Géométrie synthétique plane
Rappel de quelques propriétés et théorèmes

Notes : <u>REC</u> indique que la réciproque est vraie.
La plupart des théorèmes ont leur équivalent en géométrie dans l'espace.

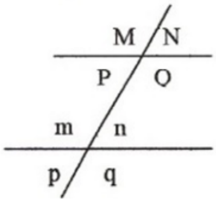
Généralités

Symétries

- Les principales symétries sont les symétries de translation, de rotation, centrale et orthogonale.
- Les symétries conservent, les distances, les angles, le parallélisme et les formes. Ce sont des opérations invariantes.

Parallèles

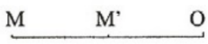
- On nomme **droites parallèles** des droites qui situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer aussi loin qu'on les prolonge.
- **<u>Postulat d'Euclide</u>** : Par un point extérieur à un droite, on ne peut mener <u>qu'une seule</u> parallèle à cette droite.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Deux droites parallèles forment avec une sécante :
  - Des angles alternes-internes égaux ($m = Q, n = P$) (<u>REC</u>)
  - Des angles alternes-externes égaux ($p = N, q = M$) (<u>REC</u>)
  - Des angles correspondants égaux ($p = P, n = N$, etc) (<u>REC</u>)



Homothétie

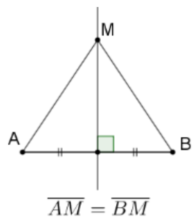
On donne un point fixe *O*, un nombre *r* positif ou négatif. Si à chaque point *M* du plan, on fait correspondre un point *M'* situé sur la droite *OM* tel que *OM'/OM* = *r*, alors le point *M'* est dit homothétique de *M*. Autrement dit, *M'* est l'image de *M* selon l'homothétie de centre *O* et de rapport *r*.

- Des figures homothétiques sont semblables.
- Si *r* = 1, les figures sont égales.
- L'homothétie d'une droite est une droite parallèle à la première.
- La figure homothétique d'un angle est un angle égal.
- Deux cercles sont toujours homothétiques l'un de l'autre.
- Les aires sont dans un rapport r^2.
- Les volumes sont dans un rapport r^3.



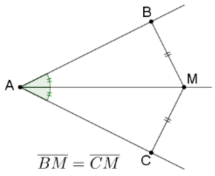
Médiatrice

La médiatrice d'un segment de droite est la normale élevée au milieu du segment.
Tout point de la médiatrice est équidistant des extrémités du segment. (<u>REC</u>)



Bissectrice

La bissectrice d'un angle partage l'angle en deux angles de même amplitude.
Tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle. (<u>REC</u>)

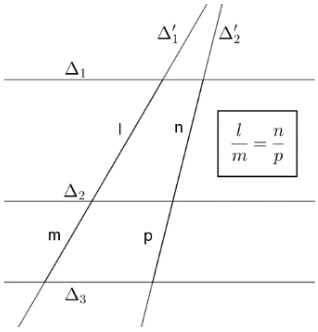


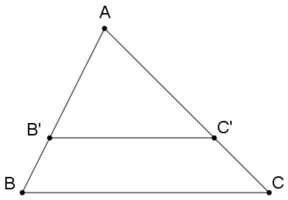
Théorème de Thalès

Un faisceau de droites parallèles détermine sur deux droites sécantes distinctes des segments homologues proportionnels. (<u>REC</u>)

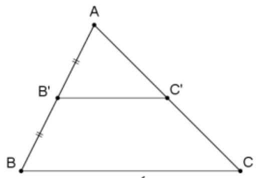
<u>Corollaire 1</u> : Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en segments homologues proportionnels. (<u>REC</u>)

<u>Corollaire 2</u> : Toute droite joignant le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième et en vaut la moitié. (<u>REC</u>)





$AB//A'B' \Leftrightarrow \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$



$\begin{cases} \overline{AB'} = \overline{B'B} \\ \overline{AC'} = \overline{C'B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BB'//CC' \\ \overline{B'C'} = \frac{1}{2}\overline{BC} \end{cases}$

Le triangle

Somme des angles = 180°

Triangles isométriques

Des triangles sont isométriques s'ils ont les côtés homologues égaux deux à deux.

