Coniques

Résolution algébrique. Réduction.

Eléments de symétries. Diamètres. Foyers. Sommets.

Coordonnées homogènes. Tangentes. Normales.

Faisceaux. Détermination des coniques.

Décembre 2017

http://matheux.ovh/Accueil.html

Table des matières

Introduction

Ce document n'a pas pour but de décrire les coniques ainsi que leurs principales propriétés. Le lecteur trouvera facilement toutes les informations nécessaires sur internet. Les pages suivantes montrent comment réduire les coniques, les construire, déterminer leur éléments principaux (axes, foyers, etc) ainsi que la détermination des tangentes et normales.

Les chapitres I et II, nous avons repris les méthodes basées sur la détermination des valeurs propres de la conique. Cette méthode qui dérive de l'algèbre linéaire est actuellement la méthode la plus couramment rencontrée.
Cette méthode est bien adaptée pour :

- Détermination des formes réduites,
- Détermination du centre, du foyer,
- Détermination des axes,
- Détermination des sommets, petit axe et grand axe,
- Détermination des directrices,
- Détermination des asymptotes.

Le chapitre III reprend la méthode des coordonnées homogènes. Cette méthode n'est malheureusement plus enseignée au secondaire. Pourtant, c'est une méthode simple malgré des formules qui semblent au premier abord un peu compliqué. Elle a aussi l'avantage d'être générale.
Cette méthode se montre puissante dans les cas suivants :

- Détermination des tangentes et des points de tangences,
- Détermination des normales,
- Détermination du centre,
- Détermination des asymptotes,
- Détermination des cordes et des diamètres.

Nous développerons dans le chapitre III, la réduction des coniques selon la méthode des coordonnées homogènes, même si la méthode des valeurs propres est ici plus efficace.

Chaque cas est illustré par un ou plusieurs exemples. Des exercices complets seront repris à la fin.

Notons qu'il existe d'autres systèmes de coordonnées, par exemple les coordonnées barycentriques qui permettent elles aussi d'obtenir des équations homogènes, et qui se montrent aussi très intéressante.

Les deux premiers chapitres sont <u>très</u> fortement inspirés d'un document trouvé il y a quelques années sur internet et dont je n'ai plus les références.

Chapitre I
Résolution algébrique des coniques

§ 1 – Définition d'une conique et exemples

Un polynôme $P(x, y)$, du second degré par rapport à ses deux variables x et y, est l'expression

$$P(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \qquad (1)$$

où au moins l'un des trois coefficients A, B, C, est non nul.

Nous supposerons que les variables x et y prennent leurs valeurs dans le corps **R** des réels et nous appelons une racine du polynôme $P(x,y)$ un couple (x_o, y_o) de nombres réels, ou encore un point $m = (x_o, y_o)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ sur **R**, tel que
$P(x_o, y_o) = 0$.

Une **conique** est alors l'ensemble des racines d'un polynôme $P(x, y)$ du second degré par rapport à ces deux variables.
Les exemples les plus courants que l'on puisse donner d'ensembles de racines de tels polynômes sont déterminés par les équations suivantes :

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\; ; \;\; a, b \neq 0$ (cas de l'ellipse) ;
2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\; ; \;\; -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\; ; \;\; a, b \neq 0$ (cas de l'hyperbole) ;
3) $x^2 = ay$ ou $y^2 = ax \;\; ; \;\; a \neq 0$ $x^2 = ay$ ou (cas de la parabole).

Trois cas majeurs que nous apprendrons à résoudre dans le chapitre en cours et qui nous serviront de modèles pour la résolution d'une conique générale définie par l'équation $P(x,y) = 0$.
Mais, pour ramener l'équation $P(x,y) = 0$, à l'un de nos trois modèles, il faudra effectuer des opérations relativement complexes qui seront toutes algébriques et inspirées partiellement par la méthode de **Fraleigh** et **Bauregard** (Linear Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1986).

Avant de passer à l'étude des trois modèles précités et de la résolution de l'équation générale $P(x,y) = 0$, remarquons que la forme de l'ensemble des racines d'un tel polynôme peut être complètement différente de ces modèles là ; en effet :

- Si $P(x,y) = (\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' x + \gamma')$; α et $\beta \neq 0$ et α' et $\beta' \neq 0$ alors l'équation $P(x,y) = 0$ admet pour solutions deux droites concourantes si $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$ et $\gamma \neq \gamma'$ et parallèles si $\alpha\beta' = \alpha'\beta$ et $\gamma \neq \gamma'$;

- Si $P(x,y)=(\alpha x+\beta y+\gamma)^2$ avec α et $\beta\neq 0$ alors l'équation $P(x,y)=0$ admet pour solutions une droite ;
- Si $P(x,y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$, alors l'équation $P(x,y)=0$ admet une seule solution; à savoir le point $m=(\alpha,\beta)$.
- Si $P(x,y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+1$, alors l'équation $P(x,y)=0$ n'admet aucune solution.

Ces formes particulières de solutions d'une équation $P(x,y)=0$ qui, nous le récapitulons, sont :

- Deux droites concourantes ;
- Deux droites parallèles ;
- Une droite ;
- Un point ;
- Le vide ;

seront appelées formes **dégénérées** d'une conique. Nous démontrerons que l'équation générale $P(x,y)=0$ admet pour solutions une ellipse, une hyperbole, une parabole ou une forme dégénérée.

Note : Pour avoir une conique dégénérée, il faut et il suffit que le déterminant suivant soit nul.

$$\boxed{\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0}$$

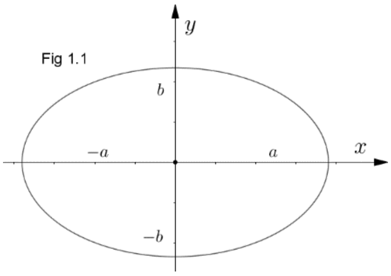
§ 2 – Équations élémentaires

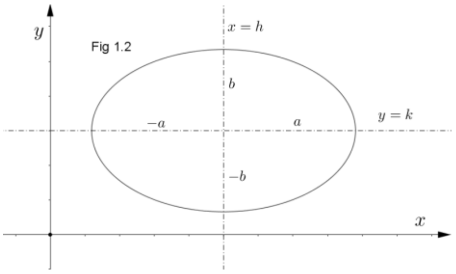
§ 2-1 – Cas de l'ellipse

L'équation d'une ellipse centrée sur l'origine des axes est

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad a,b\neq 0}$$

et ses deux axes ont pour longueurs respectives les nombres 2a et 2b (en supposant $a,b>0$).





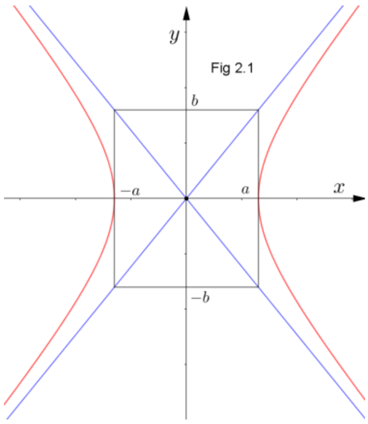
L'équation $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ représente la même ellipse par rapport aux axes $x=h$ et $y=k$, ce qui implique que le centre de la conique à pour coordonnées $C(h,k)$ (fig. 1-2).

§ 2-2 – Cas de l'hyperbole

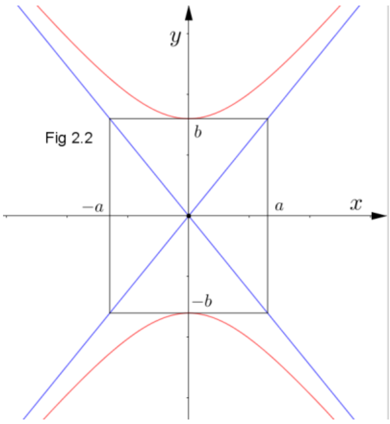
L'équation d'une hyperbole, centrée sur l'origine des axes, est l'une des deux équations suivantes :

1) $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ Hyperbole de type I (fig. 2-1) ;
2) $\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ Hyperbole de type II (fig. 2-2).

Dans les deux cas, les asymptotes de l'hyperbole sont les droites $y=\pm\frac{b}{a}x$ (fig. 2-1 et 2-2 ci-dessous).



Type I



Type II

Et les équations des mêmes hyperboles, centrées sur le point de coordonnées (h, k), sont respectivement :

1) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Type I;
2) $-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Type II.

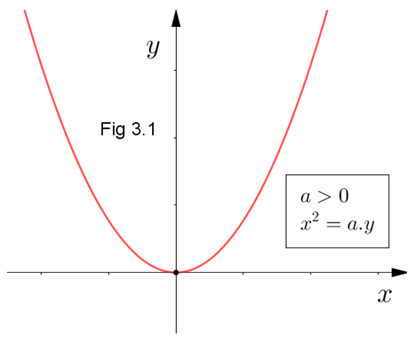
§ 2-3 – Cas de la parabole

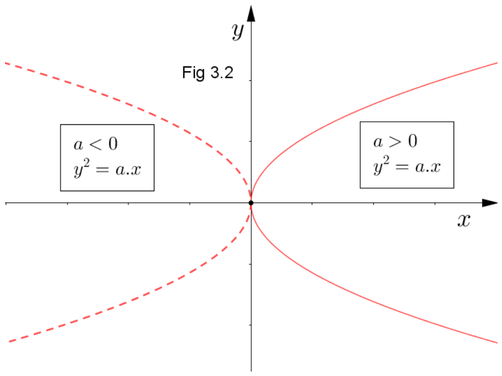
L'équation d'une parabole, ayant pour sommet l'origine des axes et pour axe l'un des deux axes de références, est toujours l'une des deux suivantes :

1) $y^2=ax$; $a>0$ ou $a<0$ (Type Ia et Ib)
2) $x^2=ay$; $a>0$ ou $a<0$ (Type IIa et IIb).

Dans le premier cas, l'axe $\overrightarrow{Oy}$ est l'axe de la parabole ; dans le second, c'est l'axe $\overrightarrow{Ox}$.
Et l'équation des mêmes paraboles, dont le sommet est le point de coordonnées (h,k), est l'une des deux suivantes :

1) $(x-h)=a(y-k)^2$;
2) $(y-k)=a(x-h)^2$.





§ 3 – Équation semi-élémentaire

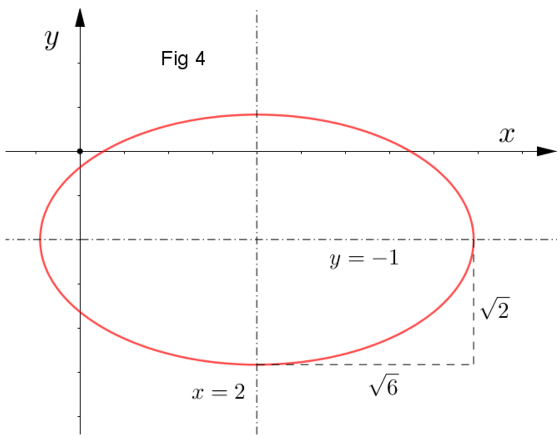
Nous appelons équation semi-élémentaire l'équation associée à un polynôme $P(x,y)$ (§ 1, formule (1)) dont le coefficient B du terme en xy est nul. Nous allons voir que l'on peut résoudre facilement une telle équation ; commençons par un exemple :

Soit à résoudre la conique : $x^2+3y^2-4x+6+1=0$.
Groupons les termes en x et ceux en y ; on obtient : $(x^2-4x)+(3y^2+6y)+1=0$.
D'où
$$(x-2)^2-4+3(y^2+2y)+1=0$$
$$(x-2)^2-4+3(y+1)^2-3+1=0 \;;$$
$$(x-2)^2+3(y+1)^2=6$$

Il s'agit donc d'une ellipse dont les axes (cf. § 2-1) sont portés par les droites $x=2$ et $y=-1$, car son équation peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

Nous pouvons alors représenter cette ellipse (fig. 4 p. 7) en précisant la longueur du grand axe et du petit axe et quelques points par lesquels elle passe :



Considérons maintenant le cas général où le coefficient du terme en xy du polynôme $P(x,y)$ est nul. On aura alors une équation de la forme :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (2)$$

§ 3-1 – Cas où A et $C \neq 0$

On peut écrire en supposant que A et $C \neq 0$:

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{C}\right) + F = 0 \ ;$$

et
$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 - \frac{E^2}{C} + F = 0 \ .$$

D'où
$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = F' \ \text{ avec } \ F' = F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$$

En posant $X = x + \frac{D}{A}$ et $Y = y + \frac{E}{C}$, dans les axes définis par les droites $x = -\frac{D}{A}$ et $y = -\frac{E}{C}$, l'équation d'hypothèse aura la forme

$$AX^2 + CY^2 + F' = 0 \qquad (3)$$

et sera donc facilement résoluble en se ramenant à l'un des trois cas traités (§ 2-1 ; § 2-2 ; § 2-3) ou à l'une des formes dégénérées précédemment décrites.

§ 3-2 – Cas où $A \neq 0$ et $C = 0$

Si maintenant $A \neq 0$ et $C = 0$, on pourra écrire l'équation (2) sous la forme suivante :

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} + 2Ey + F = 0 ;$$

d'où
$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} + 2Ey + F' = 0 \ \text{ avec } \ F' = F - \frac{D^2}{A} .$$

Si $E = 0$, on voit que l'on aura une forme dégénérée facilement résoluble ; si $E \neq 0$, on pourra écrire
$$\frac{A}{2E}\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{F'}{2E}\right) = 0 \ ;$$

et en posant $X = x + \frac{D}{A}$ et $Y = y + \frac{F'}{2E}$, dans les axes définis par les droites $x = -\frac{D}{A}$ et $y = -\frac{F'}{2E}$ l'équation s'écrit:

$$\frac{A}{2E}X^2 + Y = 0 \qquad (4).$$

Il s'agit alors de l'équation d'une parabole (§ 2-3).

