

Géométrie analytique dans l'espace.

• Points

Soit les points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Distance entre deux points	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Milieu de P_1P_2	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
Quatre points sont coplanaires SSI	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Distance entre un point P_1 et une droite a , de vecteur directeur \vec{d} <i>unitaire</i>	$\sqrt{P_1P_2^2 - (P_1P_2 \otimes \vec{d})^2} \quad P_2 \in a$ On notera que $P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ $P_1P_2 \otimes \vec{d} = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)$

Distance d'un point à un plan $ax + by + cz + d = 0$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• Directions

Une direction \vec{u} est définie par les coordonnées (a,b,c)

Parallèles	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Perpendiculaires	$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

• Droite

Définie par un point et une direction	Équation implicite $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$
Droite d ; point P , \vec{u} vecteur directeur	Équation vectorielle $\overrightarrow{AX} = k\vec{u}$ Équations paramétriques $\begin{cases} x - x_1 = ka \\ y - y_1 = kb \\ z - z_1 = kc \end{cases}$

Distance entre 2 droites

Droite d , point P , \vec{u}_d vecteur directeur

Droite d' , point P' , $\vec{u}_{d'}$ vecteur directeur

** vecteur unitaire normal $\vec{n} = \vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}$*

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}}{|\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}|}$$

• $d(d, d') = \vec{n} \cdot \overrightarrow{PP'}$

	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ <p>ou bien l'équation vectorielle</p> $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{P_1P_2} \quad X \text{ point quelconque de } d.$ <p>Équations paramétriques</p> $\begin{cases} x-x_1 = k(x_2-x_1) \\ y-y_1 = k(y_2-y_1) \\ z-z_1 = k(z_2-z_1) \end{cases}$
Définie par deux points P_1 et P_2	
Équations paramétriques	$x = x_1 + ta; \quad y = y_1 + tb; \quad z = z_1 + tc$
Équations implicites	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
Direction d'une droite	$(B_1C_2 - C_1B_2; \quad C_1A_2 - A_1C_2; \quad A_1B_2 - B_1A_2)$

• **Plan**

Équation implicite	$Ax + By + Cz + D = 0$
Direction normale au plan	(A, B, C)
Perpendiculaire à Oyz	$By + Cz + D = 0$
Perpendiculaire à Oxz	$Ax + Cz + D = 0$
Perpendiculaire à Oxy	$Ax + By + D = 0$
Perpendiculaire à l'axe x	$Ax + D = 0$
Perpendiculaire à l'axe y	$By + D = 0$
Perpendiculaire à l'axe z	$Cz + D = 0$
Défini par un point P_1 et une direction $\vec{u}(a,b,c)$ <i>perpendiculaire</i>	$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$ <p>ou bien l'équation vectorielle</p> $\overrightarrow{P_1X} \oplus \vec{u} = 0 \quad \overrightarrow{P_1X} \in \pi; \vec{u} \in \pi$
Défini par un point P_1 et deux directions $\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ <p>ou bien l'équation vectorielle</p> $\overrightarrow{P_1X} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \quad X \text{ est un point quelconque de } \pi$ <p>Équations paramétriques</p> $\begin{cases} x-x_1 = ka_1 + hb_1 \\ y-y_1 = kb_1 + hb_2 \\ z-z_1 = kc_1 + hc_2 \end{cases}$

Défini par deux points et une direction	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$
Défini par trois points	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ <p>ou bien, la forme équivalente :</p> <p>Equ</p> $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ <p>ou bien l'équation vectorielle</p> $\overrightarrow{P_1X} = k\overrightarrow{P_1P_2} + h\overrightarrow{P_1P_3} \quad X \text{ est un point quelconque de } \pi$
Deux plans sont parallèles SSI	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Deux plans sont perpendiculaires SSI	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Angle formé par deux plans	$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Distance entre un point et un plan	$\frac{Ax_1 + By_1 + Dz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ <p>Ou sous forme vectorielle</p> $ \overrightarrow{P_1P_2} \otimes \vec{u} \quad P_2 \in \pi$

• Sphère

Centrée à l'origine	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
De centre P_1	$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$
Équation implicite	$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + M = 0$
Centre	$(-D/2, -E/2, -F/2)$
Rayon	$r = \sqrt{D^2/4 + E^2/4 + F^2/4 - M}$
Définie par un diamètre P_1P_2	$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$