Cas d'égalité des triangles

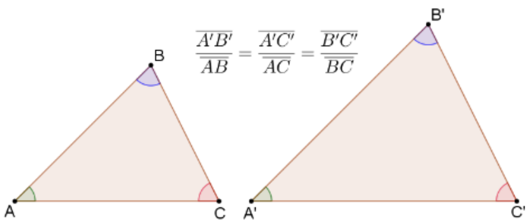
- 3 côtés égaux - CCC
- 1 côté égal compris entre deux angles égaux – ACA
- 1 angle égal compris entre deux côtés égaux – CAC

Triangles semblables

Des triangles sont semblables s'ils ont des angles égaux et les côtés proportionnels.

Cas de similitude des triangles

- 3 côtés proportionnels.
- 2 angles égaux chacun à chacun.
- 1 angle égal compris entre 2 côtés proportionnels.
- Lorsqu'ils ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun.



Droites remarquables

Les hauteurs

- Une hauteur est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé.
- Les trois hauteurs se coupent en un même point appelé l'**orthocentre** du triangle.

Les médiatrices

- Une médiatrice est la perpendiculaire élevée au milieu d'un côté.
- Les trois médiatrices se coupent en un même point qui est le centre **du cercle circonscrit** au triangle.

Les bissectrices

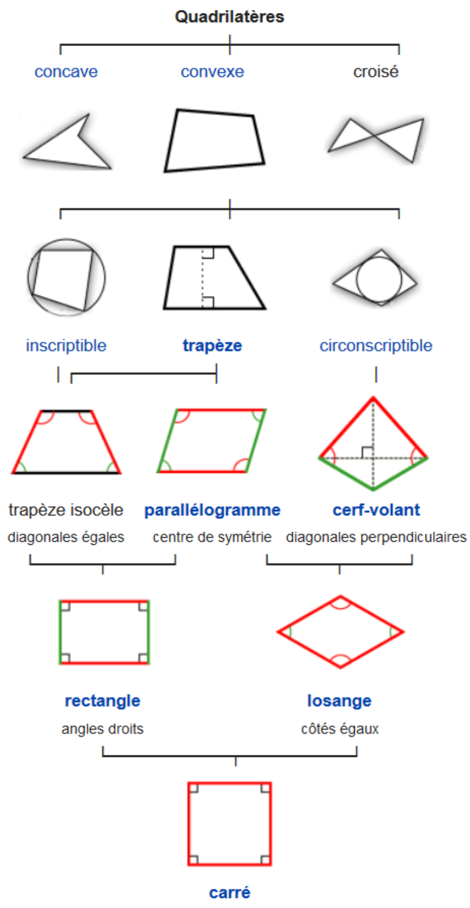
- Une bissectrice coupe en angle en deux angles de même amplitude.
- Les bissectrices se coupent en un même point qui est le centre du **cercle inscrit** au triangle.

Les médianes

- Une médiane joint un sommet au milieu du côtés opposés.
- Les trois médianes se coupe en un même point qui est le **centre de gravité** du triangle. Le centre de gravité divise chaque médiane dans un rapport 1/3,2/3.

Triangles rectangles

- Un triangle rectangle possède un angle droit.
- Tout triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle dont le rayon est égal à l'hypoténuse.
- **Théorème de Pythagore** : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- La médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de celle-ci.



Relations métriques dans le triangle (Voir annexe)

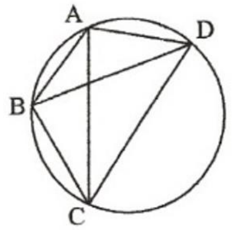
Le polygone

- Dans un plan, un **polygone** est constitué par une ligne brisée fermée. Il peut être **croisé** ou **simple**. Un polygone simple peut être **convexe** ou **concave**. Un polygone est dit convexe si toutes ces diagonales sont entièrement dans son intérieur. Sinon, il est convexe.
- Un polygone est dit **régulier** si tous ces côtés et tous ces angles sont égaux.
- La somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est égal à $(n-2).360°$

Quadrilatères

- Un **quadrilatère** est un polygone à 4 côtés. Voir classification ci-joint (Source Wikipédia)
- Un **trapèze** est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles.

- Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
- Un **rectangle** est un parallélogramme dont les angles sont égaux et donc droits.
    - Les diagonales sont égales. (REC)
- Un **losange** est un parallélogramme qui a ces côtés et ces angles égaux.
- Un **carré** est un rectangle qui a ces côtés égaux.
- Un quadrilatère est **inscriptible** si ses sommets sont cocycliques.
    - Dans tout quadrilatère inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires.
    - **Premier théorème de Ptolémée** : un polygone est inscriptible si le produit de ces diagonales est égal à la somme du produit des côtés opposés. (REC)
    $\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC}$

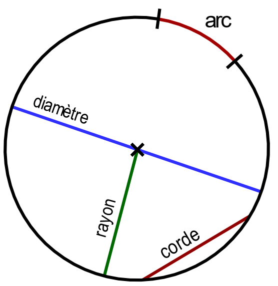


Parallélogramme

- Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Il existe cinq conditions dont chacune est nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit un parallélogramme :
    - Les côtés opposés sont égaux.
    - Les angles opposés sont égaux.
    - Les angles consécutifs sont supplémentaires.
    - Deux côtés opposés sont égaux et parallèles.
    - Les diagonales se coupent mutuellement en leur milieu.

Le cercle

Définitions



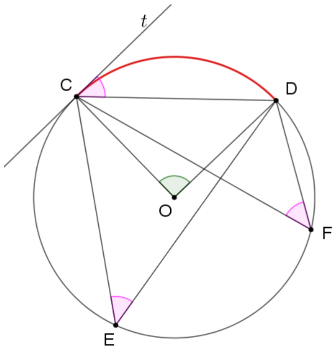
Christophe Dang Ngoc Chan Cdang at fr.wikipédia

- Le **cercle** est le lieu des points équidistants d'un point fixe. Le point fixe est le **centre** du cercle et la distance, le **rayon**.
- Un **rayon** est un segment de droite joignant le centre à un point du cercle ;
- Un **diamètre** est une corde passant par le centre ; c'est un segment de droite qui délimite le disque en deux parts égales. Le diamètre est composé de deux rayons **colinéaires** ; sa longueur est $2r$;
- Une **corde** est un segment de droite dont les extrémités se trouvent sur le cercle ;
- Un **arc** est une portion de cercle délimitée par deux points ;
    - Longueur d'un arc : $l = \alpha R$ avec α en radian
- Une **flèche** est le segment reliant les milieux d'un arc de cercle et d'une corde définis par deux mêmes points du cercle ;
- Un **disque** est une région du plan limitée par un cercle ;
- Un **secteur circulaire** est une partie du disque comprise entre deux rayons ;
    - Aire d'un secteur circulaire : $A = \frac{1}{2}\alpha R$ avec α en radian
- Un **segment circulaire** est une partie du disque comprise entre une corde et l'arc définit par cette corde ;
- Un **angle au centre** est un angle formé par deux rayons du cercle ;
- La **circonférence** est le périmètre du cercle et est égale à $2\pi r$;
- Une **sécante** est une droite qui coupe le cercle en deux points ;
- Une **tangente** est une droite qui touche le cercle en un point.

Propriétés

- La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de tangence. (REC)
- La médiatrice d'une corde passe par le centre. (REC)
- Deux droites sécantes parallèles interceptent des arcs égaux. (REC)
- Par trois points non colinéaires, on peut faire passer un et un seul cercle.
- Un triangle rectangle est inscriptible dans un cercle dans l'hypoténuse est un diamètre. (REC)
- D'un point extérieur à un cercle, on peut mener deux tangentes à ce cercle, et les tangentes limitées à leur point de contact sont égales.
- La ligne joignant les centres de deux cercles est perpendiculaire à la corde commune ; ou à leur tangente commune si les deux cercles sont tangents.

