Fiche ANA001 - Méthodes d'intégration – Math 6h

Nous reprenons les principales méthodes classiques d'intégration. Les méthodes d'intégration numérique ne sont pas traitées ici.

Chaque cas est illustré par un ou plusieurs exemples. Certains exemples font intervenir plusieurs méthodes. En effet, il est important de comprendre que toutes ces méthodes forment un ensemble, et qu'il faut savoir utiliser toutes les armes disponibles.

Notons, enfin, que souvent plusieurs méthodes sont possibles et que ceci n'a pas pour but d'offrir des recettes magiques qui fonctionnement à tous les coups. On doit donc simplement s'en servir comme outils et aide-mémoire.

1 - Intégrale immédiate

Il s'agit de l'application simple et immédiate des formules que l'on peut trouver dans n'importe quel formulaire.

Exemple 1 : $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

Exemple 2 : $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Exemple 3 : $\int e^x dx = e^x + C$

2 – Somme ou différence de fonctions

L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

Exemple 2.1

$$\int x + x^2 - \frac{1}{x} \, dx = \int x \, dx + \int x^2 \, dx - \int \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C$$

Beaucoup de situations peuvent se ramener à une somme de fonctions

1) Quotient de polynômes

Quand le degré du numérateur est égal ou plus grand que le degré du dénominateur, on effectue la division euclidienne

Soit à intégrer la fraction rationnelle : $f(x)/g(x)$ où $f(x)$ est un polynôme de degré m et $g(x)$ un polynôme de degré n avec $m \geq n$, on effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$

Exemple 2.2 :

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x^2 - x + 3 - \frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x+1| + C$$

Exemple 2.3

$$\int \frac{x^6}{x-1}\,dx = \int \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$$

Exemple 2.4

$$\int \frac{x^6}{x-1}\,dx = \int \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$$

2) Produit de polynômes

Pour un produit de polynômes, on distribue.

Exemple 2.5

$$\int (x-1)(x+2)\,dx = \int x^2 + x - 2\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Exemple 2.6

$$\int (x-1)^2\,dx = \int x^2 - 2x + 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$$

Exemple 2.7

$$\int (t^2+1)\sqrt{t}\,dt = \int t^2\sqrt{t} + \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$$

Formulaire de dérivation	Formulaire d'intégration
$c'=0$	$\int c\,du = cu + C$
$x'=1$	$\int dx = x + C$
$(u^n)=n.u^{n-1}.u'$	$\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1}+C\,;\quad n\neq -1$
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}.u'$	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$
$(\sqrt{u})=\frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$	$\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)'=-\frac{1}{2.\sqrt{u^3}}.u'$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u}+C$
$(e^u)'=e^u.u'$	$\int e^u\,du = e^u + C$
$(a^u)'=a^u.\ln a.u'$	$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}.a^u + C$
$(\ln\lvert u\rvert)'=\frac{1}{u}.u'$	$\int \ln x\,dx = x.\ln x - x + C$
$(\log_a\lvert u\rvert)'=\frac{1}{u.\ln a}.u'$	
$(\sin u)'=\cos u.u'$	$\int \sin u\,du = -\cos u + C$
$(\cos u)'=-\sin u.u'$	$\int \cos u\,du = \sin u + C$
$(\tan u)'=\frac{1}{\cos^2 u}.u'=(1+\tan^2 u).u'$	$\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
$(\cot u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}.u'$	$\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$(\sec u)'=\left(\frac{1}{\cos u}\right)'=\sec u.\tan u.u'$	$\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u+\tan u\rvert + C$
$(\operatorname{cosec} u)'=\left(\frac{1}{\sin u}\right)'=-\operatorname{cosec} u.\cot u.u'$	$\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln\lvert\operatorname{cosec} u-\cot u\rvert + C$
$(\operatorname{Arc}\sin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{Arc}\sin\frac{u}{a}+C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert + C$
$(\operatorname{Arc}\cos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$	$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}.\ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + C\,;\,a^2>x^2$
$(\operatorname{Arc}\tan u)'=\frac{1}{1+u^2}.u'$	$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}.\operatorname{Arc}\tan\frac{u}{a}+C$
$(\operatorname{Arc}\sec u)'=\frac{1}{u.\sqrt{u^2-1}}.u'$	$\int \frac{1}{u.\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}.\operatorname{Arc}\sec\frac{u}{a}+C$

3 – Composée de fonction

Si on peut arriver à identifier un facteur comme étant la dérivée de l'autre, la solution est presque immédiate.

Formule 1 : $\boxed{\int h'(g(x))\, g'(x)\, dx = h(g(x)) + C}$

Exemple 3.1 :

Méthode 1

$$\int (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3 dx = \frac{\left(x^2-x+1\right)^4}{4} + C$$

Car on a : $\begin{cases} g'(x) = 2x-1 & \Rightarrow \quad g(x) = x^3 - x + 1 \\ h'(x) = x^3 & \Rightarrow \quad h(x) = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

On pouvait aussi procéder comme suit

$$\int (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3 dx = \int \left(x^2-x+1\right)^3 d\left(x^2-x+1\right) = \frac{\left(x^2-x+1\right)^4}{4} + C$$

Car $d\left(x^2-x+1\right) = (2x-1)\,dx$

Méthode 2

Les composées de fonction peuvent être vues comme un cas particulier de substitution

Revenons à l'exemple 3.1

$$I = \int \overbrace{(2x-1)}^{\substack{\text{Dérivée de} \\ x^2-x+1}} \left(x^2-x+1\right)^3 dx.$$

On pose : $t = x^2 - x + 1 \Rightarrow dt = (2x-1)\,dx$ et on remplace

$$\Rightarrow I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\left(x^2-x+1\right)^4}{4} + C$$

Exemple 3.2 :

Méthode 1

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln\left(e^x+1\right)+C \quad \text{car on a } \begin{cases} g'(x)=e^x & \Rightarrow \quad g(x)=e^x+1 \\ h'(x)=\dfrac{1}{x} & \Rightarrow \quad h(x)=\ln x \end{cases}$$

On pouvait aussi procéder comme suit :

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = \ln\left(e^x+1\right)+C \quad \text{car } d\left(e^x+1\right)=e^x dx$$

Méthode 2

$$\int \frac{\overbrace{e^x}^{(e^x+1)'}}{e^x+1}dx \quad \text{On pose : } t=e^x+1 \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln\left(e^x+1\right)+C$$

On doit parfois faire des ajustements numériques pour faire apparaître la dérivée cherchée.