§ 3-3 – Cas où $A = 0$ et $C \neq 0$

Enfin, dans le cas $A = 0$ et $C \neq 0$, l'on voit que l'on pourra résoudre l'équation, par une méthode semblable à celle précédemment exposée, et aboutir soit à une forme dégénérée si $D = 0$, et, dans le cas contraire, à l'équation :

$$\frac{C}{2D}Y^2 + X = 0 \qquad (5)$$

avec $$Y = y + \frac{E}{C} \text{ et } X = x + \frac{F'}{2D} \quad ; \quad F' = F - \frac{E^2}{C}.$$

§ 4 – Réduction de l'équation générale à une équation semi-élémentaire

L'idée principale de la réduction annoncée est de trouver un système convenable d'axes où l'équation générale devient semi-élémentaire.
Pour montrer comment on peut parvenir à cette réduction, commençons par écrire les éléments de **R²** sous la forme matricielle : $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; et considérons la forme quadratique associée au polynôme $P(x,y)$ définie par :

$$q(m) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (6).$$

La forme $q(m)$ provient de la forme bilinéaire et symétrique φ définie par

$$\varphi(m,m') = Axx' + 2B(xy' + x'y) + Cyy'$$

si $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $m' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; car $q(m) = \varphi(m,m')$.

§ 4-1 – Matrice de la forme quadratique

La matrice de la forme $\varphi(m,m')$, dans la base canonique $(e) = (e_1 ; e_2)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est évidemment la matrice

$$M_Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice symétrique – comme pour toute forme bilinéaire et symétrique – et l'on a la formule : $\varphi(m,m') = {}^t m.M_Q.m$ où, d'une manière générale la notation ${}^tQ$ signifie la matrice transposée de Q.

La matrice M_Q sera aussi appelée matrice de la forme quadratique *q(m)* et l'on aura la formule

$$q(m) = \varphi(m,m') = {}^t m.M_Q.m \qquad (7)$$

§ 4-2 – Diagonalisation de la matrice M_Q

On sait qu'une matrice symétrique, à coefficients réels, est toujours diagonalisable ; mieux, il existe une matrice orthogonale Q (c'est-à-dire avec la propriété ${}^tQ = Q^{-1}$) telle que

$$Q^{-1}.M_Q.Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice M_Q. Cette matrice *Q*, nous le rappelons, s'obtient en déterminant deux vecteurs propres v_1 et v_2, associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 et en les normant tous les deux. À la condition toutefois que les valeurs propres de la matrice M_Q soient distinctes ! Ce qui est vérifié si le coefficient *B* (de la matrice M_Q) est différent de 0, comme nous allons le voir.

Ecrivons, à cet effet, le polynôme caractéristique de M_Q ; on a :

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) \qquad (8)$$

Le discriminant de l'équation $P_M(\lambda) = 0$ est donc :

$$\Delta = (A+C)^2 - 4(AC - B^2) = A^2 + C^2 + 2AC - 4AC + 4B^2 = (A-C)^2 + 4B^2$$

Donc, si $B \neq 0$, on a $\Delta > 0$ et il y a deux racines λ_1 et λ_2 ; par suite la diagonalisation orthogonale de la matrice M_Q est possible.

Dans le cas où *B=0*, l'équation $P(x,y) = 0$ est semi-élémentaire ; nous l'avons résolue au paragraphe précédent ; et il n'y a pas lieu à réduire l'équation générale.

§ 4-3 – Réduction de la forme quadratique

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ deux vecteurs propres normés de la matrice M_Q, associée à la forme quadratique *q*(*m*) (§ 4, formule (6)), et linéairement indépendants. On associera a v_1 la plus petite valeur propre λ_1 tel que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

La base $(e') = (v_1; v_2)$ est orthonormée et définit donc un système d'axes rectangulaires ($\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$) qui sont précisément les droites orientées portant respectivement les vecteurs v_1 et v_2. Nous allons montrer que, dans ce nouveau système d'axes, on aura

$$\boxed{q(m) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2}$$

Où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres correspondantes respectivement aux vecteurs propres v_1 et v_2 ; *X* et *Y* les coordonnées du point $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (*e'*).

En effet, la matrice changement de base

$$(e) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow (e') = (v_1; v_2)$$

est la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

qui, on le sait, est une matrice orthogonale diagonalisant la matrice M_Q.

Et l'on sait aussi que

$$m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

D'après la formule (7), § 4-1, on a donc :

$$q(m) = {}^t m.M_Q.m = {}^t\left(Q.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right).M_Q.\left(Q.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}.{}^t Q.M_Q.Q\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Or $\qquad {}^t Q.M_Q.Q = Q^{-1}.M_Q.Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;

donc $\qquad q(m) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$.

§ 4-4 – Fin de la réduction de l'équation générale

L'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

s'écrit alors, dans la base $(e') = (v_1; v_2)$:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Or : $\qquad m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$;

Donc $x = \alpha X + \gamma Y$ et $y = \beta X + \delta Y$;

et finalement on aura une équation de la forme

$$\boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F = 0} .$$

C'est-à-dire une équation semi-élémentaire dans les axes $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ qui, nous le rappelons, portent respectivement les vecteurs normés linéairement indépendants $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ de la matrice M_Q associée à la forme quadratique (§ 4, formule (6)).

§ 5 – Premier exemple de résolution de l'équation générale

Soit à résoudre la conique : $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$

La forme quadratique : $q(m) = x^2 - 2xy + y^2$ a pour matrice $M_Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cherchons les valeurs propres de la matrice M_Q ; son polynôme caractéristique est :

$P_M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$. On a donc les valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$.

§ 5-1 – Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$

On écrit l'équation $M_Q.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$;d'où l'équation $x - y = 0$, et, par exemple, le vecteur propre nommé $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

§ 5-2 – Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$

On écrit l'équation $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; d'où la relation $x+y=0$ et le vecteur propre normé $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

§ 5-3 – Matrice diagonalisant la matrice M_Q

On sait que la matrice, déterminée par les deux vecteurs propres v_1 et v_2, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalise orthogonalement la matrice M_Q ; et, en posant $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on aura

$$q(m) = x^2 - 2xy + y^2 = 2Y^2 \quad .$$

§ 5-4 – Équation réduite

L'équation en X, Y s'obtient en remplaçant x par sa valeur en fonction de X et Y ; or $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$; d'où l'équation

$$2Y^2 + 4\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)\right] = 4 \Rightarrow 2Y^2 + 4X - 4Y = 4 \Rightarrow 2(Y^2 - 2Y) + 4X = 4$$

$$\Rightarrow 2(Y-1)^2 - 2 + 4X = 4 \Rightarrow 2(Y-1)^2 + 4X - 6 = 0 \Rightarrow (Y-1)^2 + 2X - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (Y-1)^2 + 2\left(X - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Et finalement l'équation $(Y-1)^2 = -2\left(X - \frac{3}{2}\right)$ qui est celle d'une parabole.

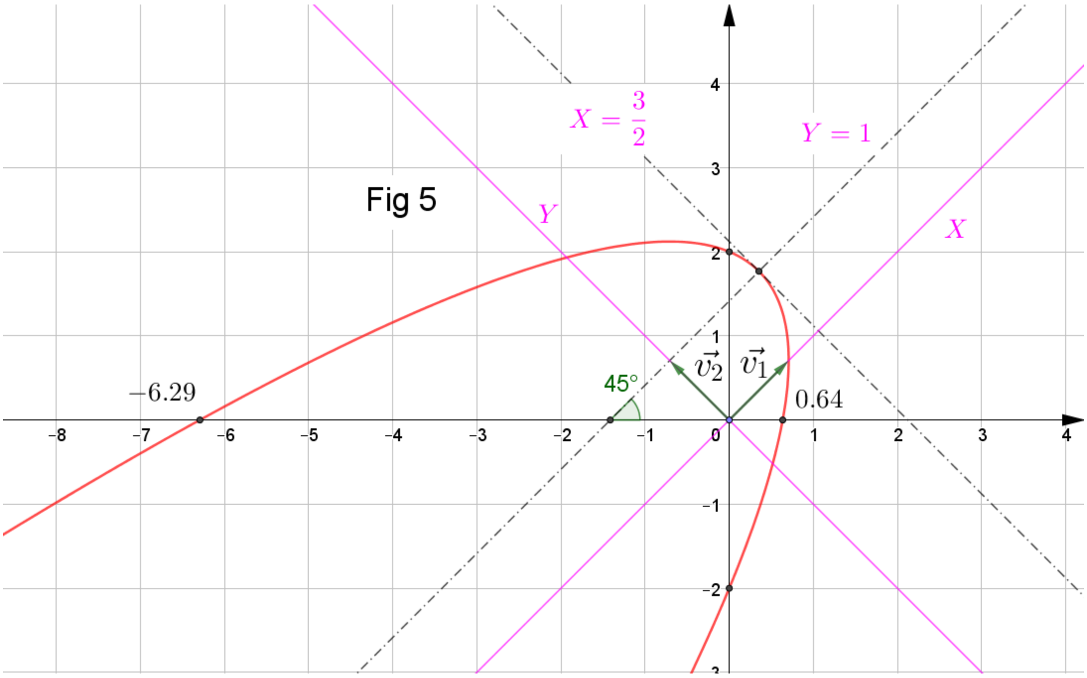
§ 5-5 – Construction de la conique

Les nouveaux axes $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ sont les droites orientées portant respectivement les vecteurs propres $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'axe de la parabole est la droite $Y = 1$ dans les nouveaux axes ; son sommet S est l'intersection de la droite $X = \frac{3}{2}$ et la droite $Y = 1$.

Pour obtenir dans le système $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$, on a :

$$S_{xy} = Q.S_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 5\sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.353 \\ 1.768 \end{pmatrix}$$

Signalons enfin que la parabole passe par les points $x = 0$; $y = -2$ et $x = 0$; $y = 2$; car, dans l'équation d'origine, si $x = 0$ alors $y^2 = 4$. Aussi pour $y = 0$, on a $x^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$, équation dont les racines sont approximativement égales à 0,6 et – 6,2.



§ 6 – Deuxième exemple de résolution de l'équation générale

Soit à résoudre la conique : $x^2 + 8xy + 7y^2 + 18\sqrt{5}x = 324$.

La forme quadratique associée à l'équation est : $q(m) = x^2 + 8xy + 7y^2$ et sa matrice est $M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de M_Q est $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 9$; et les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 9$ (car $|-1| < |9|$).

§ 6-1 – Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$

On a à résoudre l'équation $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; d'où $2x + 4y = 0$; soit encore $x + 2y = 0$ et le vecteur propre normé $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

§ 6-2 – Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 9$

On a à résoudre l'équation $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; d'où $-8x + 4y = 0$, soit encore $-2x + y = 0$ et le vecteur propre normé $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Note : on choisit les vecteurs v_1 et v_2 de façon à avoir une repère (X,Y) de même sens que le repère (x,y)

§ 6-3 – Matrice diagonalisant la matrice M_Q

On sait que la matrice, déterminée par les deux vecteurs propres v_1 et v_2, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalise orthogonalement la matrice M_Q ; et, en posant $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q. \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on aura $q(m) = 7x^2 + 8xy + 7y^2 = -X^2 + 9Y^2$.

§ 6-4 – Équation réduite

On a les relations $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q. \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y)$.

La nouvelle équation de la conique, dans les axes $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ portant respectivement les vecteurs v_1 et v_2, est alors $-X^2 + 9Y^2 + 18\sqrt{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)\right] = 324$; d'où

$$-X^2 + 9Y^2 + 36X + 18Y = 324 \Rightarrow -\left(X^2 - 36X\right) + 9\left(Y^2 + 2Y\right) = 324$$

$$\Rightarrow -\left(X^2 - 36X + 324\right) + 324 + 9\left(Y^2 + 2Y + 1\right) - 9 = 324$$

$$\Rightarrow -\left(X^2 - 18\right)^2 + 324 + 9(Y + 1)^2 - 9 = 324$$

$$\Rightarrow -(X - 18)^2 + 9(Y + 1)^2 = 9$$

finalement $-\frac{(X - 18)^2}{3^2} + \frac{(Y + 1)^2}{1^2} = 1$ qui est donc l'équation d'une hyperbole de type II.

§ 6-5 – Construction de la conique

On commence par tracer les droites orientées $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ portant respectivement les deux vecteurs propres (fig. 6) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

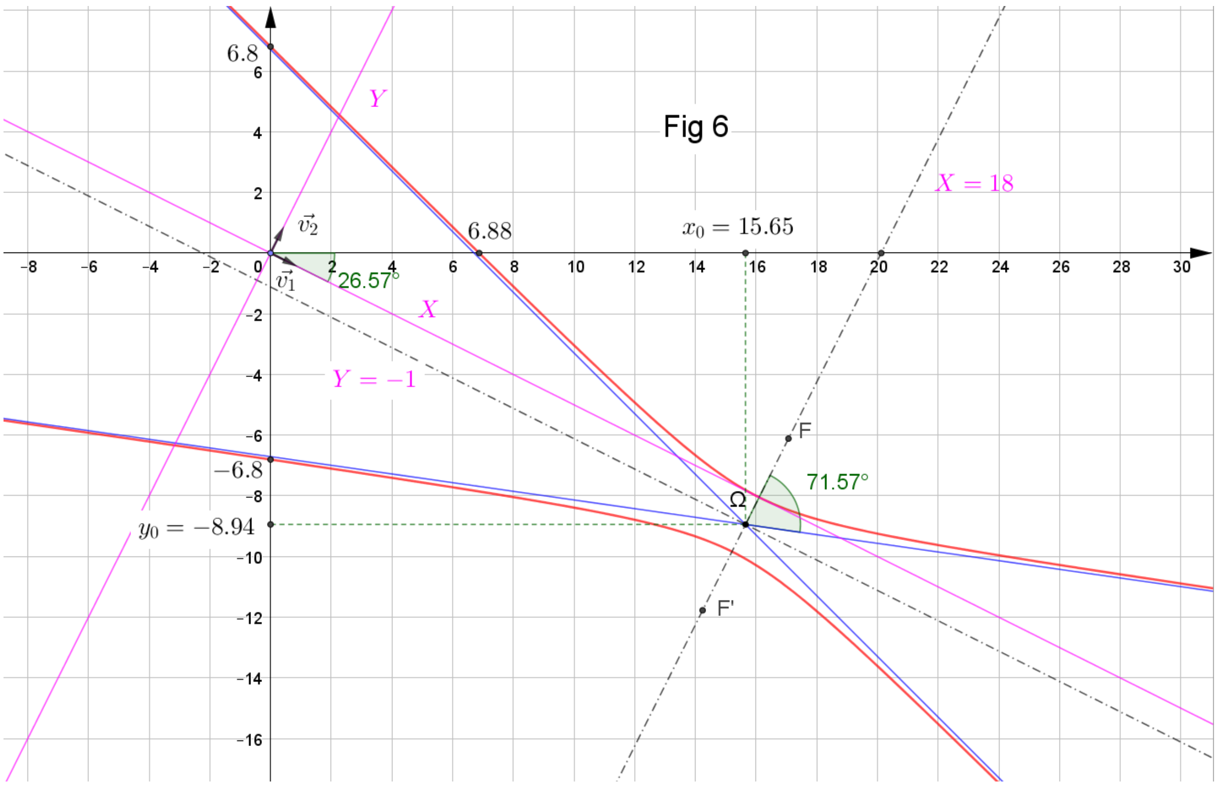
Et le centre de l'hyperbole est le point de coordonnées $X = 18$ et $Y = -1$.