Angles



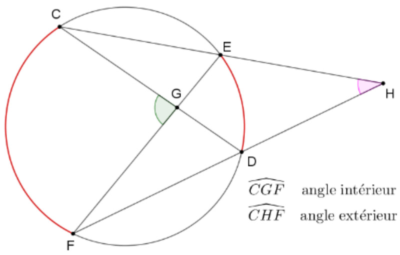
$\widehat{COD}$ angle au centre
$\widehat{CED}$ et $\widehat{CFD}$ angles inscrits
$\widehat{tCD}$ angle tangentiel

- **Angle au centre** est un angle définit par deux rayons.
  - Dans un cercle ou dans deux cercles égaux, les angles aux centres sont entre eux comme les arcs interceptés.
  - La mesure d'un angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté.
- **Angle inscrit** est un angle dont le sommet est sur le cercle et les côtés deux cordes.
  - Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.
  - La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté. Autrement dit, il est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

$$CED = CFD = \frac{1}{2}COD$$

- **Angle tangentiel** est un angle dont le sommet est sur le cercle, un côté est une sécante et l'autre la tangente au sommet.
  - Deux angles tangentiels qui interceptent le même arc sont égaux.
  - Un angle tangentiel et un angle inscrit qui interceptent le même arc sont égaux.
  - La mesure d'un angle tangentiel est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté. Autrement dit, il est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

$$tCD = CED = \frac{1}{2}COD$$



- **Angle intérieur** est un angle dont le sommet est à l'intérieur du cercle et les côtés sont deux sécantes.
  - La mesure d'un angle intérieur est la moitié de la somme de la mesure des arcs interceptés.

$$CGF = \frac{CF + ED}{2}$$

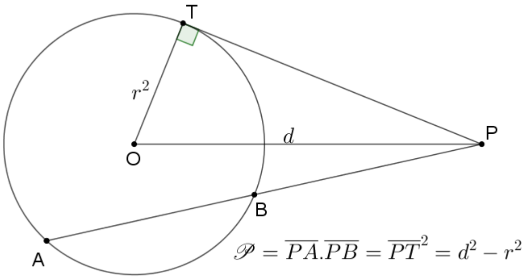
- **Angle extérieur** est un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle et les côtés sont deux sécantes.
  - La mesure d'un angle extérieur est la moitié de la différence de la mesure des arcs interceptés.

$$CHF = \frac{CF - ED}{2}$$

Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Soit un point P extérieur à un cercle et soit une sécante qui coupe le cercle en A et B, alors la **puissance de *P*** est définie par :

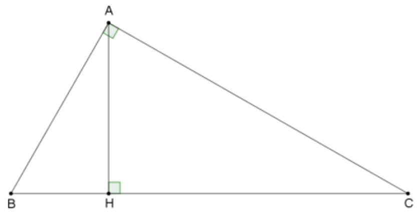
$\mathscr{P} = \overline{PA}.\overline{PB}$



- La puissance est constante quand la droite varie.
- La puissance est égale au carré de de la longueur de la tangente au cercle issue de P.
  - Autrement dit, si par un point extérieur on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieur.
- La puissance est aussi égale à la différence entre le carré de la distance du point P au centre du cercle et le carré du rayon.
- Si le point est sur le cercle la puissance est nulle.
- Si le point est intérieur au cercle, la puissance est négative.

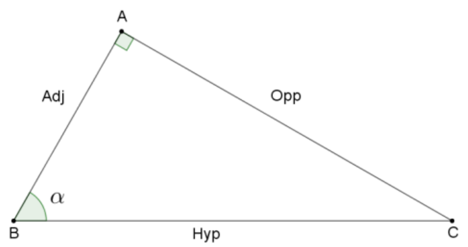
Les relations métriques dans le triangle.