Exemple 3.3 :

$$I=\int t\left(3t^2+2\right)^5 dt = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Ajustement numérique}} \int \overbrace{6t}^{(3t^2+2)'} \left(3t^2+2\right)^5 dt$$

On pose : $u=3t^2+2 \Rightarrow du=6t\,dt \Rightarrow I=\frac{1}{6}\int u^5 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^6}{6} = \frac{\left(3t^2+2\right)^6}{36}+C$

Exemple 3.4 :

$$I=\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{Ajustement}} \int \frac{\overbrace{2x+2}^{(x^2+2x+5)'}}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+C$$

Note : x^2+2x+5 est toujours $>0\,(\Delta<0)$, donc la valeur aboslue n'est pas nécessaire.

Ou encore :

On pose $t=x^2+2x+5 \Rightarrow dt=(2x+2)dt \Rightarrow \frac{1}{2}dt=(x+1)dx$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+C$$

On doit parfois réarranger la fonction. (L'écrire d'une autre façon)

Exemple 3.5 :

$$I=\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \overbrace{\frac{1}{x}}^{(\ln x)'}\cdot \ln x\, dx.\ \text{On pose } t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}\cdot dx \Rightarrow I=\int t\, dt=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

Ou encore $I=\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \ln x\, d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

Exemple 3.6 :

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int \overbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}^{(\tan x)'}\tan x\, dx.\ \text{On pose : } t=\tan(x)\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int t\, dt=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

Ou encore $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int \tan x\, d(\tan x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

Exemple 3.7 :

$$\int(2x-3)\left(x^2+x+1\right)dx=\int\left(\overbrace{2x+1}^{(x^2+x+1)'}-4\right)\left(x^2+x+1\right)dx$$

$$=\int(2x+1)\left(x^2+x+1\right)dx-4\int\left(x^2+x+1\right)dx$$

$$=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{2}-4\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)=\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+\frac{1}{2}+C$$

Note : On aurait pu aussi simplement développer le produit.

Exemple 3.8 :

$I=\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$ On remarque que : $\left(x^2+x+1\right)'=2x+1$ et aussi que $x=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Note : $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ est résolu à l'exemple 6.1.1

On doit parfois ne considérer qu'une partie d'un facteur.

Exemple 3.9 :

$$I = \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \int \overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{(\arctan x)'} \cdot e^{\arctan x}\,dx = e^{\arctan x} + C$$

Exemple 3.10 :

$$I = \int e^{\cos^2 x} \sin 2x\,dx = \underset{}{\overset{\text{Ajustement numérique}}{-}} \int e^{\cos^2 x} \overbrace{(-2\sin x \cos x)}^{\text{Dérivée de } \cos^2 x}\,dx.$$

On pose : $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\cos x.\sin x\,dx \Rightarrow I = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\cos^2 x} + C$

Ou encore

$$I = \int e^{\cos^2 x} \sin 2x\,dx = -\int e^{\cos^2 x} 2\sin x \cos x\,dx = -\int e^{\cos^2 x} d\left(\cos^2 x\right) = -e^{\cos^2 x} + C$$

Composées de fonction – Table de primitives

Primitive directe	Composée de fonction	Exemple
$\int dx = x + C$		
$\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$		
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$\int f'(x).f^n(x)\,dx = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad (x \neq -1)$	$\int (2x-1).(x^2-x)^3\,dx = \dfrac{(x^2-x)^4}{4} + C$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx = \ln\lvert x^2+1\rvert + C$
$\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$	$\int f'(x).\sqrt{f(x)}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{f(x)} + C$	$\int \dfrac{1}{x}.\sqrt{\ln\lvert x\rvert}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{\ln\lvert x\rvert} + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$	$\int \dfrac{-\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx = 2\sqrt{\cos(x)} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$	$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx = e^{\sin(x)} + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int f'(x)a^{f(x)}dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$	$\int 3x^2.2^{x^3}\,dx = \dfrac{2^{x^3}}{\ln 2} + C$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	$\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})dx = -\cos(\sqrt{x}) + C$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$	$\int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6x\cos(3x^2+2)dx = \sin(3x^2+2) + C$

4 – Décomposition en fractions rationnelles

Méthode à retenir

Pour intégrer des fractions rationnelles de la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$,

1) **Si de degré du numérateur est plus grand que le degré du dénominateur, on commence par faire la division euclidienne.**
2) **Si le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur,**
   a. **On regarde si on peut transformer en une somme.**
   b. **On regarde si on peut faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur**
   c. **Sinon, on décompose en fractions rationnelles.**

Rappel sur la décomposition en fractions rationnelles.

Un polynôme $P(x)$ peut toujours se décomposer sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré et de facteurs du second degré, c'est-à-dire sous la forme

$$\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}_{\substack{x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont des racines} \\ \text{simples de mutiplicité 1}}}\ldots\underbrace{(x-x_3)^n}_{\substack{x_3 \text{ est de} \\ \text{multiplicité } n}}\underbrace{(x-x_4)^m}_{\substack{x_4 \text{ est de} \\ \text{multiplicité } m}}\ldots\underbrace{\Big(\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{trinôme dont le } \Delta<0}\Big)^p}_{\text{Multiplicité } p}$$

Exemples 4.1

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ — $+1$ et -2 sont des racines de multiplicité 1

$x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$ — $+1$ est de multiplicité 1 et -2 de multiplicité 2

$x^5+4x^4+x^3-10x^2-4x+8=(x-1)^2(x+2)^3$ — $+1$ est de multiplicté 2, -2 est de multiplicté 3

$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ — $+1$ est de multiplicté 1, x^2+1 est un trinôme du second degré $(\Delta<0)$

La somme des multiplicités doit être égale au degré du polynôme

Comment décomposer ?