Pour avoir les coordonnées du centre dans le système $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right)$:

$$\Omega_{xy} = Q.\Omega_{XY} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.65 \\ -8.94 \end{pmatrix}$$

Pour avoir les asymptotes on construit les droites d'équations : $X–18 = \pm\, 3(Y+1)$.

Signalons que pour $x = 0$, on a $y = \pm\, 6{,}8$. Lorsque $y = 0$, les racines de l'équation $x^2 + 18\sqrt{5}x - 324 = 0$ ont pour solutions approchées $x_1 = 6{,}9$ et $x_2 = –47{,}1$; une branche de l'hyperbole passe par le point $x_1 = 6{,}9$ et $y = 0$ et l'autre branche coupe l'axe $\overrightarrow{Ox}$ en un point inaccessible dans le cadre de la figure. Remarquons enfin que l'hyperbole se "confond" très vite avec ses deux asymptotes.



§ 7 – Discussion de l'équation générale

Pour discuter de l'équation générale

$$\underbrace{Ax^2+2Bxy+Cy^2}_{\text{Partie Quadratique}}+\underbrace{2Dx+2Ey}_{\text{Partie linéaire}}+F=0\ ,$$

on appellera λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique $q(m)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$. En définissant, la matrice $M_Q=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ et $M_L=\begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix}$, l'équation générale s'écrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.M_Q.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+M_L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+F=0}$$

Comme on le verra, la nature de la conique dépendra du signe relatif des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice M_Q ; c'est pourquoi, on considèrera le signe du produit $\lambda_1.\lambda_2$. Or, d'après la détermination du polynôme caractéristique de la matrice M_Q (cf. formule (8), § 4-2), on a

$$\lambda_1\lambda_2=AC-B^2 \qquad (9)$$

qu'on appellera le discriminant de la conique.

1) M_Q détermine le type de conique
2) M_L détermine la position du centre
3) B détermine l'orientation de la conique. Si B=0, alors les axes de la conique sont parallèles à $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$
4) F détermine la grandeur de la conique, par exemple la distance entre les foyers pour une ellipse ou une hyperbole, ou entre le foyer et la directrice pour une parabole. Si F=0, alors la conique passe par l'origine.

§ 7-1 - Cas où $AC–B^2 = 0$, donc $\lambda_1.\lambda_2=0$ (Parabole)

L'une des deux valeurs propres λ_1 ou λ_2 est nulle, car si les deux sont nulles, alors la réduction de la forme quadratique

$$q(m)=Ax^2+2Bxy+Cy^2=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2\ ,$$

Entraînerait *q(m)* = 0 pour toutes les valeurs de *x* et *y*, c'est-à-dire $A = B = C = 0$; ce qui est contraire à la définition d'une conique (cf. § 1).

Supposons, par exemple, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$.
Dans un système d'axes convenables (cf. § 4), l'équation a la forme suivante

$$\lambda_1Y^2+2D'X+2'Y+F'=0\ .$$

D'après une étude déjà faite (cf. § 3-2 et § 3-3), on a trois cas en considérant l'ensemble des solutions de la dernière équation :

- L'ensemble des solutions est vide ;
- L'ensemble des solutions a la forme de deux droites parallèles ou d'une seule droite ;
- L'ensemble des solutions est une parabole.

Rappel : Pour avoir une conique dégénérée, il faut et il suffit que le déterminant suivant soit nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

§ 7-2 – Cas où *AC* –*B*² ≠ 0, donc $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ (conique à centre)

D'après l'étude faite (§ 3-1), dans un système d'axes convenables, on pourra se ramener à la forme

$$\boxed{\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + F' = 0} \qquad (10)$$

avec $\boxed{F' = P(\Omega)}$

c'est-à-dire la valeur de la conique pour les coordonnées du centre Ω.

§ 7-2-1 – Cas où *AC* – *B*² > 0, donc $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ (ellipse)

Alors λ_1 et λ_2 sont de même signe que l'on pourra supposer positif. On voit donc que l'ensemble des solutions de l'équation (10) peut avoir l'une des trois formes suivantes :

- L'ensemble des solutions est vide ;
- L'ensemble des solutions est un point (*F'* = 0) ;
- L'ensemble des solutions est une ellipse.

§ 7-2-2 – Cas où *AC* – *B*² < 0, donc $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (hyperbole)

Alors λ_1 et λ_2 sont des signes contraires. Aussi l'on voit aisément que l'ensemble des solutions de l'équation (10) peut prendre l'une des deux formes suivantes :

- L'ensemble des solutions est deux droites concourantes (*F*' = 0) ;
- L'ensemble des solutions est une hyperbole d'équation.

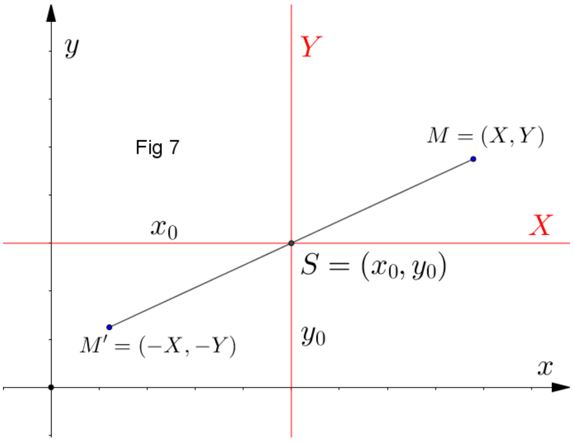
$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + F' = 0$$

Considérons que $F' > 0$ (Si ce n'est pas le cas on multiplie l'équation par –1)

1) Si $\lambda_1 > 0$ (donc $\lambda_2 < 0$), alors l'hyperbole est de type I : l'axe principal est l'axe *OX*.
1) Si $\lambda_1 < 0$ (donc $\lambda_2 > 0$), alors l'hyperbole est de type II : l'axe principal est l'axe *OY*.

Chapitre II
Éléments de symétrie d'une conique

Nous allons établir, dans ce chapitre, des formules qui nous permettront de déterminer les éléments de symétrie d'une conique (centre, axes, asymptotes) définie à partir de l'équation générale
$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$; des formules qui seront des fonctions algébriques ou trigonométriques des coefficients *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* de l'équation d'origine. Nos calculs ont été partiellement inspirés par la méthode de **J. Martin** (Cours de mathématiques, Dunod, Paris, 1967).



§ 1 – Coordonnées du centre d'une conique à centre ($AC - B^2 \neq 0$)

Nous avons vu que si $AC - B^2 \neq 0$ (Chapitre 1, § 7-2), l'ensemble des solutions de l'équation est soit vide, soit un point, soit deux droites concourantes dans le cas dégénéré ou alors véritablement une ellipse ou une hyperbole. Dans ce dernier cas, nous avons évidemment un centre de symétrie dont les coordonnées seront désignées par (x_0, y_0) et que nous cherchons à calculer en fonction des coefficients de l'équation :

Les formules associées à la translation d'axe (fig. 7) sont

$$x = x_0 + X \quad \text{et} \quad y = y_0 + Y \ .$$

De sorte que, par rapport aux nouveaux axes, on aura l'équation suivante en remplaçant *x* et *y*, et en réarrangeant :

$$AX^2+2BXY+CY^2+2\left(Ax_0+By_0+D\right)X+2\left(Bx_0+Cy_0+E\right)Y+F_0=0 \quad (1)$$

où F_0 est une constante.

Si (*X*,*Y*) est une solution de l'équation (1), alors, comme ω est centre de symétrie de l'ensemble des solutions, (–*X*, –*Y*) est aussi solution de l'équation. De sorte que pour les (*X*, *Y*) considérés, on aura :

$$\begin{cases} AX^2+2BXY+CY^2+2\left(Ax_0+By_0+D\right)X+2\left(Bx_0+Cy_0+E\right)Y+F_0=0 \\ AX^2+2BXY+CY^2-2\left(Ax_0+By_0+D\right)X-2\left(Bx_0+Cy_0+E\right)Y+F_0=0 \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, les relations précédemment écrites, on obtient :

$$4\left(Ax_0+By_0+D\right)X+4\left(Bx_0+Cy_0+E\right)Y_0=0 \qquad (2)$$

pour tous les points (*X*, *Y*) de la conique.

Comme la conique est supposée non dégénérée on a nécessairement le système suivant :

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Notons que ces deux équations ne sont rien d'autres que les dérivées partielles de $P(x,y)=0$ par rapport à *x* et *y*, et on peut écrire :

$$\begin{cases} P'_x(x,y) = 0 \\ P'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant principal du système est $AC - B^2$ qui, d'après l'hypothèse, est non nul ; ce qui détermine x_0 et y_0 par les formules de Cramer :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}$$

D'où la formule des coordonnées du centre :

$$\boxed{x_0 = \frac{BE - DC}{AC - B^2} \quad ; \quad y_0 = \frac{BD - EA}{AC - B^2}} \qquad (3)$$

L'équation (3) peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\boxed{\Omega = -\frac{1}{2} M_L . M_Q^{-1}}$$

À titre de vérification de la formule (3), et du graphique d'une conique traitée (chapitre I, § 6), nous avions l'équation

$$x^2 + 8xy + 7y^2 + 18\sqrt{5}x = 324 \ .$$

Donc, ici, $A = 1, B = 4, C = 7, D = 9\sqrt{5}, E = 0$.

$$x_0 = \frac{4\times 0 - 9\sqrt{5}\times 7}{1\times 7 - 4^2} = 7\sqrt{5} \simeq 15.652 \qquad y_0 = \frac{4\times 9\sqrt{5} - 0\times 1}{1\times -4^2} = -4\sqrt{5} \simeq -8.944$$

Ou bien $\quad \Omega = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} . \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Le calcul approché donne $x_0 = 15{,}7$ et $y_0 = -8.9$. À 1 mm près, on retrouve bien les coordonnées du centre ω de l'hyperbole (chapitre I, § 6-5, fig. 6).

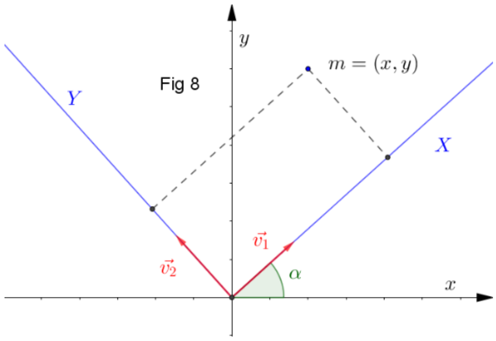
§ 2 – Direction des axes d'une conique non dégénérée

Si nous avons une conique non dégénérée associée à l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ ,$$

nous lui avions associé la forme quadratique

$$q(m) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \text{ pour } m = (x, y) \ .$$



Et, si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres normés et indépendants de la matrice $M_Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, nous avons vu (chapitre I, § 4-3) que si X et Y désignent les coordonnées d'un point $m = (x, y)$ dans la base $(e') = (v_1 \ ; v_2)$, on avait la relation

$$q(m) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \qquad (4)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres associées respectivement aux vecteurs propres normés v_1 et v_2.

Ce que nous voulons maintenant déterminer c'est l'angle α (fig. 8, p. 23).

Écrivons alors les formules générales correspondantes à une rotation d'axe d'angle α : si X, Y désignent les coordonnées du point $m = (x, y)$ dans le système $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$, on sait que

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

En remplaçant x et y, dans la relation (4), en fonction de X et Y, et de sin α et cos α, on obtient une relation de la forme

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \qquad (5)$$

où

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha \\ C' = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha \\ B' = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \dfrac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha \end{cases}$$

La relation (5) étant vérifiée pour tout couple de nombres (X, Y), on obtient alors que la forme quadratique

$$q'(m) = \left(A' - \lambda_1\right)X^2 + 2B'XY + \left(C' - \lambda_2\right)Y^2$$

est identiquement nulle. Ceci implique que ses trois coefficients soient nuls ; et donc, en particulier, que

$$B' = \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha \ ;$$

d'où

$$\frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha = -B\cos 2\alpha \ ;$$

et

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2B}{A - C}} \qquad (6).$$

À titre de vérification de cette formule, reconsidérons le graphique d'une conique résolue (chapitre I, § 6) ; nous avions l'équation : $x^2+8xy+7y^2+18\sqrt{5}x=324$, où donc A = 1, B = 4, C = 7. Ainsi tan 2α = – 1,3 ; d'où α = –26,57 degrés ; et effectivement l'un des deux axes de l'hyperbole fait un angle de – 26,57 degrés avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$; ce qui est une vérification du graphique au demi-degré près.