Triangle rectangle



Aire	$S = \dfrac{\overline{BC}.\overline{AH}}{2}$
Théorème de Pythagore	$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
Un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse	$\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$ $\overline{AC}^2 = \overline{CB}.\overline{CH}$
Le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse.	$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AH}.\overline{BC}$
La hauteur est moyenne proportionnelle entre segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.	$\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HC}$
Les carrés des côtés de l'angle droit sont proportionnels à leurs projections sur l'hypoténuse.	$\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{CH}}$
La somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit est égale à l'inverse du carré de la hauteur.	$\dfrac{1}{\overline{AB}^2} + \dfrac{1}{\overline{AC}^2} = \dfrac{1}{\overline{AH}^2}$

Relations trigonométriques

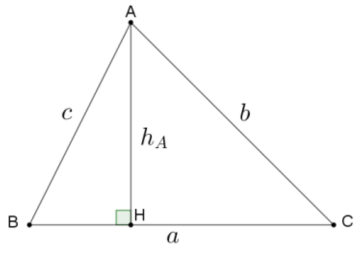


$\sin\alpha = \dfrac{Opp}{Hyp}$ $\quad$ *SOH*

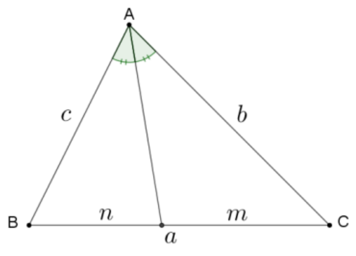
$\cos\alpha = \dfrac{Adj}{Hyp}$ $\quad$ *CAH*

$\tan\alpha = \dfrac{Opp}{Adj}$ $\quad$ *TOA*

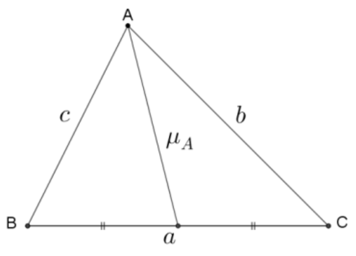
Triangle quelconque



Hauteur



Bissectrice



Médiane

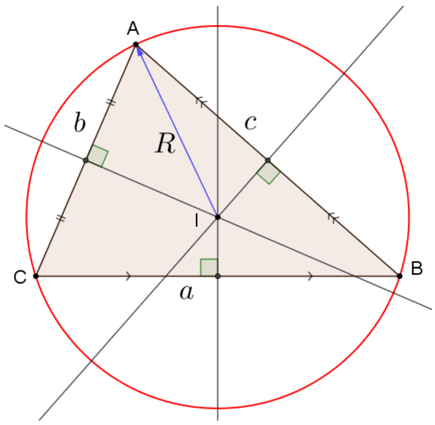
Demi périmètre	$p=\dfrac{a+b+c}{2}$
Hauteur	$h_A=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Bissectrice	$d_A=bc-mn$ ou $d_A=2\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$
Médiane	$\mu_A^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$

Aire du triangle

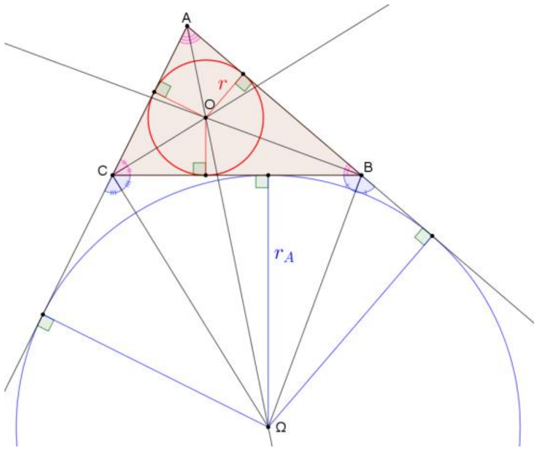
Formule de base	$S=\dfrac{base\times hauteur}{2}$
Formule de Héron	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
En fonction du rayon r du cercle inscrit	$S=pr$
En fonction du rayon r_A exinscrit dans l'angle A .	$S=(p-a).r_A$
En fonction du rayon circonscrit R	$S=\dfrac{abc}{4R}$
En fonction du produit vectoriel	$S=\dfrac{\left\Vert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\Vert}{2}$