Pour toute forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes rationnels en x peut se décomposer en fractions rationnels. (Si le degré de $f(x)$ est supérieur à celui de $g(x)$ on effectuera d'abord la division euclidienne)

Exemples 4.2

$$\frac{1}{x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3} \qquad 0 \text{ et } -3 \text{ sont de multiplicité } 1$$

$$\frac{2x^2+1}{x^3+3x^2-4}=\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)^2}=\underset{+1 \text{ multiplicité } 1}{\frac{A}{x-1}}+\underbrace{\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}}_{\substack{-2 \text{ est de multiplicité } 2 \Rightarrow 2 \text{ fractions.} \\ \text{Attention : le degré du numérateur} \\ \text{augmente à chaque terme.}}}$$

$$\frac{3x+2}{(x-1)^2(x+2)^3}=\underbrace{\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}}_{2 \text{ termes}}+\underbrace{\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{(x+2)^3}}_{3 \text{ termes}}$$

$$\frac{x^2-x-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\underbrace{\frac{A}{x-1}}_{1 \text{ terme}}+\underbrace{\frac{\overbrace{Bx+C}^{\substack{\text{Le numérateur est de degré 1 car} \\ \text{le dénominateur est de degré 2}}}}{x^2+1}}_{1 \text{ terme}}$$

Comment déterminer les coefficients A,B,C,D…. ?

Les coefficients *A,B,C,D…*sont déterminés par identification.

Exemple 4.3 :

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

On met au même dénominateur et on le supprime :

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow 1=A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)$$

Il suffit maintenant de choisir des valeurs x de façon adéquate.

Si $x=1$ $\qquad \Rightarrow 1=2A+0 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

Si $x=0$ $\qquad \Rightarrow 1=\frac{1}{2}-C \ \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

Si$x=-1$ $\qquad \Rightarrow 1=\frac{1}{2}(1+1)+(-1-1)\left(-B-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

La fraction se décompose donc selon :

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}$$

Exemples d'intégration

Une fois la décomposition faite, l'intégration est facile :

Exemple 4.4

$$\int \frac{1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \overset{\text{Ajustement}}{\frac{1}{4}} \int \frac{\overset{(x^2+1)'}{2x}}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Exemple 4.5 :

$$I = \int \frac{1}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$$

On décompose :

$$\frac{1}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{a(x-2)(x-1) + b(x+2)(x-1) + c(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

Les deux numérateurs doivent être égaux pour toutes valeurs de x :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 2 \Rightarrow 1 = 4b \Rightarrow b = \dfrac{1}{4} \\ \text{Si } x = 1 \Rightarrow 1 = -3c \Rightarrow c = -\dfrac{1}{3} \\ \text{Si } x = -2 \Rightarrow 1 = 12a \Rightarrow a = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{1}{12}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \ln\left|\frac{(x+2)^{\frac{1}{12}}(x-2)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right| + C$$

Exemple 4.6 :

$$I=\int\frac{8x^2+3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)}dx=\int\frac{ax+b}{x^2+x+1}dx+\int\frac{c}{x-2}dx$$

$$\frac{8x^2+3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)}$$

Le numérateurs doivent être égaux pour toutes valeurs de x

$$\begin{cases}\text{Si } x=2\Rightarrow 35=7c & \Rightarrow c=5\\ \text{Si } x=0\Rightarrow 3=-2b+5 & \Rightarrow b=1\\ \text{Si } x=1\Rightarrow 11=-a+14 & \Rightarrow a=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{3x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{5}{x-2}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{x}{x^2+x+1}dx+\int\frac{5}{x-2}dx$$

$$\Rightarrow I=\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+5\ln\left|\,x-2\,\right|$$

$$\Rightarrow I=\ln\left|\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}(x-2)^5\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Note : $\int\frac{x}{x^2+x+1}dx$ est résolu à l'exemple 3.8

Exemple 4.7 :

$$I=\int\frac{x^2-x+2}{\left(1-x\right)^3}dx$$

$$\frac{x^2-x+2}{\left(1-x\right)^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{\left(1-x\right)^2}+\frac{C}{\left(1-x\right)^3}=\frac{Ax^2-\left(2A+B\right)x+A+B+C}{\left(1-x\right)^3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ -\left(2A+B\right)=-1\\ A+B+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^2}+2\int\frac{dx}{\left(1-x\right)^3}=-\ln\left|\,x-1\,\right|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}$$

$$=-\ln\left|\,x-1\,\right|+\frac{x}{\left(x-1\right)^2}+C$$

5- Méthodes par substitution

C'est une des méthodes les plus efficaces et donc la plus utilisée.

Quelques changements de variable types
R désigne une fraction rationnelle

Forme de fonction	Changement de variable	dx
$f(ax+b)$	$u=ax+b$	$dx=\frac{1}{a}du$
$f(ax^2+bx+c)$	$u=x+\frac{b}{2a}$	$dx=du$
$f'(x)(f(x))^n$	$u=f(x)$	$du=f'(x)dx$
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$u=\frac{1}{x}$	$dx=-\frac{1}{u^2}du$
$f(\sqrt{x})$	$u=\sqrt{x}$	$dx=2udu$
$f\ R(\sqrt[n]{ax+b})$	$u=\sqrt[n]{ax+b}$	$dx=\frac{n}{a}u^{n-1}du$
$f(\tan x)$	$u=\tan x$	$dx=\frac{1}{1+u^2}du$
$f(e^x)$	$u=e^x$	$dx=\frac{1}{u}du$
$f(a^x)$	$u=a^x$	$dx=\frac{1}{u\ln a}du$
$f\ R(\sqrt{x^2-a^2})$	$u=a\frac{1}{\cos\theta}$	$dx=a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$
$f\ R(\sqrt{x^2+a^2})$	$u=a\tan\theta$	$dx=a(\tan^2\theta+1)\,d\theta$
$f\ R(\sqrt{a^2-x^2})$	$u=a\sin\theta$	$dx=a\cos\theta\,d\theta$
$f\ R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$	$u^n=\frac{ax+b}{cx+d}$	

Formule 5 : $\boxed{\int f(x)dx=\int f(g(t))\,g'(t)dt}$

Exemple 5.1 :

$$I = \int x\left(1+x\right)^5 dx$$

Posons : $t = 1+x, \quad t \in \Re \;\rightarrow\; x = t-1 = g\left(t\right) \;\rightarrow\; g'\left(t\right) = 1$

$$\rightarrow I = \int \left(t-1\right) t^5\, dt = \int t^6 dt - \int t^5 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + C$$

$$\rightarrow I = \frac{\left(1+x\right)^7}{7} - \frac{\left(1+x\right)^6}{6} + C = \frac{\left(6x-1\right)\left(1+x\right)^6}{42} + C$$

Exemple 5.2 :

$I = \int \frac{dx}{e^x - 1}$ Posons $y = e^x \rightarrow e^x dx = dy \;\rightarrow dx = \frac{dy}{e^x} = \frac{dy}{y}$

$$\rightarrow\; I = \int \frac{\frac{1}{y}dy}{y-1} = \int \frac{\frac{1}{y^2}dy}{\frac{y-1}{y}} = \int \frac{d\,\frac{y-1}{y}}{\frac{y-1}{y}} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|$$

$$\rightarrow\; I = \ln\left|\, e^x - 1 \,\right| - x + C$$

Les substitutions à opérer ne sont pas toujours évidentes. Cependant certaines sont assez classiques.

