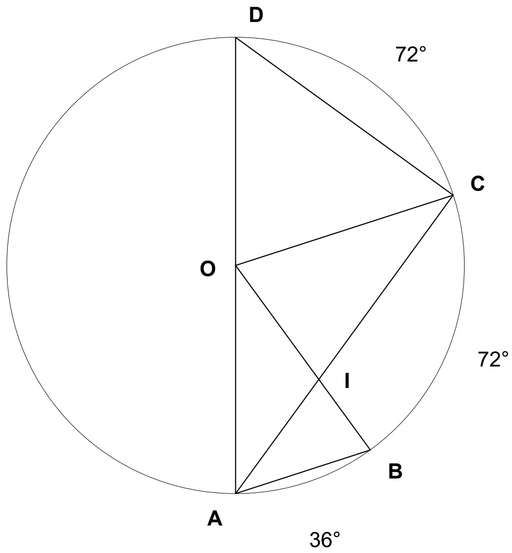
EXGSP088 - Compléments

CONSTRUCTION DU DECAGONE ET DU PENTAGONE

Il existe de nombreuses méthodes pour construire le pentagone et le décagone. En voici deux :

<u>Méthode 1 : Triangles semblables</u>



Soit $AOB = 36°, BOC = COD = 72°$ et soit R le rayon du cercle $\rightarrow DOA = 180°$

$$\text{Donc } \begin{cases} AB = d_1 \text{ côté du dodécagone convexe} \\ DC = d_2 \text{ côté du pentagone convexe} \\ AC = d_3 \text{ côté du pentagone étoilé} \end{cases}$$

ΔOBC est isocèle $\rightarrow OAB = OBA = 72°$

$\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = 36° \rightarrow \widehat{AIB} = 72° \rightarrow$ Les triangles COI et AIB sont isocèles

$\rightarrow AI = d_1$ et $IC = R$ or $AI + IC = AC \rightarrow d_3 - d_1 = R \quad (1)$

D'autre part, $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} = 36° \rightarrow$ Les triangles OIA et AOC sont isocèles et semblables

$$\rightarrow \frac{IA}{OA} = \frac{OA}{CA} \rightarrow \frac{d_1}{R} = \frac{R}{d_2} \rightarrow d_1 d_3 = R^2 \quad (2)$$

$$\text{De } (1) \text{ et } (2) \rightarrow \begin{cases} d_1 = R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ d_3 = R\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

D'où on déduit facilement que $d_2 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ car ΔDCA est rectangle

Méthode 2 : Racines n-ièmes de l'unité

Soit à résoudre dans le plan complexe, l'équation $x^5 - 1 = 0,$ ou encore $x^5 = 1$

En travaillant avec les complexes, on a :

$x^5 = e^{2k\pi i} \to x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Or nous savons que la somme des racines est nulle. $($Voir note en bas de page$)$

Ce qui pour les parties réelles donne : $\sum_{k=0}^{4} x_k = \sum_{k=0}^{4} \cos\frac{2k\pi}{5}$

Ou encore : $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$

$$\to 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Posons : $X = \cos\frac{2\pi}{5}$ et compte tenu que $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1,$ on obtient :

$4X^2 + 2X - 1 = 0$ que l'on résoud. $\to \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \to \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Nous utiliserons ces valeurs pour construire notre pentagone.

Construction

Méthode 1

Soit $R = 1.$ Soient OB et OA deux diamètres perpendiculaires

On détermine D milieu de OC. On trace l'arc de cercle de centre D et de rayon DA qui coupe OB en E. Soit F milieu de OE

On montre facilement que :

$OD = \frac{1}{2}, \quad AD = \frac{\sqrt{5}}{2},$

$OE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c'est le côté du décagone,

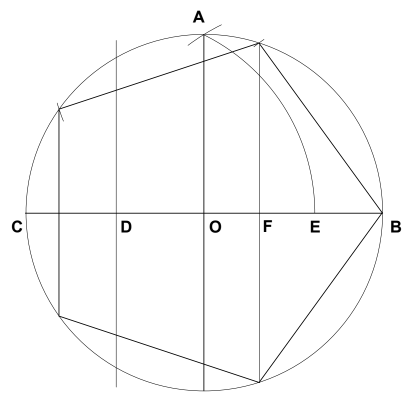
$OF = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ c'est $\cos\frac{2\pi}{5}$

$CE = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ c'est le côté du pentagone étoilé,

$AE = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ c'est le côté du pentagone convexe.

Pour tracer le pentagone convexe,

- on reportera la distance AE à partir de B,
- ou bien on élève la perpendiculaire en F,



Méthode 2

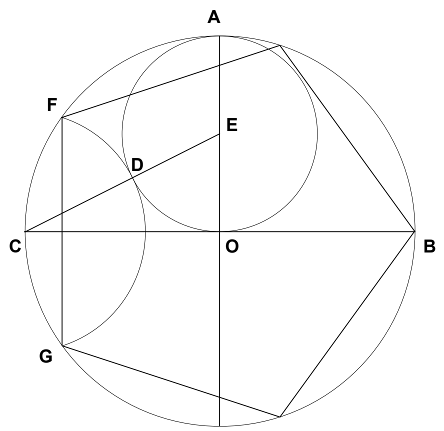
Soit E le milieu de AO.

Soit D l'intersection de CE et du cercle de centre E et de rayon $1/2$

Le cercle de centre C et de rayon CD détermine les points F et G sur le cercle.

On montre facilement que $CE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $CD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ c'est le côté du décagone

La corde FG est le côté du pentagone qu'il suffit de reporter.



Note sur les racines n-ièmes de l'unité.

Soit le polynôme $P(x) \equiv x^n - 1 = 0,$ dont les racines sont $x_k = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ avec $k = 0, 1, \ldots n-1$

A partir des racines le polynôme s'écrit : $P(x) \equiv \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$

Si on développe et qu'on identifie avec $x^n - 1,$ on en déduit que

- la somme des racines $\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ est nulle puisque le terme en x^{n-1} est nul $(\text{si } n \geq 2)$

- le produit des racines vaut $(-1)^{n-1}$

Enfin, pour $n \geq 2,$ les points images Ω_k des n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité

Le 20 mai 2005