Autre méthode basée sur les vecteurs propres.
Le vecteur directeur de l'axe principal d'une conique est associé à la valeur propre la plus petite en valeur absolue. Si $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est ce vecteur propre alors :

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{v_2}{v_1}}$$

Reprenons notre exemple. On considère $v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car $|\lambda_1|<|\lambda_2|$. On a :

$$\tan\alpha=\frac{-1}{2}\Rightarrow\alpha=-26.57°$$

Equations des axes d'une conique centrée.
Nous pouvons maintenant facilement établir les équations des axes.
Si $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, alors les équations paramétriques des axes sont :
Pour une ellipse et une hyperbole de type I

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Axe principal } OX & x_P=\Omega+k.v_1 \\ \text{Axe secondaire } OY & x_S=\Omega+k.v_2 \end{array}}$$

Pour une hyperbole de type II

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Axe principal } OY & x_P=\Omega+k.v_2 \\ \text{Axe secondaire } OX & x_S=\Omega+k.v_1 \end{array}}$$

Où ω représente les coordonnées du centre et k un paramètre réel.
Toujours pour la même conique qui est de type II, on a :

$$\text{Axe principal : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\frac{x-7\sqrt{5}}{2}=\frac{y+4\sqrt{5}}{-1}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Axe secondaire : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\Rightarrow x-7\sqrt{5}=\frac{y+4\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=2x-18\sqrt{5}$$

§ 2-1 – Cas de la parabole

Dans ce cas, on sait (chapitre I, § 7-1) que $AC-B^2=0$.
Nous allons alors montrer la formule

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{B}{A}\text{ ou }-\frac{A}{B}}\qquad(7)$$

En effet, on sait que, dans le cas de la parabole, l'une des deux valeurs propres de la matrice M_Q, associée à la forme quadratique $q(m) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, est nulle.
De sorte que le calcul précédent implique que l'un des deux coefficients *A'* ou *C'* (définis dans la relation (5)) est nul.
Supposons par exemple que *C'* = 0 ; on aura

$$A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

d'où

$$A\tan^2\alpha - 2B\tan\alpha + C = 0 \quad .$$

Le trinôme du second degré associé à cette relation donne, en posant $t = \tan\alpha$, $At^2 - 2Bt + C = 0$. Son discriminant $\Delta = 4B^2 - 4AC$ est, d'après l'hypothèse, nul ; donc sa seule solution est : $\tan\alpha = \dfrac{2B}{2A} = \dfrac{B}{A}$.

Par conséquent $\tan\alpha = \dfrac{B}{A}$; et, aussi évidemment, puisque $AC = B^2$, que $\tan\alpha = \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{B}$.
Si maintenant on suppose que *A'* = 0 dans la relation (5), par un calcul analogue à ce qui précède, on obtient l'équation

$$C\tan^2\alpha + 2B\tan\alpha + A = 0 \ ,$$

ce qui implique : $\tan\alpha = \dfrac{-2B}{2C} = -\dfrac{B}{C} = -\dfrac{A}{B}$.

À titre de vérification, nous avions une parabole (chapitre I, § 5-5) d'équation $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$; et ici on a donc $A = 1$; $B = -1$; $C = 1$.
Dans ce cas on a *A'* = 0 ; donc $\tan\alpha = -\dfrac{A}{B} = -1$; et que α = 45 degrés.
Sur le graphique (chapitre I, § 5-5, fig. 5) on a exactement α = 45 degrés.

Autre méthode basée sur les vecteurs propres.

La valeur propre à prendre est évidemment $\lambda_1 = 0$ donc $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Ce qui donne bien un angle de 45°

Coordonnées du sommet.

Pour les paraboles, il est plus simple de d'abord déterminer l'équation réduite. On a vu au paragraphe §2.3 que l'équation réduite d'une parabole était dans le système (*X*,*Y*) :

1) $(X - h) = a(Y - k)^2$; si *Y* est l'axe principal
2) $(Y - k) = a(X - h)^2$; si *X* est l'axe principal.

Le sommet a pour coordonnées $S = (h,k)$. Si v_1 est le vecteur associé à λ = 0, alors les coordonnées de *S* dans le système (*x*,*y*) sont :

$$S_{xy} = h.v_1 + k.v_2 \quad \text{si} \quad X \text{ est l'axe principal}$$
$$S_{xy} = k.v_1 + h.v_2 \quad \text{si} \quad Y \text{ est l'axe principal}$$

Pour la parabole $x^2-2xy+y^2+4\sqrt{2}x=4$, on a montré au § 5.4 Chap 1 que son équation réduite était : $(Y-1)^2=-2\left(X-\frac{3}{2}\right)$, donc le sommet dans ($X$,$Y$) a pour coordonnées $S_{XY}=\left(\frac{3}{2},1\right)$, donc :

$$S_{xy}=h.v_1+k.v_2=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0.354\\1.768\end{pmatrix}$$

Equations des axes

Méthode 1

Si v_1 est le vecteur associé à $\lambda = 0$:

Axe principal :	$x_p=S_{xy}+k.v_1$
Axe secondaire :	$x_s=S_{xy}+k.v_2$

Où k est un paramètre réel.

Pour la parabole $x^2-2xy+y^2+4\sqrt{2}x=4$, on a déterminé au paragraphe précédent que le sommet avait pour coordonnées $S_{xy}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, donc

$$\text{Axe principal : } x_p=S_{xy}+kv_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow x-\frac{\sqrt{2}}{4}=y-\frac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=x+\sqrt{2}$$

$$\text{Axe secondaire : } x_p=S_{xy}+kv_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow -x+\frac{\sqrt{2}}{4}=y-\frac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=-x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Méthode 2

On peut montrer que l'équation de l'axe principal est donnée par :

$$\boxed{P_x'+\frac{A}{B}P_y'=0 \quad \text{ou} \quad P_x'+\frac{B}{C}P_y'=0}$$

L'avantage de cette formule est qu'elle part directement de l'équation générale de la parabole. Une fois l'axe connu, il est facile de déterminer le sommet.

Pour la parabole $x^2-2xy+y^2+4\sqrt{2}x=4$, on a

$$\begin{cases}P_x'=2x-2y+4\sqrt{2}\\P_y'=-2x+2y\\A/B=-1\end{cases}\Rightarrow\left(2x-2y+4\sqrt{2}\right)-\left(-2x+2y\right)=0\Rightarrow y=x+\sqrt{2}$$

Pour obtenir le sommet :

$$\begin{cases}x^2-2xy+y^2+4\sqrt{2}x=4\\y=x+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow x^2-2x\left(x+\sqrt{2}\right)+\left(x+\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{2}x-4=0\Rightarrow 4\sqrt{2}x-2=0$$

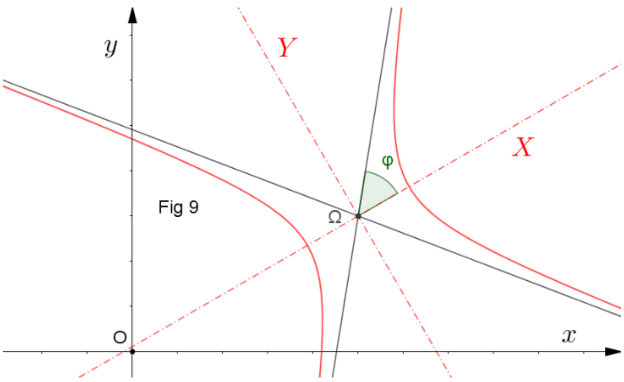
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow S_{xy}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

§ 3 – Directions asymptotiques d’une hyperbole

Nous nous proposons de calculer les pentes des asymptotes d’une hyperbole définie par une équation générale

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

dans le système d’axes $\left(\overrightarrow{\Omega X},\overrightarrow{\Omega Y}\right)$ où son équation est élémentaire (Fig. 9).



En désignant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique $q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, on sait que l’équation élémentaire de la conique est de la forme (Chapitre I, § 7-2) :

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=F'$$

où l’on supposera que la constante ***F’* est positive** ; le cas où *F’* est négatif, comme on pourra le voir, conduit aux mêmes résultats que ceux en cours.

§ 3-1 – Cas où $\lambda_1>0$ et $\lambda_2<0$: hyperbole de type I

On peut alors écrire $\lambda_1X^2-\left(-\lambda_2Y^2\right)=F'$ et $\dfrac{\lambda_1}{F'}X^2-\dfrac{-\lambda_2}{F'}Y^2=1$,

par suite $\boxed{\dfrac{X^2}{\left(\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}-\dfrac{Y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{-\lambda_2}}\right)^2}=1}$.

D’après le Chapitre I, § 2-2, on a donc

$$\tan\varphi=\pm\frac{\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{-\lambda_2}}}{\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{\lambda_1}}}=\pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\ .$$

§ 3-2 – Cas où $\lambda_1<0$ et $\lambda_2>0$: hyperbole de type II

On peut aussi écrire $-\dfrac{-\lambda_1}{F'}X^2+\dfrac{\lambda_2}{F'}Y^2=1$,

par suite $\boxed{-\dfrac{X^2}{\left(\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{-\lambda_1}}\right)^2}+\dfrac{Y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=1}$.

D'après le chapitre I, § 2-2, on a donc $\tan\varphi = \pm\dfrac{\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{\lambda_2}}}{\dfrac{\sqrt{F'}}{\sqrt{-\lambda_1}}} = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}$.

§ 3-3 – Formule de la pente des directions asymptotiques

Cependant, sans avoir à calculer les valeurs propres de la matrice de la forme quadratique de la conique, on pourra, comme nous allons le voir, déterminer les directions asymptotiques.
En effet, commençons par examiner le cas où $\tan\varphi = \pm 1$. On aura alors, d'après les § 3-1 et § 3-2, $-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$, c'est-à-dire que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ou encore que $A+C = 0$ (cf. Chapitre I, § 4-2, formule (8)). Et dans ce cas on a $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$; l'hyperbole est dite **équilatère**.

Supposons maintenant $A+C \neq 0$ et pour déterminer φ en fonction des coefficients de la conique initiale, écrivons que

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \pm\frac{2\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{1-\left(-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} = \pm\frac{2\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2}} = \pm\frac{2\lambda_2\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{\lambda_1+\lambda_2} = \pm\frac{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2} = \pm 2\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A+C}$$

D'où la formule
$$\boxed{\tan(2\varphi) = \pm 2\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A+C}} \qquad (8)$$

Ainsi, avec les formules (3), (6) et (8) du chapitre en cours, l'on pourra déterminer directement, à partir des coefficients de la conique, le centre, les axes et les asymptotes de l'hyperbole.
À titre de vérification de la formule (8), au chapitre I, § 6, nous avons résolu la conique d'équation : $x^2 + 8xy + 7y^2 + 18\sqrt{5}x = 324$.

On a alors : $\tan 2\varphi = \pm 2\dfrac{\sqrt{16-7}}{8} = \pm\dfrac{3}{4} = \pm 0.75$

Par exemple, pour la valeur tg2φ = – 0,75, on trouve que 2φ = 143 degrés, et φ = 71,5 degrés ; ceci est vérifiable sur le graphique (Chapitre I, § 6-5, fig. 6) au demi-degré près.

§ 4 – Prémisses de l'équation aux directions asymptotiques

Nous démontrerons ici le théorème de l'intersection hyperbolique :
Pour qu'une droite soit parallèle à l'une des deux asymptotes d'une hyperbole il faut et il suffit qu'elle la coupe en un seul point sans lui être tangente en ce point.
La condition nécessaire de ce théorème nous servira au paragraphe suivant à établir l'équation aux directions asymptotiques, qui permet de calculer les pentes des deux asymptotes d'une hyperbole dans un système d'axes quelconque.

§ 4-1 – Condition analytique pour qu'une droite coupe une hyperbole

D'après le § 7-2, chapitre I, l'équation de l'hyperbole peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F \ ,$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique

$$q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 ,$$

lorsque cette hyperbole a pour équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0 \ ,$$

et où l'équation réduite est donnée dans un système d'axes $\left(\overrightarrow{IX}, \overrightarrow{IY}\right)$ déterminé. Nous écrirons, tout au long de ce paragraphe, toutes les équations dans ce système d'axes.

Nous allons montrer que **l'hyperbole d'équation** $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$ **et une droite d'équation** $Y = aX + b$ **ont au moins un point commun si, et seulement si, il existe un nombre** X_0 **tel que** :

$$\left(\lambda_1 + \lambda_2 a^2\right) X_0^2 + 2ab\lambda_2 X_0 - \left(F - \lambda_2 b^2\right) = 0 \qquad (9)$$

§ 4-1-1 – Condition nécessaire

Si la droite et l'hyperbole ont au moins un point commun, que nous désignons par (X_0, Y_0), alors l'on a les deux relations suivantes

$$\lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 Y_0^2 = F \quad \text{et} \quad Y_0 = aX_0 + b$$

D'où
$$\lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 \left(aX_0 + b\right)^2 = F \quad ,$$

ou encore
$$\lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 \left(a^2 X_0^2 + 2abX_0 + b^2\right) = F \quad ,$$

d'où
$$\left(\lambda_1 + \lambda_2 a^2\right) X_0^2 + 2ab\lambda_2 X_0 - \left(F - \lambda_2 b^2\right) = 0 \ .$$

Ce qui montre que la condition (9) est satisfaite.

§ 4-1-2 – Condition suffisante

Soit un nombre X_0 tel que la relation (9) soit satisfaite. En posant $Y_0 = aX_0 + b$, montrons que

$$\lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 Y_0^2 = F \ .$$

En lisant les trois dernières égalités du sous-paragraphe précédent, de bas en haut, on obtient

$$\lambda_1 X_0^2 + \lambda_2 \left(aX_0 + b\right)^2 = F \ .$$

Par conséquent le point (X_0, Y_0) appartient à l'hyperbole et à la droite.

§ 4-2 – Condition nécessaire du théorème de l'intersection hyperbolique

Nous allons démontrer la condition nécessaire du théorème comme une conséquence de la propriété plus forte suivante :

Une droite qui est parallèle à l'une des deux asymptotes de l'hyperbole la coupe en un seul point et n'est pas une de ses tangentes.

On sait, en effet, que les asymptotes de l'hyperbole sont les droites d'équation (cf. § 3) :

$$Y = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} X \quad \text{et} \quad Y = -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} X \ .$$

D'après l'hypothèse, la droite $Y = aX + b$ est parallèle à l'une des deux asymptotes, on a donc

$$a = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \text{et} \quad b \neq 0 \ .$$

Par conséquent $$a^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 a^2 = 0 \ .$$

En choisissant le nombre X_0 tel que $2ab\lambda_2 X_0 - (F - \lambda_2 b^2) = 0$, ce qui est possible, puisque $b \neq 0$, la condition (9), § 4-1, sera alors satisfaite. D'après le § 4-1-2, le point (X_0, Y_0), où $Y_0 = aX_0 + b$, est un point commun à la droite et à l'hyperbole. Ce point de rencontre est unique car si (X_0', Y_0') en est un, alors, d'après la condition (9), § 4-1, on a : $2ab\lambda_2 X_0^{'} - (F - \lambda_2 b^2) = 0$, ce qui implique que $X_0 = X_0$'. Et comme $Y_0^{'} = aX_0^{'} + b$ on obtient Y_0' = Y_0..

