : $\sin x = a \rightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \end{cases}$

Exemple 1 : $\sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

2 – Type cos x = a

Méthode : $\cos x = a \rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi$

Exemple 2: $\cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

3 – Type tan x = a

Méthode : $\tan x = a \rightarrow x = \arctan a + k\pi$

Exemple 3: $\tan x = 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

4 – Type sin x = sin a

Méthode : $\sin x = \sin a \rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$

Exemple 4 :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{7} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi \\ x = \dfrac{6\pi}{7} + 2k\pi \end{cases}$$

Exemple 5:

$$\sin 3x=\cos\frac{\pi}{3}\ \rightarrow\ \sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow\begin{cases}3x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\[2ex] 3x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\ \rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\\[2ex] x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

5 – Type cos *x* = cos *a*

Méthode : $\cos x=\cos a\ \rightarrow\ x=\pm a+2k\pi$

Exemple 6: $\cos x=\cos\frac{\pi}{7}\ \rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{7}+2k\pi$

Exemple 7:

$$\cos^2 x=\sin^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ \rightarrow\ \cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow\ 2x=\pm\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi\ \rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\[2ex] x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{2}\end{cases}$$

6 – Type tan *x* = tan *a*

Méthode : $\tan x=\tan a\ \rightarrow\ x=\pm a+k\pi$

Exemple 8: $\tan x=\tan\frac{\pi}{7}\ \rightarrow\ x=\frac{\pi}{7}+k\pi$

Exemple 9:

$$2\tan x=\left(1-\tan^2 x\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ \rightarrow\ \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\tan 2x=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ \rightarrow\ 2x=x-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \rightarrow\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$$

7 – Equation homogène en sin *x* et cos *x*

Méthode :

- Diviser par la plus haute puissance de cos *x* et sin *x*
- Prendre tan *x* ou cot *x* comme inconnue auxiliaire

Exemple 10:

$$2\sin^2 t - 4\sin t\,\cos t - 4\cos^2 t = -3$$

$$2\sin^2 t - 4\sin t\,\cos t - 4\cos^2 t = -3\sin^2 t - 3\cos^2 t$$

$$5\sin^2 t - 4\sin t.\cos t - \cos^2 t = 0$$

$$5\tan^2 t - 4\tan t - 1 = 0$$

$$\to \tan t = \frac{+2 \pm \sqrt{9}}{5} \to \begin{cases} \tan t = 1 & \to t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan t = -\dfrac{1}{5} & \to t = 0.1974 \pm k\pi \end{cases}$$

8 – Type *a* cos *x* + *b* sin *x* = *c*

Méthode 1

$$a\cos x + b\sin x = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)$$

$$\text{avec} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Exemple 11:

$$3\cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{3} \;\to\; \varphi = 0.322 \;\to\; \cos\varphi = 0.9487$$

$$\to \frac{3}{0.9487}\cos(x - 0.322) = -3 \;\to\; \cos(x-0.322) = -0.9487$$

$$\to x - 0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \quad \to \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \simeq \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases}$$

Variante de la méthode 1

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)$$

$$\text{où } r.e^{i\varphi} = a+ib \rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Exemple 12 :

Reprenons l'exemple précédent :

$$3\cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$r=\sqrt{10} \ , \ \tan\varphi = \frac{1}{3} \rightarrow \varphi = 0.322$$

$$\rightarrow \sqrt{10}\cos(x-0.322) = -3 \rightarrow \cos(x-0.322) = -0.9487$$

$$\rightarrow x-0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \rightarrow \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \simeq \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases}$$

Méthode 2

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

$$\text{avec} \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple 13:

$$3\cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \varphi = 1.249$$

$$\rightarrow \sqrt{3^2+1^2}\sin(x+1.249) = -3 \rightarrow \sin(x+1.249) = -0.9487$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1.249 = -1.249 + 2k\pi \\ x+1.249 = \pi + 1.249 + 2k\pi \end{cases} x \rightarrow \begin{cases} x = -2.498 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Méthode 3

$$\text{On remplace : } \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

Exemple 14:

$$3\cos x + \sin x + 3 = 0 \;\rightarrow\; 3\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + 3 = 0 \quad (1)$$

On chasse le dénominateur. $\left(1+\tan^2\frac{x}{2} > 0\right)$

$$\rightarrow 3\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) + 2\tan\frac{x}{2} + 3\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow 2\tan\frac{x}{2} = -6 \qquad \rightarrow\; x = -2.498 + 2k\pi$$

On remarque donc que l'on a "perdu" la solution : $x = \pi + 2k\pi$. En effet, pour cette valeur de x, $\tan\frac{x}{2} = \infty$ et l'équation (1) est indéterminée. Il convient donc de vérifier si cette valeur est une solution.

Exemple 15:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \cos 2x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} - \sqrt{3}\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} - \sqrt{3} = 0 \;\rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\rightarrow \tan x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3-(3-1)}}{1+\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}\pm 1}{1+\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -0.78539 + k\pi \simeq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = -0.2618 + k\pi \simeq -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Ici, on n'a pas "perdu" de solution en cours de route.

On vérifie facilement que $x = \pm\frac{\pi}{2}$ n'est pas une solution.

9 – Cas general

Méthode

- On fait les transformations de façon à faire des facteurs communs aux différents termes.
- On factorise
- On traite séparément chaque facteur.

Exemple 16 :

$$4\sin 2x + 6\cos x = 0 \rightarrow 8\sin x + \cos x + 6\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2\cos x.(4\sin x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1)\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2)\sin x = -\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -0.848 + 2k\pi \\ x = 3.90 + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Exemple 17 :

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1 - \sin x) \qquad \text{CE : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \rightarrow x \neq 0° + k180° \\ \cot x + \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq 90° + k180° \end{cases}$$

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\cos x \frac{1 - \sin x}{\sin x}}{\cos x \frac{1 + \sin x}{\sin x}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$\rightarrow$ L'équation devient : $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 2(1 - \sin x)$.Or $\sin x \neq 1$ en vertu des CE.

$$\rightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \rightarrow 2\sin x = -1 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = -30° + k360° \text{ ou } x = 210° + k360°}$$

Exemple 18 :

$$\cos 9x - 2\cos 6x = 2 \rightarrow \cos(6x + 3x) - 2\cos^2 3x + 2\sin^2 3x = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x)$$

$$\rightarrow \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x - 4\cos^2 3x = 0 \rightarrow (2\cos^2 3x - 1)\cos 3x - 2\sin^2 3x \cos 3x - 4\cos^2 3x = 0$$

1) $\cos 3x = 0 \rightarrow 3x = \pm 90° + k180° \rightarrow x = 30° + k60°$

2) $2\cos^2 3x - 1 - 2(1 - \cos^2 3x) - 4\cos 3x = 0$

$$4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3 = 0 \rightarrow \cos 3x = \begin{cases} \frac{3}{2} \quad \text{A rejeter} \\ -\frac{1}{2} \rightarrow 3x = \pm 120° + k360° \rightarrow x = \pm 40° + k120° \end{cases}$$