Etudions quelques exemples.

5 -1 Les substitutions trigonométriques

Pour les formes en	Remplacer x par	Donc $dx =$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$a\frac{1}{\cos\theta}$	$a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$a\tan\theta$	$a\left(\tan^2\theta + 1\right)d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$a\sin\theta$	$a\cos\theta\, d\theta$

Exemple 5.1.1 :

$$I=\int \sqrt{1-x^2}dx \Rightarrow \begin{cases} x=\sin\theta \Rightarrow \theta=\arcsin x \\ dx=\cos\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow I=\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta=\int \cos^2\theta\, d\theta$$

Utilisons Carnot : $\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x.\sqrt{1-x^2}+C$$

NOTE : Cette intégrale est importante. On la retrouve notamment pour le calcul de l'aire d'un cercle.

Exemple 5.1.2

$$I=\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^2}dx=3\int \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}}{x^2}$$

Posons : $x=\dfrac{2}{3}\sin\theta \Rightarrow dx=\dfrac{2}{3}\cos\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow I=3\int \frac{\frac{2}{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta=3\int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta=3\int\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)d\theta$$

$$=-3\left(\cot\theta-\theta\right)$$

Or $\sin\theta=\dfrac{3}{2}x \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\dfrac{9}{4}x^2}$

$$\Rightarrow I=-3\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-9x^2}}{\frac{3}{2}x}-3\arcsin\frac{3}{2}x=-\frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}-3\arcsin\frac{3}{2}x+C$$

Exemple 5.1.2 :

$I=\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}dx$ Posons : $x=\sqrt{2}\tan\theta \Rightarrow dx=\sqrt{2}\left(\tan^2\theta+1\right)d\theta$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\sqrt{2}\sqrt{\tan^2\theta+1}}{2\tan^2\theta}\sqrt{2}\left(\tan^2\theta+1\right)d\theta=\int \frac{\tan^2\theta+1}{\cos\theta.\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\int \frac{d\theta}{\cos\theta.\tan^2\theta}+\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta+\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

Soit I_1 le premier terme et I_2 le deuxième.

$$I_1=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

car $\sin\theta=\sin\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$I_2=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$ Posons : $t=\tan\frac{\theta}{2}\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{2}{1+t^2}dt$ et $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow I_2=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}.\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1}\right|=\ln\left|\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}\right|$$

car $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ et comme $\cos\theta=\cos\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}$

$$I_2=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}+x}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}-x}\right|=\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}+x\right)}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{-\sqrt{2}}\right|=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$$

Et finalement : $I=I_1+I_2=-\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$

NOTE : L'intégration par partie permet d'arriver au résultat beaucoup plus rapidement. Voir exemple 7.8

5 -2 Les fonctions trigonométriques

5 – 2 – 1 : Cas particulier : $\cos^p x$ ou $\sin^p x$

On linéarise la fonction en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$ et on applique le binôme de Newton.

Exemple 5.2.1.1 :

$$I = \int \sin^4 x \, dx$$

On linéarise :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix}}{(2i)^4} - 4\frac{e^{+3ix-ix}}{(2i)^4} + 6\frac{e^{2ix-2ix}}{(2i)^4} - 4\frac{e^{ix-3ix}}{(2i)^4} + \frac{e^{-4ix}}{(2i)^4}$$

$$= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2^3 \times 2} - 4\frac{e^{-2ix} + e^{-2ix}}{2^3 \times 2} + \frac{6}{8} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C$$

5 – 2 – 2 : Cas particulier : $\cos^p x . \sin^q x$

On va envisager les cas suivants :

1. p ou $q = 1$
2. p et q sont différents de 1
   a. p et q sont pairs ou impairs mais égaux ($p = q$)
   b. p et q sont pairs mais différents ($p \neq q$)
   c. p est impair ou bien q est impair

Si p ou q égal 1 : on est alors dans le cas $\int f'(x).f^n(x) \, dx$

Exemple 5.2.2 :

$$I = \int \cos x . \sin^4 x \, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Si p et q sont différents de 1 et $p = q$: on utilise la relation $\sin x . \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ **et on revient sur le cas** $\cos^p x$ ou $\sin^p x$

Exemple 5.2.3 :

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right) = \frac{1}{32}(x - \sin 4x) + C$$

Exemple 5.2.4 :

$$I = \int \cos^3 x \sin^3 x \, dx = \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^3 \, dx$$

Par les formules d'Euler, il est facile de linéariser $(\sin 2x)^3$. Voir Exemple 22.1.

On obtient :

$$I = \frac{1}{8}\int \left(-\frac{1}{4}\sin 6x + \frac{3}{4}\sin 2x\right) dx = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{3}{2}\cos 2x\right)$$
$$= \frac{1}{192}(\cos 6x - 9\cos 2x) + C$$

Si p et q sont pairs et différents de 1 avec $p \neq q$ **: on transforme le sinus en cosinus ou réciproquement et on revient sur le cas** $\cos^p x$ ou $\sin^p x$

Exemple 5.2.5 :

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x \, dx = \int \cos^4 x - \cos^6 x \, dx$$

On linéarise : $\begin{cases} \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) \\ \cos^6 x = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{32}\int -\cos 6x - 2\cos 4x + \cos 2x + 2 \, dx = \frac{1}{32}\left(-\frac{\sin 6x}{6} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + 2x\right)$$
$$= \frac{1}{192}(-\sin 6x - 3\sin 4x + 3\sin 2x + 12x) + C$$

Si p (exposant du cos) est impair, on pose $t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t$ et $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Ou

Si q (exposant du sin) est impair, on pose $t = \cos x \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Exemple 5.2.6 :

$$I=\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$$

$$\text{On pose : } t=\sin x \Rightarrow \begin{cases} x=\arcsin t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ \cos x=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$I=\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \left(1-t^2\right)t^2dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$$

$$=\frac{1}{15}\sin^3 x\left(5-3\sin^2 x\right) \text{ ou encore } I=\frac{1}{30}\sin^3 x\left(3\cos 2x+7\right)+C$$