Il nous reste à prouver que cette droite n'est pas tangente à l'hyperbole en chacun de ses points. Pour cela considérons l'équation de l'hyperbole

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$$

et l'ordonnée Y de chacun de ses points (X, Y) comme une fonction de X. De sorte, qu'en dérivant cette équation par rapport à la variable X, on obtient

$$2\lambda_1 X + 2\lambda_2 Y Y_X^{'} = 0 \ ;$$

par suite $$Y_X^{'} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{X}{Y} \qquad (10)$$

Et, comme la droite $Y = aX + b$ est parallèle à l'une des deux asymptotes, on sait que $a = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. Ainsi si cette droite était tangente à l'hyperbole en un point (X, Y) on aurait $Y_X^{'} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{X}{Y} = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$; et, en élevant au carré les deux membres de l'égalité précédente, on aurait $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\frac{X^2}{Y^2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; par suite $\frac{X^2}{Y^2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; et $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$. Par conséquent $F = 0$; ce qui est absurde.

En particulier, la droite d'équation $Y = aX + b$ n'est pas tangente à l'hyperbole au point où elle la coupe, ce qui achève la démonstration de la condition nécessaire du théorème :

Une droite parallèle à l'une des deux asymptotes d'une hyperbole la coupe en un seul point sans lui être tangente en ce point.

§ 4-3 – Condition suffisante du théorème de l'intersection hyperbolique

Nous allons démontrer la condition suffisante du théorème de l'intersection hyperbolique comme une conséquence de la propriété plus forte suivante :

Une droite qui coupe l'hyperbole en un seul point est ou bien parallèle à l'une de ses deux asymptotes ou bien sa tangente en ce point.

Supposons que la droite d'équation $Y = aX + b$, où $b \neq 0$, coupe l'hyperbole d'équation $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$ au seul point (X_0, Y_0). D'après la relation (9), § 4-1, l'équation

$$\left(\lambda_1 + \lambda_2 a^2\right) X_0^2 + 2ab\lambda_2 X_0 - \left(F - \lambda_2 b^2\right) = 0 .$$

admet une et une seule racine.

Par conséquent on a deux cas possibles :

1) **Le coefficient de X_0^2 est nul** ; et alors $a = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}$; ce qui revient à dire que la droite $Y = aX + b$ a même pente que l'une des deux asymptotes, et comme $b \neq 0$, elle lui est parallèle.

2) **Le coefficient de X_0^2 n'est pas nul** ; et alors la droite $Y = aX + b$ est tangente à l'hyperbole au point (X_0, Y_0).
En effet, l'équation du second degré en X_0 considérée a une racine double qui est donc

$$X_0 = -\frac{ab\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 a^2} .$$

Comme $Y = aX + b$, on obtient

$$X_0 = -\frac{a^2 b\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 a^2} + b .$$

Donc

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{\dfrac{-ab\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 a^2}}{\dfrac{-a^2 b\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 a^2} + b} = \frac{-ab\lambda_2}{-a^2 b\lambda_2 + b\left(\lambda_1 + \lambda_2 a^2\right)} = \frac{-ab\lambda_2}{b\lambda_1} = -a\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

D'après la relation (10), § 4-2, on a donc

$$Y'_{X_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{X_0}{Y_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2 a}{\lambda_1}\right) = a .$$

Ainsi la droite $Y = aX + b$ est tangente à l'hyperbole au point (X_0, Y_0). D'où la condition suffisante du théorème de l'intersection hyperbolique :

Une droite qui coupe une hyperbole en un seul point, sans lui être tangente en ce point, est parallèle à l'une de ses deux asymptotes.

§ 5 – Équation aux directions asymptotiques

Soit une hyperbole d'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où l'on suppose $C \neq 0$.

L'équation aux directions asymptotiques de cette hyperbole est l'équation du second degré en t

$$\boxed{Ct^2 + 2Bt + A = 0} .$$

Les racines de cette équation sont :

$$\boxed{t_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{C} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{C}} \qquad (11)$$

Nous allons montrer que **les pentes respectives des deux asymptotes de l'hyperbole sont précisément les racines de son équation aux directions asymptotiques**.

§ 5-1 – Changement du système d'axes

Le fait que les pentes des asymptotes soient t_1 et t_2 (cf. formule (11)) sera démontré pour un système d'axes arbitraire. Mais pour simplifier la démonstration nous choisirons le système d'axes ayant pour origine le centre de symétrie de l'hyperbole, parallèles et de même sens que les axes initiaux (cf. chapitre II, § 1).
De sorte que l'équation de l'hyperbole, par rapport aux nouveaux axes, est de la forme

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + K = 0$$

où, nous le rappelons, les coefficients *A*, *B,* et *C* de l'équation initiale sont invariants.

§ 5-2 – Droite coupant l'hyperbole

Soit une droite définie par l'équation $Y = tX + b$.
Étudions le système

$$(S) = \begin{cases} AX^2 + 2BXY + CY^2 + K = 0 \\ Y = tX + b \end{cases}$$

Si le système (S) admet une solution alors l'on aura

$$AX^2 + 2BX(tX+b) + C(tX+b)^2 + K = 0,$$

soit encore

$$AX^2 + 2BX(tX+b) + C(t^2X^2 + 2tbX + b) + K = 0 .$$

Écrivons la dernière expression sous la forme d'un trinôme en *X*. On obtient :

$$(Ct^2 + 2Bt + A)X^2 + 2b(B + tC)X + (Cb^2 + K) = 0 \qquad (12).$$

Par conséquent la droite et l'hyperbole se coupent si l'équation (12) admet au moins une racine.

§ 5-3 – Droite parallèle à l'une des deux asymptotes

Choisissons t comme l'une des deux pentes des asymptotes de l'hyperbole, évaluées dans les nouveaux axes, et que nous désignons par p_1 et p_2. Soit par exemple $t = p_1$ et montrons que est une racine de l'équation aux directions asymptotiques $Ct^2 + 2Bt + A = 0$. Pour cela considérons une droite d'équation $Y = tX + b$ où $b \neq 0$ et **sera précisé ultérieurement**. Comme cette droite a même pente que l'asymptote de pente p_1, et que les deux asymptotes passent par l'origine des nouveaux axes, et qu'enfin $b \neq 0$, la droite $Y = tX + b$ est donc parallèle à l'asymptote de pente p_1. D'après le § 4-2, **cette droite coupe l'hyperbole en un seul point.**

Ainsi l'équation (12), § 5-2, admet une et une seule racine. Nous avons alors deux cas :

1. $Ct^2 + 2Bt + A = 0$ et alors *t* est racine de l'équation aux directions asymptotiques ;
2. $Ct^2 + 2Bt + A \neq 0$ et alors le discriminant réduit Δ' de l'équation (12) est nul puisqu'elle n'admet qu'une seule racine.

Ainsi $\qquad \Delta' = [b(B+tC)]^2 - (Ct^2+2Bt+A)(Cb^2+K) = 0$.

Écrivons alors la dernière relation sous la forme d'un trinôme en la variable b ; on a :

$$\Delta' = \left[(B+tC)^2 - C(Ct^2+2Bt+A)\right]b^2 - K(Ct^2+2Bt+A) = 0 \ .$$

Et montrons que l'on peut choisir b de telle sorte que la dernière relation ne soit pas satisfaite.

Si le coefficient de b^2 est nul alors on aura $K(Ct^2+2Bt+A)=0$. Or $K \neq 0$, sinon l'hyperbole passerait par le point de rencontre de ses asymptotes, ce qui est absurde.

Donc $Ct^2+2Bt+A=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si le coefficient de b^2 est non nul, il suffit de choisir b de telle sorte que

$$b^2 \neq \frac{K(Ct^2+2Bt+A)}{(B+tC)^2 - C(Ct^2+2Bt+A)}$$

et l'on aura à nouveau une contradiction.

Donc nécessairement

$$Ct^2+2Bt+A=0 \ ,$$

autrement dit, que la valeur $t = p_1$ est une racine de l'équation aux directions asymptotiques.

On montre de même que, pour $t = p_2$, on a aussi une racine de cette dernière équation.

§ 5-4 – Justification de l'équation aux directions asymptotiques

Comme les nouveaux axes sont parallèles et de même sens que les axes d'origine, où l'équation de l'hyperbole est

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \ ,$$

on voit donc que les pentes respectives des deux asymptotes, évaluées dans les axes d'origine, sont les racines du trinôme

$$\boxed{Ct^2+2Bt+A=0} \ .$$

À titre de vérification de l'équation aux directions asymptotiques, considérons une hyperbole d'équation réduite

$$\lambda_2 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F \ .$$

Dans le système d'axes associé, on sait que les pentes des asymptotes sont (cf. § 3-1 et § 3-2) :

$$\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \ .$$

Or, dans ce système d'axes, on a $A=\lambda_1, B=0, C=\lambda_2$.

La formule (11), § 5, nous donne alors :

$$t_1 = \frac{\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_2} = \sqrt{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2}} = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_2} = -\sqrt{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2}} = -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \ .$$

Ce qui constitue une belle vérification de l'équation aux directions asymptotiques.

Une autre vérification de cette équation se fait en considérant l'hyperbole d'équation élémentaire

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a,b \neq 0 \ .$$

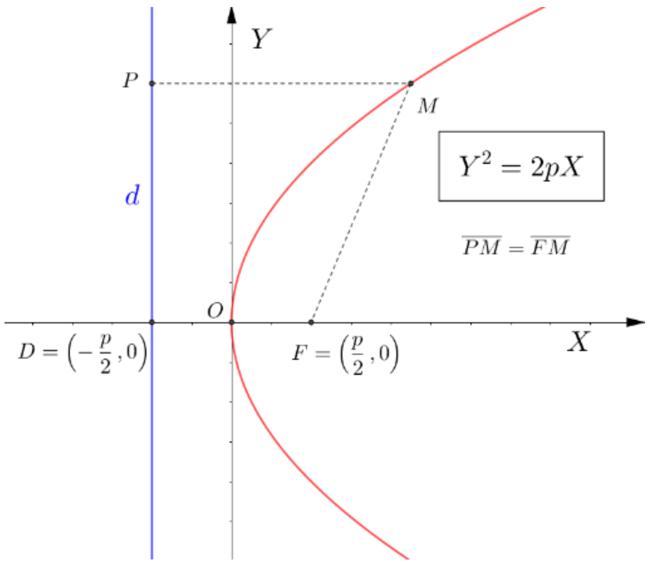
Au premier cas on a $\qquad A = \frac{1}{a^2}, B=0, C=-\frac{1}{b^2}$.

Donc $$t_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}}}{-\frac{1}{b^2}} = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-\sqrt{\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}}}{-\frac{1}{b^2}} = \frac{b}{a} \quad .$$

Au second cas on a les mêmes résultats. Ceci est confirmé au § 2-2, chapitre I.

§6 - Foyers, directrices et sommets

§6.1 Parabole sous forme réduite



Sous forme réduite la parabole ayant son sommet à l'origine a pour équation :

$$Y^2 = 2pX$$

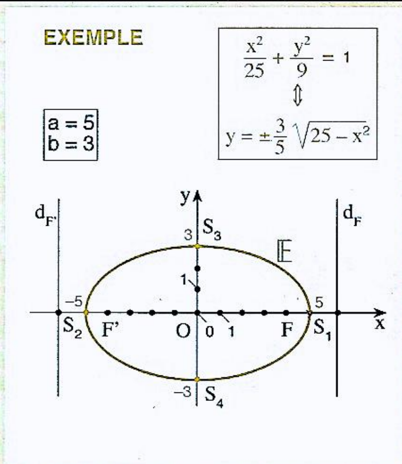
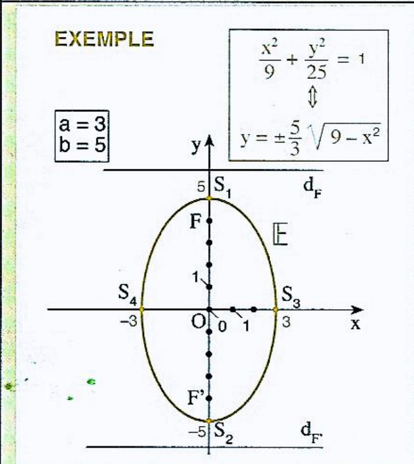
Et si elle a son sommet en $S = (S_X, S_Y)$

$$(Y - S_Y)^2 = 2p(X - S_X)$$

On en déduit alors que la distance $\overline{OF} = \overline{OD} = \dfrac{p}{2}$

§6.2 Ellipse sous forme réduite

1 Dans un repère orthonormé du plan, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une *équation réduite* de l' ELLIPSE dont les caractéristiques sont les suivantes :

	si $a > b$	si $a < b$ [1]
Centre	le point $O(0;0)$	le point $O(0;0)$
Axe focal	l'axe des x	l'axe des y
«Grand axe»	2a	2b
Axe non focal	l'axe des y	l'axe des x
«Petit axe»	2b	2a
Distance focale	2c tel que $c=\sqrt{a^2-b^2}$	2c tel que $c=\sqrt{b^2-a^2}$
Foyers	$F(c;0)$ et $F'(-c;0)$	$F(0;c)$ et $F'(0;-c)$
Directrices associées	$d_F \equiv x=\frac{a^2}{c}$ $d_{F'} \equiv x=-\frac{a^2}{c}$	$d_F \equiv y=\frac{b^2}{c}$ $d_{F'} \equiv y=-\frac{b^2}{c}$
Sommets	$S_1(a;0)$, $S_2(-a;0)$, $S_3(0;b)$, $S_4(0;-b)$	$S_1(0;b)$, $S_2(0;-b)$, $S_3(a;0)$, $S_4(-a;0)$
Excentricité	$0<\epsilon=\frac{c}{a}<1$	$0<\epsilon=\frac{c}{b}<1$
Représentation graphique		

Autres formules

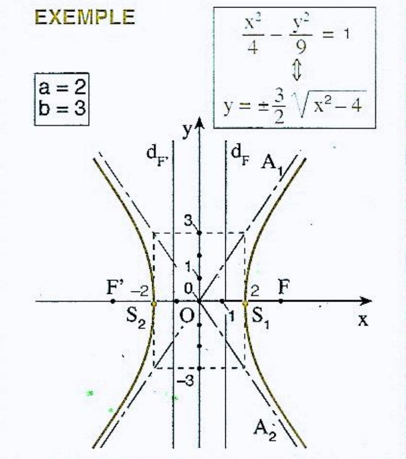
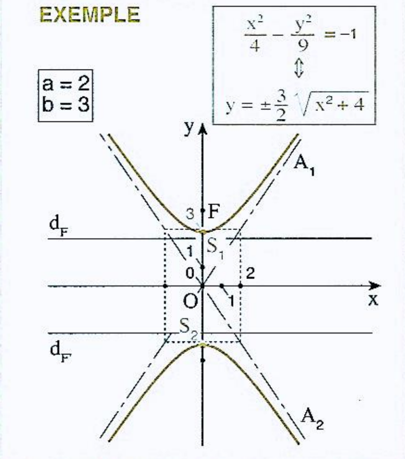
Connaissant *a* et *b*, on a :