Rayon des cercles (Voir figures ci-après)

Rayon du cercle inscrit	$r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$
Rayon du cercle exinscrit dans l'angle A	$r_A=\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$
Rayon du cercle circonscrit	$R=\dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

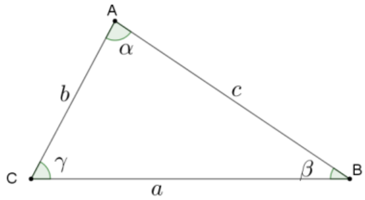


Cercle circonscrit



Cercles inscrit et exinscrit

Relations trigonométriques



Somme des angles : $\alpha+\beta+\gamma=180°$

Formules aux cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

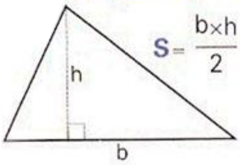
Formules au sinus : $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

Aire du triangle : $S = \dfrac{1}{2}ab\cos\gamma = \dfrac{1}{2}ac\cos\beta = \dfrac{1}{2}bc\cos\alpha$

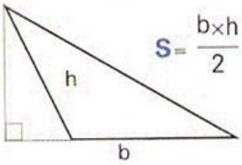
Géométrie

Les aires (S)

Triangles quelconques

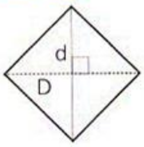


$S = \frac{b \times h}{2}$



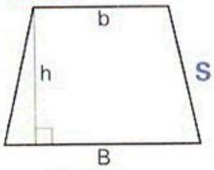
$S = \frac{b \times h}{2}$

Losange



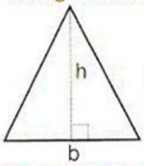
$S = \frac{D \times d}{2}$

Trapèze



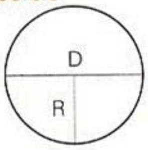
$S = \frac{B \times b}{2} \times h$

Triangle isocèle



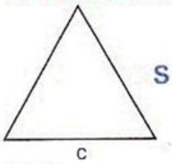
$S = \frac{b \times h}{2}$

Cercle



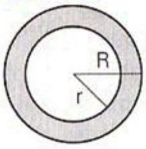
$S = \pi R^2$

Triangle équilatéral



$S = \frac{c^2 \times \sqrt{3}}{4}$

Couronne



$S = \pi(R^2 - r^2)$

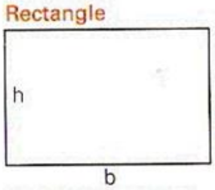
Carré

$S = c^2$

Sphère

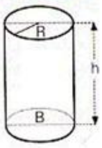
$S = 4\pi R^2$

Rectangle



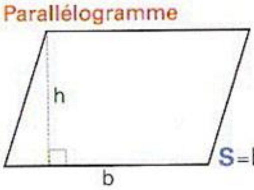
$S = b \times h$

Cylindre



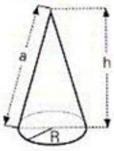
$S = 2\pi Rh$

Parallélogramme



$S = b \times h$

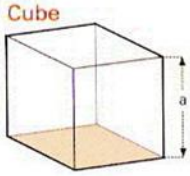
Cône



$S = \pi Ra$

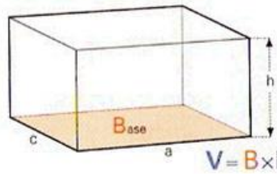
Les volumes (V)

Cube



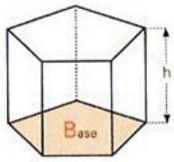
$V = a^3$

Parallélépipède droit



$V = B \times h$

Prisme droit



$V = B \times h$

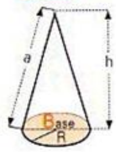
Sphère

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Cylindre

$V = B \times h$

Cône



$V = \frac{1}{3} B \times h$