Exemple 5.2.7 :

$$I=\int \cos^2 x\sin^5 x\,dx \quad \text{On pose : } t=\cos x \Rightarrow x=\arccos t \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$I=-\int \frac{t^2\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\int t^2\left(1-t^2\right)^2dt=-\frac{t^3}{3}+2\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}=-\frac{t^3}{105}\left(35-42t^2-15t^4\right)$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{105}\left(35-42\cos^2 x+15\cos^4 x\right)+C$$

ou encore après linéarisation :

$$I=-\frac{5}{64}\cos x-\frac{1}{192}\cos 3x+\frac{3}{320}\cos 5x-\frac{1}{448}\cos 7x+C$$

5 - 2 – 3 : Fonctions rationnelles en cos *x*, sin *x* et tan *x*

Fonction rationnelle en tan *x*. $f\ R(\tan x)$

On pose $t=\tan x \Rightarrow x=\arctan t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$

Exemple 5.2.3.1 :

$$I=\int \frac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x-1}dx. \text{ On pose : } t=\tan x \Rightarrow x=\arctan t \Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$I=\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\frac{1}{1+t^2}dt=-\int \frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+C$$

Exemple 5.2.3.2 :

$$I=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\tan x-1}{\tan x+1}dx=\int\frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}dt\bigg|_{t=\tan x}$$

$$\text{Or }\frac{t-1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2+1}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\b+c=1\\a+c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\bigg|_{t=\tan x}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\ln\left|\,t+1\,\right|\bigg|_{t=\tan x}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|\,t+1\,|}\bigg|_{t=\tan x}=\ln\frac{\sqrt{\tan^2x+1}}{|\,\tan x+1\,|}=-\ln\left|\,\sin x+\cos x\,\right|+C$$

Note : dans ce cas-ci, cette méthode n'est pas la plus simple. En effet, il suffit de remarquer que le numérateur est l'opposé de la dérivée du dénominateur, ce qui donne directement la réponse.

Exemple 5.2.3.3 :

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\tan x}{\tan x+1}dx=\int\frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)}\bigg|_{t=\tan x}$$

$$\text{Or }\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2+1}\Rightarrow t=a\left(t^2+1\right)+(bt+c)(t+1)\Rightarrow\begin{cases}t=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\\t=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}\\t=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[-\int\frac{dt}{t+1}+\int\frac{1+t}{1+t^2}dt\right]=\frac{1}{2}-\left[\ln|t+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2t+2}{1+t^2}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\arctan t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1+t}\right|+\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(1+\tan^2x\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\tan x}\right|+\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\right|+\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$$

Note : le résultat final suggère qu'il y avait moyen de faire plus simple. En effet, il suffit de remarquer que :

$\sin x = -\sin x + \sin x + \cos x - (\cos x - \sin x)$

Ce qui donne :

$$I = -\int \frac{\sin x}{six + \cos x}\,dx + \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx - \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -I + x - \ln|\sin x + \cos x| \Rightarrow I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$$

Nettement plus simple !

Règles de Bioche dans le cas des fractions rationnelles en sin *x* et cos *x*

Soit $f(x)$ est fonction rationnelle de la forme $R(\cos x, \sin x)$, alors

Si $f(-x)\,d(-x) = f(x)\,dx$, on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

Si $f(\pi - x)\,d(\pi - x) = f(x)\,dx$, on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

Si $f(\pi + x)\,d(\pi + x) = f(x)\,dx$, on pose $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)\,dx$

Fonction rationnelle et telle que $f\ R(-x)\,d(-x) = f\ R(x)\,dx$

Autrement dit f **est IMPAIRE**

Exemple 5.2.3.2 :

$I = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx.$ Remarquons que $\dfrac{\cos^3(-x)}{\sin(-x)}\,d(-x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx.$

On pose $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$I = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{t^3}{t^2-1}\,dt = \int 1 + \frac{t}{t^2-1}\,dt = \int \left(t + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|(t+1)(t-1)| = \frac{t^2}{2}\ln|t^2-1| = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x|$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x + \ln|\sin x| + C \text{ ou encore } I = \frac{1}{4}\cos 2x + \ln|\sin x| + C$$

Fonction rationnelle et telle que $\int R(\pi-x)d(\pi-x)=\int R(x)dx$

On pose : $t=\sin x \Rightarrow x=\arcsin t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exemple 5.2.3.3 :

$I=\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$ Remarquons que $\dfrac{\cos^3(\pi-x)}{\sin^2(\pi-x)}d(\pi-x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

On pose : $t=\sin x \Rightarrow x=\arcsin t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$I=\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{1-t^2}{t^2}dt=\int \frac{1}{t^2}-1\,dt=-\frac{1}{u}-u=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$$

Fonction rationnelle de période π **ou si** $\int R(\pi+x)d(\pi+x)=\int R(x)dx$

On pose : $t=\tan x \Rightarrow x=\arctan t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$

Exemple 5.2.3.4 :

$I=\int \dfrac{1}{2-\cos^2 x}dx.$ Remarquons que $\dfrac{1}{2-\cos^2(\pi+x)}d(\pi+x)=\dfrac{1}{2-\cos^2 x}dx$

On pose $t=\tan x \Rightarrow x=\arctan t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$

En tenant compte que $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}$:

$$I=\int \frac{1}{2-\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int \frac{1}{1+2t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}d\left(\sqrt{2}t\right)$$

$$==\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C$$

Cas général : fraction rationnelle en $\int R(\sin x,\cos x)$

On utilise les substitutions suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{On pose : } x=2\arctan t \;\Rightarrow\; t=\tan\dfrac{x}{2} \quad \text{et} \quad dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \Rightarrow \quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\dfrac{2t}{1-t^2} \end{array}}$$

Exemple 5.2.3.5 :

$$I=\int \frac{1}{3+\cos x}dx\text{. On pose : } t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$I=\int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2}{4+2t^2}dt=\int \frac{1}{2+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

Exemple 5.2.3.6 :

$$I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\Bigg|_{t=\tan x/2}=-\int\frac{2dt}{t^2-2t-1}$$

$$=-\int\frac{2dt}{\left(t-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(t+\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}$$