Exentricité : $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, Distance focale : $c=a.e$, Distance du pied des directrices : $d=\frac{a}{e}$

§6.3 Hyperbole sous forme réduite

2 Dans un repère orthonormé du plan, des **équations réduites** de l' HYPERBOLE sont

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

	si $a > b$	si $a < b$ (1)
Centre	le point $O(0;0)$	le point $O(0;0)$
Axe focal	l'axe des x	l'axe des y
Axe non focal	l'axe des y	l'axe des x
Distance focale	$2c$ tel que $c = \sqrt{a^2+b^2}$	$2c$ tel que $c = \sqrt{a^2+b^2}$
Foyers	$F(c;0)$ et $F'(-c;0)$	$F(0;c)$ et $F'(0;-c)$
Directrices associées	$d_F \equiv x = \frac{a^2}{c}$ $d_{F'} \equiv x = -\frac{a^2}{c}$	$d_F \equiv y = \frac{b^2}{c}$ $d_{F'} \equiv y = -\frac{b^2}{c}$
Sommets	$S_1(a;0)$, $S_2(-a;0)$	$S_1(0;b)$, $S_2(0;-b)$
Asymptotes	$A_1 \equiv y = \frac{b}{a}x$ $A_2 \equiv y = -\frac{b}{a}x$	$A_1 \equiv y = \frac{b}{a}x$ $A_2 \equiv y = -\frac{b}{a}x$
Excentricité	$\epsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\epsilon = \frac{c}{b} > 1$
Représentation graphique		

Connaissant a et b, on a :

Type I :Exentricité : $e = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, Distance focale : $c = a.e$, Distance du pied des directrices : $d = \frac{a^2}{e}$

Type II : Exentricité : $e = \sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$, Distance focale : $c = b.e$, Distance du pied des directrices : $d = \frac{b^2}{e}$

Par exemple, reprenons l'hyperbole $-\frac{(X-18)^2}{3^2}+\frac{(Y+1)^2}{1^2}=1$. On immédiatement

$a=3, b=1, c=\sqrt{10}$, Foyers : $F\left(0,\sqrt{10}\right), F'\left(0,-\sqrt{10}\right)$, Sommets : $S_1\left(0,1\right), S_2\left(0,-1\right)$

Directrices : $d_F \equiv Y=\frac{1}{\sqrt{10}}, d_{F'} \equiv Y=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, Assymptotes : $A_1 \equiv Y=\frac{X}{3}, A_2 \equiv Y=-\frac{X}{3}$

Exentricité : $e=\sqrt{10}$

§6.4 Parabole sous forme générale.

Si $\lambda_1=0$ et $\lambda_2 \neq 0$, alors, dans le repère (*X*,*Y*), la parabole peut se mettre sous la forme

$$\lambda_2 Y^2 + D'X + E'Y + F = 0 \qquad (6.6\text{-}1)$$

Avec

$$\left(D' \quad E'\right)=M_L.Q \qquad , \quad M_{l2}=\left(D \quad E\right), \quad Q=\left(v_1,v_2\right)$$

L'équation (6.6-1) peut facilement se mettre sous la forme :

$$\left(Y-S_Y\right)^2=2p\left(X-S_X\right)$$

On en déduit

Sommet $\begin{cases}\left(S_X,S_Y\right) \text{ dans le repère } \left(X,Y\right) \\ \left(S_x,S_y\right) \text{dans la repère } \left(x,y\right), \text{ avec } \begin{pmatrix}S_x \\ S_y\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}S_X \\ S_Y\end{pmatrix}\end{cases}$

Foyer $F=S+\frac{p}{2}v_1$

Equation des axes $\begin{cases}AP \equiv \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=S+kv_1 \\ AS \equiv \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=S+kv_2\end{cases}$

Pied de la directrice $D=S-\frac{p}{2}v_1$

Equation de la directrice $d \equiv \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=D+kv_2$

§6.5 Ellipse sous forme générale.

On sait qu'une ellipse centrée à l'origine peut se réduire, dans le repère (*X*,*Y*), sous la forme :

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2=-F' \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\text{soit : } \lambda_1>0, \lambda_2>0 \text{ et } F'=P(\Omega)<0 \\ \text{soit : } \lambda_1<0, \lambda_2<0 \text{ et } F'=P(\Omega)>0\end{cases}$$

Ou encore :

$$\boxed{\frac{X^2}{\left(\sqrt{-\frac{F'}{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{-\frac{F'}{\lambda_2}}\right)^2}=1}$$

On déduit alors facilement :

Centre : $\Omega=-\frac{1}{2}M_L.M_Q^{-1}$

Demi-axes : $a=\sqrt{-\frac{F'}{\lambda_1}}$ et $b=\sqrt{-\frac{F'}{\lambda_2}}$ avec $a>b$ car $\lambda_1<\lambda_2$

Excentricité : $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ou $e=\frac{c}{a}$

Distance focale : $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ou $c=a.e$

Foyers : $F_1=\Omega+c.v_1$ et $F_2=\Omega-c.v_1$

Equations des axes : $\begin{cases} AP\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_1 \\ AS\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_2 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$

Sommets : $S_1,S_2=\Omega\pm a.v_1$ $S_3,S_4=\Omega\pm a.v_2$

Distance des directrices : $d=\frac{a}{e}$ ou $d=\frac{a^2}{c}$

Pieds des directrices : $D_1=\Omega+d.v_2$ et $D_2=\Omega-d.v_2$

Equation des directrices : $\begin{cases} d_1\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=D_1+kv_2 \\ d_2\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=D_2+kv_2 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$

§6.6 Hyperbole sous forme générale

On sait qu'une hyperbole centrée à l'origine, dans le repère (*X*,*Y*), peut s'écrire sous forme réduite :

Type I $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=-F'$ Avec $\lambda_1>0, \lambda_2<0$ et $F'=P(\Omega)<0$

Type II $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=-F'$ Avec $\lambda_1<0, \lambda_2>0$ et $F'=P(\Omega)<0$

Si *F'* n'est pas négatif, on multiplie par –1 et donc les types s'inversent.
Ou encore

Type I :	$\dfrac{X^2}{\left(\sqrt{-\dfrac{F'}{\lambda_1}}\right)^2}-\dfrac{Y^2}{\left(\sqrt{-\dfrac{F'}{-\lambda_2}}\right)^2}=1$
Type II :	$-\dfrac{X^2}{\left(\sqrt{-\dfrac{F'}{-\lambda_1}}\right)^2}+\dfrac{Y^2}{\left(\sqrt{-\dfrac{F'}{-\lambda_2}}\right)^2}=1$

Centre : $\Omega=-\dfrac{1}{2}M_L.M_Q^{-1}$

Demi-axes :

Type 1: $a=\sqrt{-\dfrac{F'}{\lambda_1}}$ et $b=\sqrt{-\dfrac{F'}{-\lambda_2}}$

Type 2 : $a=\sqrt{-\dfrac{F'}{-\lambda_1}}$ et $b=\sqrt{-\dfrac{F'}{\lambda_2}}$

Les formules suivantes sont données pour le type I. Pour le type II, il suivit de remplacer *a* par *b* (et réciproquement), ainsi que v_1 par v_2 (et réciproquement).

Excentricité : $e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ ou $e=\dfrac{c}{a}$

Distance focale : $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ou $c=a.e$

Foyers : $F_1=\Omega+c.v_1$ et $F_2=\Omega-c.v_1$

Equations des axes : $\begin{cases} AP\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_1 \\ AS\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_2 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$

Sommets : $S_1,S_2=\Omega\pm a.v_1$

Asymptotes

Equation aux directions $Ct^2+2Bt+1=0$

Asymptotes $\begin{cases} AS_1\equiv y-\Omega_y=t_1(x-\Omega_x) \\ AS_2\equiv y-\Omega_y=t_2(x-\Omega_x) \end{cases}$

Directrices

Distance des directrices : $d=\dfrac{a}{e}$ ou $d=\dfrac{a^2}{c}$

Pieds des directrices : $D_1=\Omega+d.v_1$ et $D_2=\Omega-d.v_1$

Equation des directrices : $d_1=\Omega+k.v_1$ et $d_2=\Omega-k.v_1$ $\quad k\in\mathbb{R}$

§7 - Exemples

§7.1 Ellipse (Fig11)

Etudier la conique : $3x^2-2xy+3y^2+12x-4y-8=0$

$$M_Q=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\qquad M_L=\begin{pmatrix}12&-4\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=2\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_2=4\Rightarrow v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Centre : $\Omega=-\frac{1}{2}M_L.M_Q^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\end{pmatrix}$

$$\text{ou}\begin{cases}P_x^{'}=0\\P_y^{'}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-2y=-12\\-2x+6y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$$

$$F'=P(\Omega)=3\times(-2)^2-0+0+12\times(-2)-0-8=-20$$

Equation réduite : $2X^2+4Y^2=20\Rightarrow X^2+2Y^2=20\quad\Rightarrow\frac{X^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$

$$\Rightarrow a=\sqrt{10},\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{10-5}=\sqrt{5},\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Foyers : $\begin{cases}F_1=\Omega+c.v_1=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\sqrt{5/2}\\\sqrt{5/2}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-0.4189\\1.5811\end{pmatrix}\\F_2=\Omega-c.v_1=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-\sqrt{5/2}\\-\sqrt{5/2}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-3.5811\\1.5811\end{pmatrix}\end{cases}$

Axes : $\begin{cases}AP\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_1=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow AP\equiv y=x+2\\AS\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_2=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow AS\equiv y=-x-2\end{cases}$

$$\begin{cases} S_1 = \Omega + av_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2360 \\ 2.2360 \end{pmatrix} \\ S_2 = \Omega - av_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.2360 \\ -2.2360 \end{pmatrix} \\ S_3 = \Omega + av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{5/2} \\ \sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.581 \\ 1.5811 \end{pmatrix} \\ S_4 = \Omega - av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{5/2} \\ -\sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4189 \\ -1.5811 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Directrices

Distance à Ω : $d = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ ou $d = \dfrac{a}{e} = \dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{5}$

Pieds : $\begin{cases} D_1 = \Omega + d.v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1623 \\ 3.1623 \end{pmatrix} \\ D_1 = \Omega - d.v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2\sqrt{5/2} \\ -2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1623 \\ -3.1623 \end{pmatrix} \end{cases}$

Equations :

$$\begin{cases} d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1 + kv_2 = \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 \equiv y = -x - 2 + 4\sqrt{5/2} = -x + 4.325 \\ d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1 - kv_2 = \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 \equiv y = -x - 2 - 4\sqrt{5/2} = -x - 8.325 \end{cases}$$

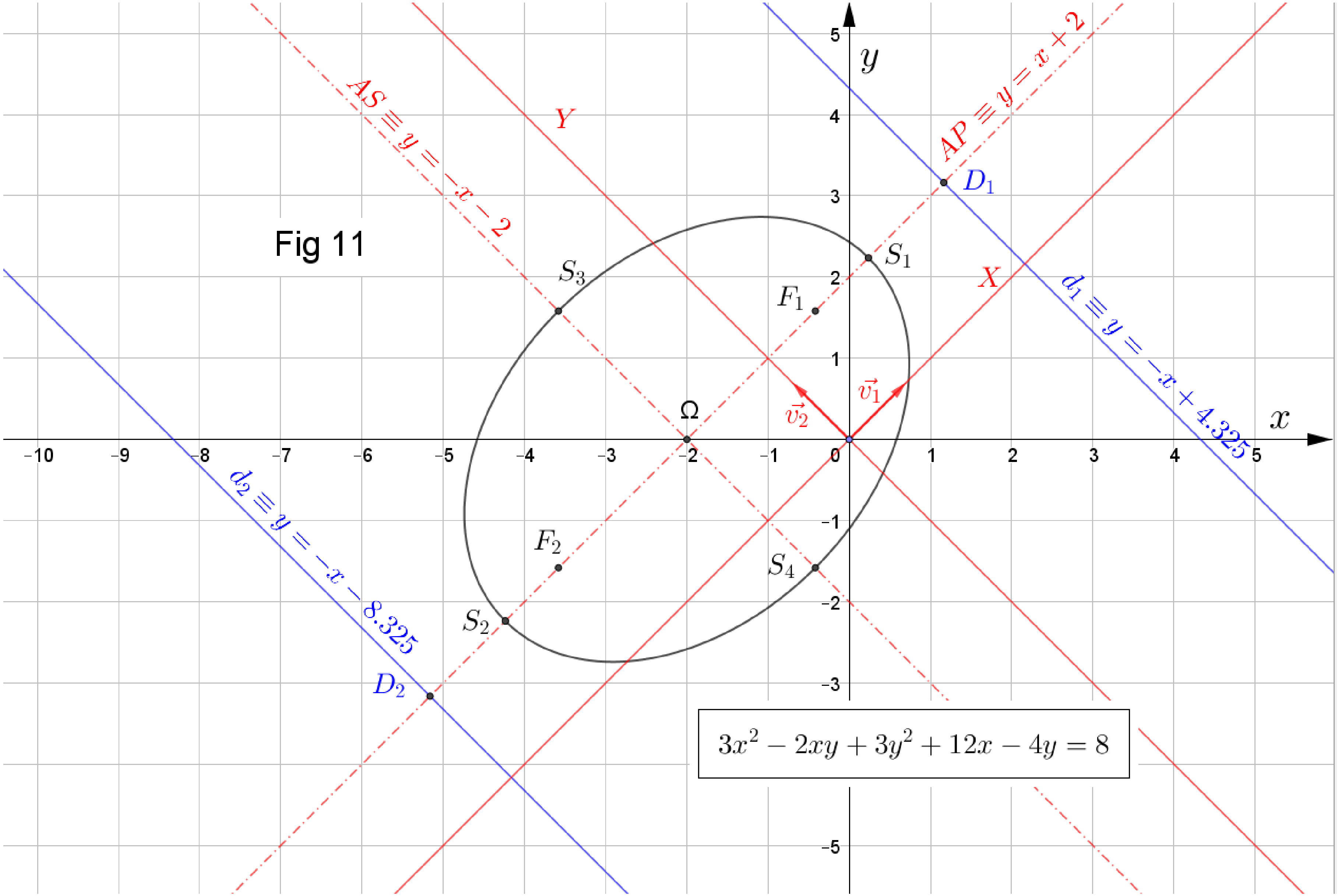


Fig 11
$AS \equiv y = -x - 2$
$AP \equiv y = x + 2$
Y
X
D_1
D_2
$d_1 \equiv y = -x + 4.325$
$d_2 \equiv y = -x - 8.325$
S_1
S_2
S_3
S_4
F_1
F_2
Ω
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
x
y
$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 12x - 4y = 8$