Or $\dfrac{2}{\left(t-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(t-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)}=\dfrac{a}{t-\left(1+\sqrt{2}\right)}+\dfrac{b}{t-\left(1-\sqrt{2}\right)}$

$$\Rightarrow 2=a\left(t-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)+b\left(t-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\Rightarrow\begin{cases} t=1-\sqrt{2}\Rightarrow b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ t=1+\sqrt{2}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t-\left(1+\sqrt{2}\right)}\Bigg|_{t=\tan x/2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t-\left(1-\sqrt{2}\right)}\Bigg|_{t=\tan x/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t-\left(1-\sqrt{2}\right)}{t-\left(1+\sqrt{2}\right)}\right|_{t=\tan x/2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}-\left(1+\sqrt{2}\right)}\right|+C$$

Exemple 5.2.3.6 :

$$I=\int \frac{1}{3+\cos x}dx\text{. On pose : } t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\arctan t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$I=\int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2}{4+2t^2}dt=\int \frac{1}{2+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

5 – 2 – 4 : Cas particulier : Produit de facteurs cos *ax* et sin *ax*

Utiliser les formules de Simpson inverses :

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]$$

Exemple 5.2.4.1 :

$$I = \int \sin 3x \sin 7x \, dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 10x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{10}\sin 10x\right)$$
$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x$$

6 Formes particulières et substitutions algébriques

Rappel :

Dans de nombreux cas, il est nécessaire de savoir transformer la forme canonique $ax^2 + bx + c$ sous la forme $a\left(y^2 \pm 1\right)$

Exemple 6.1

Transformer $2x^2 - 4x + 5$

$$2x^2 - 8x + 5 = \underset{\substack{\text{Mettre le coeff} \\ \text{du } x^2 \text{ en évidence}}}{2}\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 \underset{\substack{\text{on prend le coeff} \\ \text{du } x\text{,que l'on divise} \\ \text{par 2 et que l'on met} \\ \text{au carré } \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4}}{-4} x \overset{\substack{\text{On ajoute et} \\ \text{on retire le 4}}}{+4-4} + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\substack{\text{Il apparaît un} \\ \text{carré parfait}}} - \frac{3}{2}\right) = 2\left[(x-2)^2 - \underbrace{\frac{3}{2}}_{\substack{\text{On met en} \\ \text{évidence}}}\right] = 2\cdot\frac{3}{2}\left[\frac{(x-2)^2}{\underbrace{\frac{3}{2}}_{\substack{\text{On fait rentrer} \\ \text{le coeff dans le} \\ \text{carré}}}} - 1\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{x-2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 - 1\right]$$ qui est de la forme cherchée.

Exemple 6.2

$$3x^2+6x-1=3\left(x^2+2x-\frac{1}{3}\right)=3\left(x^2+2x+1-1-\frac{1}{3}\right)=3\left[(x+1)^2-\frac{4}{3}\right]=4\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(x+1)\right)^2-1\right]$$

6 – 1 : Formes en $\dfrac{1}{x^2+px+q}$

Si $p^2-4q<0$, transformer en forme $\dfrac{1}{1+u^2}$

Exemple 6.1.1 :

$$I=\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

On pose : $u=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ \to\ du=\dfrac{2}{\sqrt{3}}dx\ \to\ dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}du$

$$\to I=\frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{u^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u$$

$$\to I=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Si $p^2-4q>0$, décomposer en fractions rationnelles. (En effet, le dénominateur peut se factoriser)

Exemple 6.1.2 :

$$I=\int\frac{4}{2x^2+5x-3}dx=\int\frac{4}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)}=\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}}-\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{4}{7}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+3}\right|+C$$

6 – 2 : Formes en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ou en $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Pour les formes $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ où R est une fraction rationnelle, on met le trinôme sous forme canonique et on est ramené à 3 cas :

$$\sqrt{1-u^2} \Rightarrow \text{On pose } u=\sin t$$
$$\sqrt{u^2-1} \Rightarrow \text{On pose } u=\cosh t$$
$$\sqrt{u^2+1} \Rightarrow \text{On pose } u=\sinh t$$

NOTE : seul le premier cas fait partie du programme Math 6. Ce qui implique que $a<0$ et $c>0$

Exemple 6.2.1 :

$$I=\int\sqrt{\frac{7}{2}+2x-2x^2}\,dx=\int\sqrt{4-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=2\int\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx$$

Posons : $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow du=\dfrac{1}{\sqrt{2}}dx \Rightarrow dx=\sqrt{2}du$

$\Rightarrow I=2\sqrt{2}\int\sqrt{1-u^2}\,du$ Cette intégrale a été résolue à l'exemple 5.1.1

$$\Rightarrow I=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}+\frac{1}{2}\arcsin u\right]=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{2\sqrt{2}}\right]$$
$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+2x-2x^2}+\sqrt{2}\arcsin\frac{2x-1}{2\sqrt{2}}+C$$

Exemple 6.2.4 :

$$I=\int\frac{2x+3}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\frac{\overbrace{-2x+1}^{(1+x-x^2)'}-4}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\frac{d\left(1+x-x^2\right)}{\sqrt{1+x-x^2}}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$=-2\sqrt{1+x-x^2}+4I_1$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

$$t=\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\Rightarrow dx=-\frac{\sqrt{5}}{2}dt\Rightarrow I_1=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t=-\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)$$

Finalement :

$$I=-2\sqrt{1+x-x^2}-4\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)+C$$

6-3 : Pour les formes du type $(a+bx)^{\frac{1}{n}}$, on pose $y^n=a+bx$

Exemple 6.3.1 :

$$I=\int\frac{xdx}{(3+4x)^{\frac{1}{4}}}$$

Soit $y^4=3+4x \quad\Rightarrow\quad 4y^3dy=4dx$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{y^4-3}{4}y^3dy}{y}=\frac{1}{4}\int y^2\left(y^4-3\right)dy=\frac{1}{4}\frac{y^7}{7}-\frac{3}{4}\frac{y^3}{3}+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{28}(3+4x)^{\frac{7}{4}}-\frac{1}{4}(3+4x)^{\frac{3}{4}}+C$$

Exemple 6.3.2 :

$I=\int x^2\sqrt[3]{x-1}\,dx$ On pose : $x-1=t^3 \rightarrow dx=3t^2dt$

$$\Rightarrow I=\int\left(t^3+1\right)^2.t.3t^2.dt=\frac{3}{10}t^{10}+\frac{6}{7}t^7+\frac{3}{4}t^4$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{10}(x-1)^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C$$

6-4 : Pour les formes en $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, on pose $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Exemple 6.4.1 :

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx \qquad \text{Soit : } t^2 = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1} \quad \Rightarrow dx = -\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-2t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dx$$

Décomposons :

$$\frac{-2t^2}{\left(t^2-1\right)^2} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{(t-1)^2} + \frac{c}{t+1} + \frac{d}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{a(t-1)(t+1)^2 + b(t+1)^2 + c(t-1)^2(t+1) + d(t-1)^2}{\left(t^2-1\right)^2}$$

$$\begin{cases} \text{Si } t=1 \Rightarrow -2 = 4b \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \\ \text{Si } t=-1 \Rightarrow -2 = 4d \Rightarrow d = -\dfrac{1}{2} \\ \left.\begin{array}{l} \text{Si } t=0 \Rightarrow 0 = -a - \dfrac{1}{2} + c - \dfrac{1}{2} \Rightarrow -a + c = 1 \\ \text{Si } t=2 \Rightarrow -8 = 8a - \dfrac{9}{2} + 3c - \dfrac{1}{2} \Rightarrow 9a + 3c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{t}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}\right| + \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\frac{x+1}{x}-1} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2x\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right| + x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + C$$

7 - Intégration par parties

C'est une méthode très puissante et donc souvent utilisée.

Ce procédé s'applique pour calculer les primitives des fonctions suivantes :

- ✓ **Produit d'une fonction polynomiale par un sinus, un cosinus, une fonction exponentielle ou une fonction logarithme.**
- ✓ **Produit d'une exponentielle par un sinus ou un cosinus.**
- ✓ **Fonctions trigonométriques réciproques. (Math 6h)**
- ✓ **Certaines racines carrées.**
- ✓ **Certaines formes particulières**

Exemples : $xe^x, x^2\ln x, (x^2+1)\cos x, \sin x\cos 3x, e^x\sin x, \ln x, x\arccos x, \ldots$

Formule 3 : $\boxed{\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx}$

Le choix de $f(x)$ et $g'(x)$ est dicté par le fait d'obtenir une intégrale plus simple que celle de départ. Si ce n'est pas le cas, il suffit de permuter les expressions.

Exemple 7.1 :

$$I = \int x.e^x dx \quad \begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow I = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Exemple 7.2 :

$$I = \int x\cos x\,dx \quad \begin{cases} f(x) = x \quad \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x \Rightarrow g = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Exemple 7.3 :

$$I = \int (x+1)\ln(x)\,dx \quad \begin{cases} f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = x+1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

(On a intérêt à faire disparaître le ln)

$$\Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \int \frac{x}{2} + 1\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4} - x + C$$

Exemple 7.4 :

On peut devoir appliquer plusieurs fois de suite l'intégration par parties.

$$I=\int x^2e^x \quad \begin{cases} f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \\ g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow I=x^2e^x-\underbrace{2\int xe^x dx}_{\text{On applique une deuxième fois la méthode}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$$

Exemple 7.5 :

$$I=\int \ln x\,dx=\int \overset{\text{Polynôme de degré zéro}}{1}\cdot \ln x\,dx \quad \begin{cases} f(x)=\ln(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=1 \qquad \Rightarrow g(x)=x \end{cases}$$

$$I=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1\cdot dx=x\ln x-x+C$$

Exemple 7.6 :

$$I=\int \arcsin x\,dx$$

$$f(x)=\arcsin x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x)=1 \quad \Rightarrow \quad g(x)=x$$

$$\Rightarrow I=x.\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x.arx\sin x-\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\Rightarrow I=x.\arcsin x+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=x.\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

Exemple 7.7 :

$$I=\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx \Rightarrow \begin{cases} f=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) \\ g'=\dfrac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow g=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C$$

Exemple 7.8 :

L'intégration par parties permet souvent de grosses simplifications. Reprenons l'exemple 5.1.2.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}\,dx\qquad\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\\[2mm] g'(x)=\dfrac{1}{x^2}\qquad\Rightarrow g(x)=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}+\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}}_{\text{Table formule 1}}=-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+C$$

Exemple 7.9 :

On revient parfois à l'intégrale de départ.

$$I=\int e^x.\sin x\,dx$$

$$\begin{cases}f(x)=e^x & \Rightarrow\quad f'(x)=e^x\\ g'(x)=\sin x & \Rightarrow\quad g(x)=-\cos x\end{cases}\quad\Rightarrow\ I=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

$$\begin{cases}f(x)=e^x & \Rightarrow\quad f'(x)=e^x\\ g'(x)=\cos x & \Rightarrow\quad g(x)=\sin x\end{cases}\quad\Rightarrow\ I=-e^x\cos x+e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{\substack{\text{On revient à}\\ \text{l'intégrale de départ}}}$$

$$\Rightarrow I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I\quad\text{C'est une simple équation en } I$$

$$\Rightarrow 2I=-e^x\cos x+e^x\sin x\quad\Rightarrow\quad I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

Exemple 7.10 : (Plus complexe)

$$I=\int\sin(\ln x)\,dx$$

$$\text{Soit}\quad y=\ln x\ \Rightarrow\ dy=\frac{dx}{x}\ \Rightarrow dx=x\,dy=e^y\,dy\Rightarrow\ I=\int\sin y\,e^y dy$$

$$\text{Par parties :}\ \begin{matrix}u=\sin y & u'=\cos y\\ v'=e^y & v=e^y\end{matrix}\quad\Rightarrow\ I=e^y\sin y-\int e^y\cos y\,dy$$

$$\text{Par parties :}\ \begin{matrix}u=\cos y & u'=-\sin y\\ v'=e^y & v=e^y\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\ I=e^y\sin y-e^y\cos y-\int\sin y\,e^y dy=e^y\sin y-e^y\cos y-I$$

$$\Rightarrow\ 2I=e^y(\sin y-\cos y)\ \Rightarrow\ I=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)$$

8 – Exponentielle complexe

Une exponentielle complexe est une exponentielle de la forme e^{z} avec $z = a + bi$. On a aussi : $e^{z} = e^{a+bi} = e^{a}e^{bi} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$

Formules de base

$$\boxed{\begin{array}{l} \int e^{zx}dx = \frac{1}{z}e^{zx} + C \\ \int e^{zx}P(x)dx = e^{zx}Q(x) + C \end{array}}$$

avec $P(x)$, un polynôme à coefficients (seule cas envisagé ici) et $Q(x)$ un polynôme de même degré que $P(x)$, mais dont les coefficients peuvent être complexes.
On peut aussi écrire :

$$\int e^{zx}P(x)dx = \int e^{ax}e^{ibx}P(x)dx$$

$$= \int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)P(x)dx = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)Q(x) + C$$

En désignant par $\Re$ et $\Im$ respectivement les parties réelles et imaginaires, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \int e^{ax}\cos bx\, P(x)dx = \Re\int e^{a+ibx}P(x) = dx = \Re\, e^{a+ibx}Q(x) + C \\ \int e^{ax}\sin bx\, P(x)dx = \Im\int e^{a+ibx}P(x) = dx = \Im\, e^{a+ibx}Q(x) + C \end{array}}$$

On détermine les coefficients de $Q(x)$, par identification avec $P(x)$, après dérivation des deux membres.