§7.2 Hyperbole

§7.2.1 Hyperbole de type I (Fig 12)

Etudier la conique : $x^2+4xy-2y^2+3x+18y-15=0$

$$M_Q=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} M_L=\begin{pmatrix}3 & 18\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=2\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_2=-3\Rightarrow v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{Centre : }\Omega=-\frac{1}{2}M_L.M_Q^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12 & -4\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{ou }\begin{cases}P_x^{'}=0\\ P_y^{'}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+4y=-3\\ 4x-4y=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7/2\\ y=1\end{cases}$$

$$F'=P(\Omega)=\left(-\frac{7}{2}\right)^2+4\times\left(-\frac{7}{2}\right)\times1-2\times1^2+3\times\left(-\frac{7}{2}\right)+18\times1-15=-\frac{45}{4}$$

$$\text{Equation réduite : }2X^2-3Y^2=\frac{45}{4}\quad\Rightarrow\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{45}{8}}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{45}{12}}\right)^2}=1\quad\text{Hyperbole type I}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{45}{8}}=\frac{3\sqrt{10}}{4},\ b=\sqrt{\frac{45}{12}}=\frac{\sqrt{15}}{2},\ c=\sqrt{\frac{45}{8}+\frac{45}{12}}=\frac{5\sqrt{6}}{4},\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Foyers : }\begin{cases}F_1=\Omega+c.v_1=\begin{pmatrix}-7/2\\1\end{pmatrix}+\frac{5\sqrt{6}}{4}\frac{}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7+\sqrt{30}}{2}\\ \frac{4+\sqrt{30}}{4}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-0.7614\\2.3693\end{pmatrix}\\[2ex] F_2=\Omega-c.v_1=\begin{pmatrix}-7/2\\1\end{pmatrix}-\frac{5\sqrt{6}}{4}\frac{}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7-\sqrt{30}}{2}\\ \frac{4-\sqrt{30}}{4}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-6.2386\\-0.3693\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\text{Axes : }\begin{cases}AP\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_1=\begin{pmatrix}-7/2\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow AP\equiv y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}\\[2ex] AS\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Omega+kv_2=\begin{pmatrix}-7/2\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow AS\equiv y=-2x-6\end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \Omega + av_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3\sqrt{10}}{4} . \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7+3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3787 \\ 2.0607 \end{pmatrix} \\ S_2 = \Omega - av_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3\sqrt{10}}{4} . \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{4-3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.6213 \\ -0.0607 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Asymptotes

Equation aux directions : $Ct^2 + 2Bt + 1 = 0 \Rightarrow -2t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 2.225,\ t_2 = -0.225$

$$\begin{cases} AS_1 \equiv y - \Omega_y = t_1 \left(x - \Omega_x \right) \Rightarrow AS_1 \equiv y = 2.225x + 8.787 \\ AS_2 \equiv y - \Omega_y = t_2 \left(x - \Omega_x \right) \Rightarrow AS_2 \equiv y = -0.225x + 0.213 \end{cases}$$

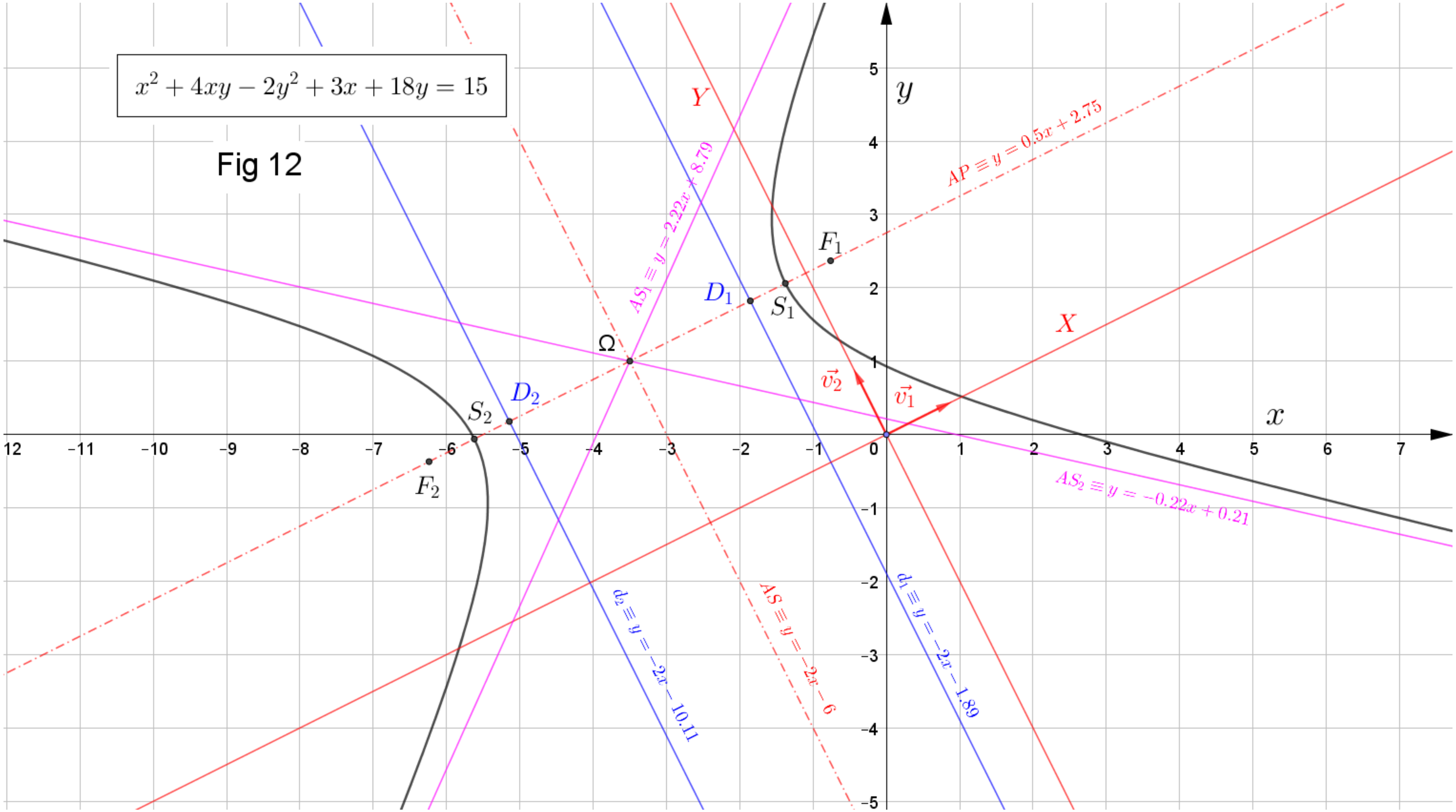
Directrices

Distance à Ω : $d = \frac{a^2}{c} = \frac{45/8}{5\sqrt{6}/4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

Pieds : $\begin{cases} D_1 = \Omega + d.v_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1623 \\ 3.1623 \end{pmatrix} \\ D_2 = \Omega - d.v_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2\sqrt{5/2} \\ -2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1623 \\ -3.1623 \end{pmatrix} \end{cases}$

Equations :

$$\begin{cases} d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1 + kv_2 = \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 \equiv y = -x - 2 + 4\sqrt{5/2} = -x + 4.325 \\ d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_2 - kv_2 = \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{5/2} \\ 2\sqrt{5/2} \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 \equiv y = -x - 2 - 4\sqrt{5/2} = -x - 8.325 \end{cases}$$



$x^2 + 4xy - 2y^2 + 3x + 18y = 15$
Fig 12
Y
y
x
X
$AP \equiv y = 0.5x + 2.75$
$AS_1 \equiv y = 2.22x + 8.79$
$AS_2 \equiv y = -0.22x + 0.21$
$AS \equiv y = -2x - 6$
$d_1 \equiv y = -2x - 1.89$
$d_2 \equiv y = -2x - 10.11$
F_1
F_2
S_1
S_2
D_1
D_2
Ω
$\vec{v_1}$
$\vec{v_2}$

§7.2.1 Hyperbole de type II (Fig 13)

Etudier la conique : $x^2+8xy+7y^2+7x+28y+1=0$

$$M_Q=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix} \quad M_L=\begin{pmatrix}7 & 28\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=-1\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}, \quad \lambda_2=9\Rightarrow v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

Centre : $\Omega=-\frac{1}{2}M_L.M_Q^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-7/2 & 0\end{pmatrix}$

$$F'=P(\Omega)=\left(-\frac{7}{2}\right)^2+7\times\left(-\frac{7}{2}\right)+1=-\frac{45}{4}$$

Equation réduite : $-X^2+9Y^2=\frac{45}{4} \quad \Rightarrow -\frac{X^2}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=1$ Hyperbole type I

$$\Rightarrow a=\frac{3\sqrt{5}}{2}, \; b=\frac{\sqrt{5}}{2}, \; c=\sqrt{\frac{45}{4}+\frac{5}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad e=\frac{c}{b}=\sqrt{10}$$

Foyers : $\begin{cases} F_1=\Omega+c.v_2=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7+\sqrt{10}}{2}\\ \sqrt{10}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-1.919\\ 3.162\end{pmatrix} \\ F_2=\Omega-c.v_2=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7-\sqrt{10}}{2}\\ -\sqrt{10}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-5.081\\ -3.162\end{pmatrix}\end{cases}$

Axes : $\begin{cases} AP\equiv\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\Omega+kv_2=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow AP\equiv y=2x+7 \\ AS\equiv\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\Omega+kv_1=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\Rightarrow AS\equiv y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\end{cases}$

$$\begin{cases} S_1=\Omega+bv_1=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix} \\ S_2=\Omega-bv_1=\begin{pmatrix}-7/2\\ 0\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Asymptotes

Equation aux directions : $Ct^2 + 2Bt + 1 = 0 \Rightarrow 7t^2 + 8t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = -\frac{1}{7}$

$$\begin{cases} AS_1 \equiv y - \Omega_y = t_1\left(x - \Omega_x\right) \Rightarrow AS_1 \equiv y = -x - \frac{7}{2} \\ AS_2 \equiv y - \Omega_y = t_2\left(x - \Omega_x\right) \Rightarrow AS_2 \equiv y = -\frac{1}{7}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Directrices

Distance à Ω : $d = \frac{b^2}{c} = \frac{5/4}{5\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Pieds : $\begin{cases} D_1 = \Omega + d.v_2 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.342 \\ 0.316 \end{pmatrix} \\ D_2 = \Omega - d.v_2 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.658 \\ -0.316 \end{pmatrix} \end{cases}$

Equations :

$$\begin{cases} d_1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1 + kv_1 = \begin{pmatrix} -3.342 \\ 0.316 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x - 1.35 \\ d_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_2 - kv_1 = \begin{pmatrix} -3.342 \\ 0.316 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x - 2.15 \end{cases}$$

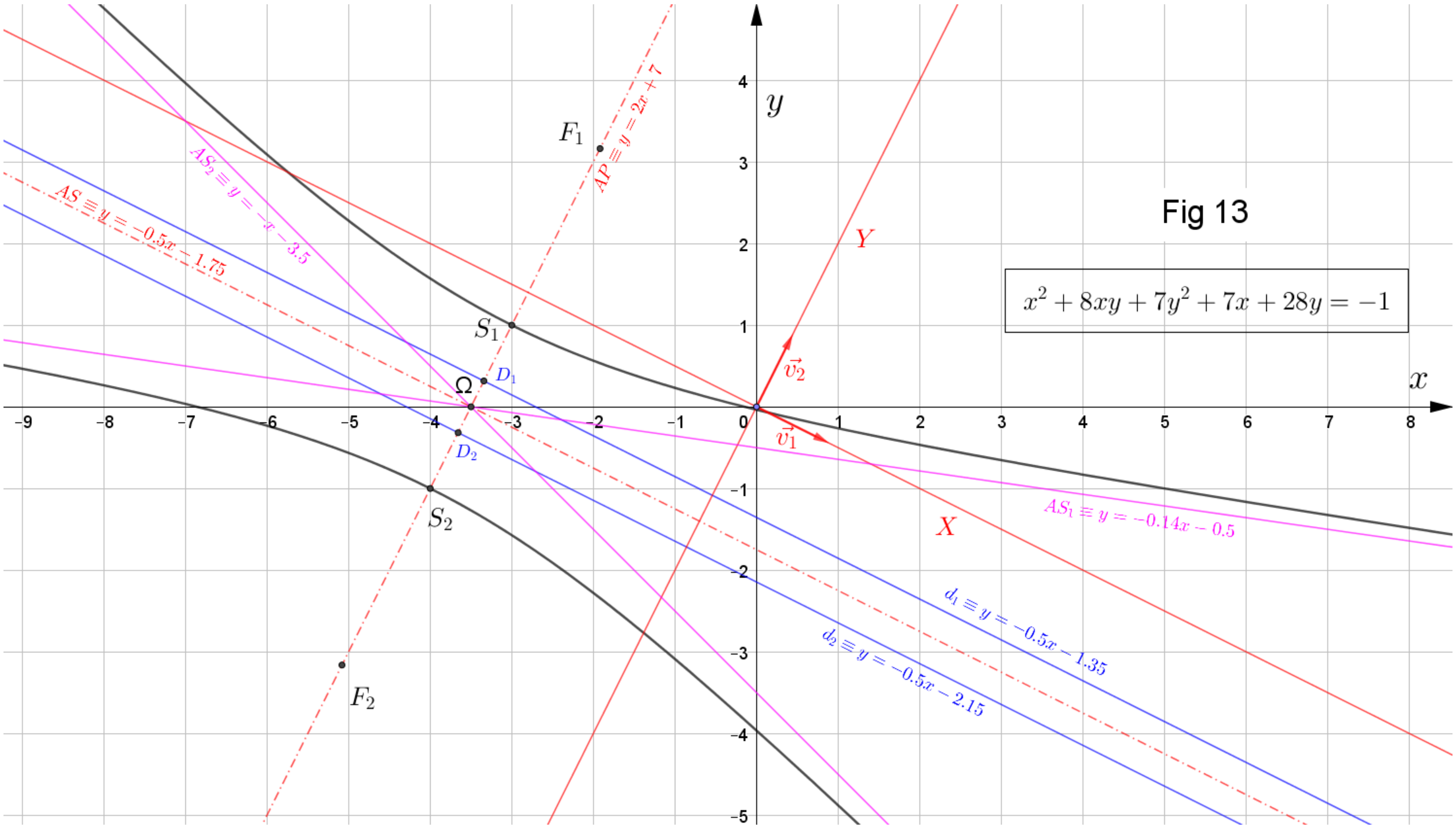


Fig 13
$x^2 + 8xy + 7y^2 + 7x + 28y = -1$
$AP \equiv y = 2x + 7$
$AS \equiv y = -0.5x - 1.75$
$AS_2 \equiv y = -x - 3.5$
$AS_1 \equiv y = -0.14x - 0.5$
$d_1 \equiv y = -0.5x - 1.35$
$d_2 \equiv y = -0.5x - 2.15$
F_1
F_2
S_1
S_2
D_1
D_2
Ω
X
Y
$\vec{v_1}$
$\vec{v_2}$
x
y