Exemple 8.1 :

$$I = \int e^{-x}\cos 2x\, dx = \Re\int e^{(-1+2i)x}dx$$

$$I_1 = \int e^{(-1+2i)x}dx = \frac{1}{-1+2i}e^{(-1+2i)x} = -\frac{1+2i}{5}e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$I = \Re I_1 == -\frac{e^{-x}}{5}(\cos 2x - 2\sin 2x) + C$$

On voit que cette méthode est dans un cas comme celui-ci une alternative intéressante à la méthode par parties.

Exemple 8.2 :

$$I = \int e^{3x}\sin 2x\,dx = \Im\int e^{(3+2i)x}dx$$

$$I_1 = \int e^{(3+2i)x}dx = \frac{1}{3+2i}e^{(3+2i)x} = \frac{3-2i}{13}e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$I = \Im I_1 = \frac{e^{3x}}{13}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + C$$

Exemple 8.3 :

$$I = \int e^{-x}\cos 2x(x-1)\,dx = \Re\int e^{(-1+2i)x}(x-1)\,dx$$

$$I_1 = \int e^{(-1+2i)x}(x-1)\,dx = e^{(-1+2i)x}(ax+b)$$

On dérive

$$e^{(-1+2)x}(x-1) = (-1+2i)e^{(-1+2i)x}(ax+b) + e^{(-1+2i)x}.a = e^{(-1+2i)x}\left[(-1+2i)(ax+b)+a\right]$$

$$\Rightarrow x-1 = (-a+2ai)x - b + 2bi + a \Rightarrow \begin{cases} a(-1+2i) = 1 \\ b(-1+2i)+a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5}(-1-2i) \\ b = \frac{1}{25}(8+6i) \end{cases}$$

Donc : $I_1 = e^{(-1+2i)x}\left[\frac{1}{5}(-1-2i)x + \frac{1}{25}(8+6i)\right] = \frac{e^{(-1+2i)x}}{25}\left[(-5x+8)+i(-10x-6)\right]$

$$= \frac{1}{25}e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\left[(-5x+8)+i(-10x-6)\right]$$

Finalement :

$$I = \Re I_1 = \frac{e^{-x}}{25}\left[(8-5x)\cos 2x + 2(5x-3)\sin 2x\right] + C$$

Exemple 8.4 :

$$I = \int e^{-x}\sin x(x^2-1)\,dx = \Im\int e^{(-1+i)x}(x^2-1)\,dx$$

$$I_1 = \int e^{(-1+i)x}(x^2-1)\,dx = e^{(-1-i)x}(ax^2+bx+c)$$

On dérive

$$e^{(-1+i)x}(x^2-1) = (-1-i)e^{(-1-i)x}(ax^2+bx+c) + e^{(-1-i)x}(2ax+b)$$

$$= e^{(-1-i)x}\left[(-a+ai)x^2 + (-b+ib+2a)x - c + ic + b\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(-1+i) = 1 \\ b(-1+i)+2a = 0 \\ c(-1+i)+b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}(1+i) \\ b = -i \\ c = 1 \end{cases}$$

$$I_1 = e^{(-1-i)x}\left[-\frac{1}{2}(1+i)x^2 - ix + 1\right] = \frac{1}{2}e^{(-1-i)x}\left[\left(-x^2+2\right) - i\left(x^2+2x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + i\sin x)\left[\left(-x^2+2\right) - i\left(x^2+2x\right)\right]$$

Finalement :

$$I = \Im I_1 = \frac{1}{2}e^{-x}\left[\left(-x^2+2\right)\sin x - \left(x^2+2x\right)\cos x\right] + C$$

Exemple 8.5 :

$$I = \int e^{3x}\cos 2x\left(x^2+1\right)dx = \Re\int e^{(3+2i)x}\left(x^2+1\right)dx$$
$$I_1 = \int e^{(3+2i)x}\left(x^2+1\right)dx = e^{(3+2i)x}\left(ax^2+bx+c\right)$$

On dérive:

$$e^{(3+2i)x}\left(x^2+1\right) = (3+2i)e^{(3+2i)x}\left(ax^2+bx+c\right) + e^{(3+2i)x}(2ax+b)$$
$$= e^{(3+2i)x}\left[(3a+2ia)x^2 + (3b+2ib+2a)x + 3c+2ic+b\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(3+2i) = 1 \\ (3+2i)b + 2a = 0 \\ (3+2i)c + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3-2i}{13} \\ b = -\dfrac{2}{13^2}(5-12i) \\ c = \dfrac{489-430i}{13^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = e^{(3+2i)x}\left[\frac{3-2i}{13}x^2 - \frac{2}{13^2}(5-12i)x + \frac{489-430i}{13^3}\right]$$
$$= \frac{e^{(3+2i)x}}{2197}\left[\left(507x^2 - 130x + 489\right) + i\left(-338x^2 + 156x - 430\right)\right]$$
$$I = \Re I_1 = \frac{e^{(3+2i)x}}{2197}\left[\left(507x^2 - 130x + 489\right)\cos 2x + \left(338x^2 - 312x + 430\right)\sin 2x\right] + C$$

Cas particulier : forme $e^x P(x)$

Il n'est pas nécessaire de passer par les complexes, on peut directement écrire :

$$\int e^{ax}P(x)dx = e^{ax}Q(x) + C$$

$P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes à coefficients réels de même degré.

Exemple 8.6 :

$$I = \int e^{3x}\left(x^2+2x-1\right)dx = e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$\Rightarrow e^{3x}\left(x^2+2x-1\right) = 3e^{3x}\left(ax^2+bx+c\right)+e^{3x}\left(2ax+b\right)$$

$$\Rightarrow x^2+2x-1 = 3ax^2+\left(3b+2a\right)x+3c+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ 3b+2a=2 \\ 3c+n=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{4}{9} \\ c=-\dfrac{13}{27} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2+12x-13\right)+C$$

Nettement plus rapide que l'intégration par parties.