§7.3 Parabole (Fig 14)

Etudier la conique : $x^2+6xy+9y^2+40x+20y=60$

$M_Q=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$, $M_L=\begin{pmatrix}40 & 20\end{pmatrix}$, $\lambda_1=0,\lambda_2=10$ donc c'est une parabole.

$$\lambda_1=0\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix},\ \lambda_2=10\Rightarrow v_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow Q=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}D' & E'\end{pmatrix}=M_L.Q=\begin{pmatrix}40 & 20\end{pmatrix}.\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=10\sqrt{10}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$$

Donc

$$10Y^2+10\sqrt{10}X+10\sqrt{10}Y=60\Rightarrow Y^2+\sqrt{10}Y=-\sqrt{10}X+6\Rightarrow\left(Y+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=-\sqrt{10}\left(X-\frac{17\sqrt{10}}{20}\right)$$

Sommet $\begin{cases}S_{XY}=\left(17\sqrt{10}/20,\sqrt{10}/2\right)\\ S_{xy}=Q.S_{XY}=\left(41/20,-47/20\right)=\left(2.05,-2.35\right)\end{cases}$

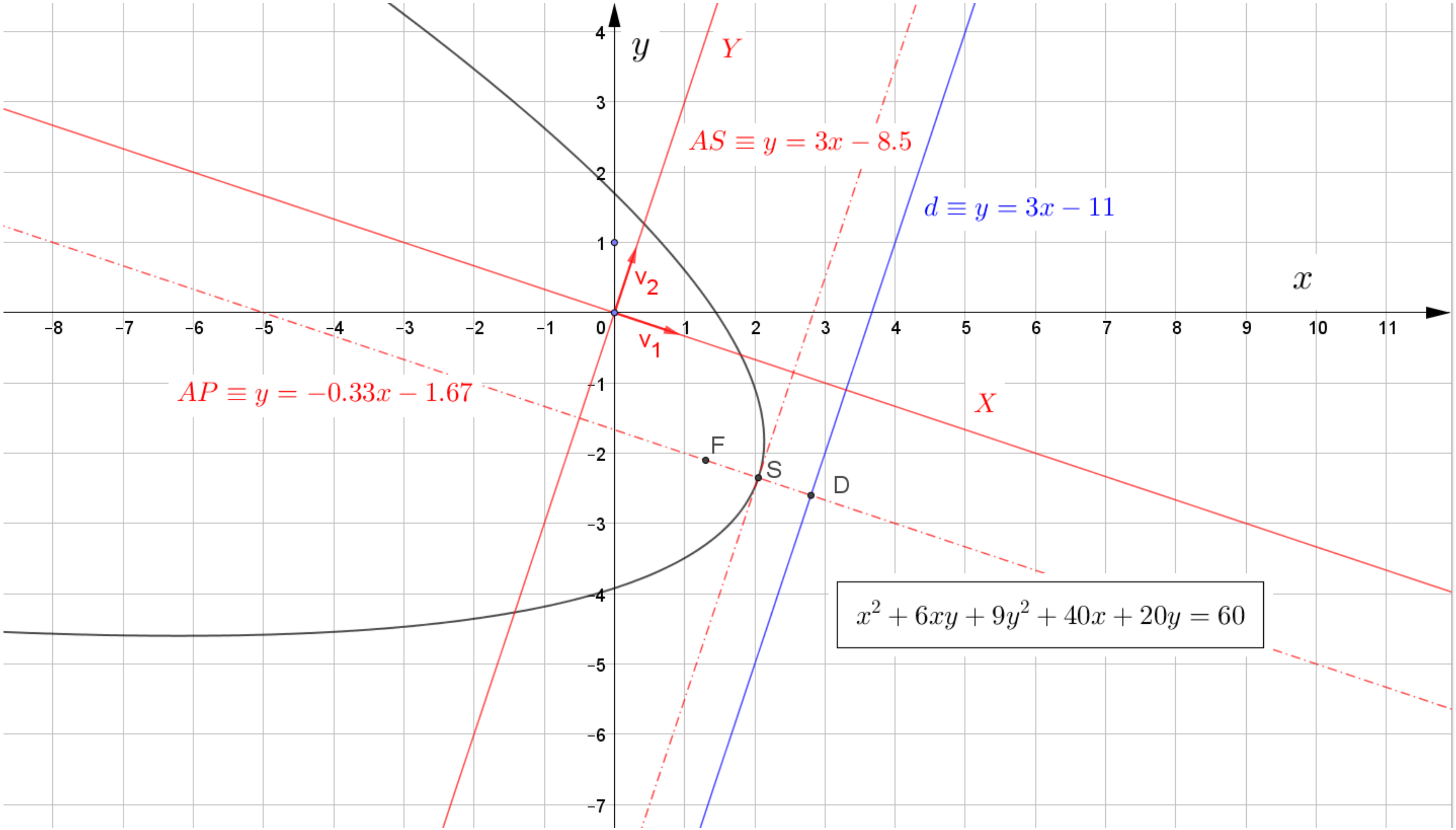
$$2p=-\sqrt{10}\Rightarrow\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{4}$$

Foyer $F=S_{xy}+\frac{p}{2}v_1=\begin{pmatrix}41/20\\ -47/20\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/10\\ -21/20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.3\\ -2.1\end{pmatrix}$

Axes $\begin{cases}AP\equiv\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S_{xy}+kv_1=\begin{pmatrix}41/20\\ -47/20\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\Rightarrow AP\equiv y=-\frac{1}{3}(x+5)\\ AP\equiv\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S_{xy}+kv_2=\begin{pmatrix}41/20\\ -47/20\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow AS\equiv y=3x-\frac{17}{2}\end{cases}$

Pied directrice : $D=S_{xy}-\frac{p}{2}v_1=\begin{pmatrix}41/20\\ -47/20\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14/5\\ -13/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.8\\ -2.6\end{pmatrix}$

Directrice : $d\equiv\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=D+kv_2=\begin{pmatrix}14/5\\ -13/5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow d\equiv y=3x-11$



y
Y
$AS \equiv y = 3x - 8.5$
$d \equiv y = 3x - 11$
x
v_2
v_1
X
$AP \equiv y = -0.33x - 1.67$
F
S
D
$x^2 + 6xy + 9y^2 + 40x + 20y = 60$

Table de valeurs de *A,B,C* donnant des valeurs entières de λ_1 et λ_2

A	B	C	L1	L2
0	-10	0	-10	10
0	-9	0	-9	9
0	-8	0	-8	8
0	-7	0	-7	7
0	-6	-9	-12	3
0	-6	-5	-9	4
0	-6	0	-6	6
0	-6	5	-4	9
0	-6	9	-3	12
0	-5	0	-5	5
0	-4	-6	-8	2
0	-4	0	-4	4
0	-4	6	-2	8
0	-3	-8	-9	1
0	-3	0	-3	3
0	-3	8	-1	9
0	-2	-3	-4	1
0	-2	0	-2	2
0	-2	3	-1	4
0	-1	0	-1	1
0	0	-10	-10	0
0	0	-9	-9	0
0	0	-8	-8	0
0	0	-7	-7	0
0	0	-6	-6	0
0	0	-5	-5	0
0	0	-4	-4	0
0	0	-3	-3	0
0	0	-2	-2	0
0	0	-1	-1	0
0	0	1	0	1
0	0	2	0	2
0	0	3	0	3
0	0	4	0	4
0	0	5	0	5
0	0	6	0	6
0	0	7	0	7
0	0	8	0	8
0	0	9	0	9
0	0	10	0	10
0	1	0	-1	1
0	2	-3	-4	1
0	2	0	-2	2
0	2	3	-1	4
0	3	-8	-9	1
0	3	0	-3	3
0	3	8	-1	9
0	4	-6	-8	2
0	4	0	-4	4
0	4	6	-2	8
0	5	0	-5	5
0	6	-9	-12	3
0	6	-5	-9	4
0	6	0	-6	6
0	6	5	-4	9
0	6	9	-3	12
0	7	0	-7	7
0	8	0	-8	8
0	10	0	-10	10

A	B	C	L1	L2
1	-10	1	-9	11
1	-9	1	-8	10
1	-8	1	-7	9
1	-7	1	-6	8
1	-6	-8	-11	4
1	-6	-4	-8	5
1	-6	1	-5	7
1	-6	6	-3	10
1	-6	10	-2	13
1	-5	1	-4	6
1	-4	-5	-7	3
1	-4	1	-3	5
1	-4	7	-1	9
1	-3	-7	-8	2
1	-3	1	-2	4
1	-3	9	0	10
1	-2	-2	-3	2
1	-2	1	-1	3
1	-2	4	0	5
1	-1	1	0	2
1	0	-10	-10	1
1	0	-9	-9	1
1	0	-8	-8	1
1	0	-7	-7	1
1	0	-6	-6	1
1	0	-5	-5	1
1	0	-4	-4	1
1	0	-3	-3	1
1	0	-2	-2	1
1	0	-1	-1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	2	1	2
1	0	3	1	3
1	0	4	1	4
1	0	5	1	5
1	0	6	1	6
1	0	7	1	7
1	0	8	1	8
1	0	9	1	9
1	0	10	1	10
1	1	1	0	2
1	2	-2	-3	2
1	2	1	-1	3
1	2	4	0	5
1	3	-7	-8	2
1	3	1	-2	4
1	3	9	0	10
1	4	-5	-7	3
1	4	1	-3	5
1	4	7	-1	9
1	5	1	-4	6
1	6	-8	-11	4
1	6	-4	-8	5
1	6	1	-5	7
1	6	6	-3	10
1	6	10	-2	13
1	7	1	-6	8
1	8	1	-7	9
1	9	1	-8	10
1	10	1	-9	11

A	B	C	L1	L2
2	-10	2	-8	12
2	-9	2	-7	11
2	-8	-10	-14	6
2	-8	2	-6	10
2	-7	2	-5	9
2	-6	-7	-10	5
2	-6	-3	-7	6
2	-6	2	-4	8
2	-6	7	-2	11
2	-5	2	-3	7
2	-4	-4	-6	4
2	-4	2	-2	6
2	-4	8	0	10
2	-3	-6	-7	3
2	-3	2	-1	5
2	-3	10	1	11
2	-2	-1	-2	3
2	-2	2	0	4
2	-2	5	1	6
2	-1	2	1	3
2	0	-10	-10	2
2	0	-9	-9	2
2	0	-8	-8	2
2	0	-7	-7	2
2	0	-6	-6	2
2	0	-5	-5	2
2	0	-4	-4	2
2	0	-3	-3	2
2	0	-2	-2	2
2	0	-1	-1	2
2	0	0	0	2
2	0	1	1	2
2	0	2	2	2
2	0	3	2	3
2	0	4	2	4
2	0	5	2	5
2	0	6	2	6
2	0	7	2	7
2	0	8	2	8
2	0	9	2	9
2	0	10	2	10
2	1	2	1	3
2	2	-1	-2	3
2	2	2	0	4
2	2	5	1	6
2	3	-6	-7	3
2	3	2	-1	5
2	3	10	1	11
2	4	-4	-6	4
2	4	2	-2	6
2	4	8	0	10
2	5	2	-3	7
2	6	-7	-10	5
2	6	-3	-7	6
2	6	2	-4	8
2	6	7	-2	11
2	7	2	-5	9
2	8	-10	-14	6
2	8	2	-6	10
2	9	2	-7	11
2	10	2	-8	12

A	B	C	L1	L2
3	-10	3	-7	13
3	-9	3	-6	12
3	-8	-9	-13	7
3	-8	3	-5	11
3	-7	3	-4	10
3	-6	-6	-9	6
3	-6	3	-3	9
3	-6	8	-1	12
3	-5	3	-2	8
3	-4	-3	-5	5
3	-4	3	-1	7
3	-4	9	1	11
3	-3	-5	-6	4
3	-3	3	0	6
3	-2	0	-1	4
3	-2	3	1	5
3	-2	6	2	7
3	-1	3	2	4
3	0	-10	-10	3
3	0	-9	-9	3
3	0	-8	-8	3
3	0	-7	-7	3
3	0	-6	-6	3
3	0	-5	-5	3
3	0	-4	-4	3
3	0	-3	-3	3
3	0	-2	-2	3
3	0	-1	-1	3
3	0	0	0	3
3	0	1	1	3
3	0	2	2	3
3	0	3	3	3
3	0	4	3	4
3	0	5	3	5
3	0	6	3	6
3	0	7	3	7
3	0	8	3	8
3	0	9	3	9
3	0	10	3	10
3	1	3	2	4
3	2	0	-1	4
3	2	3	1	5
3	2	6	2	7
3	3	-5	-6	4
3	3	3	0	6
3	4	-3	-5	5
3	4	3	-1	7
3	4	9	1	11
3	5	3	-2	8
3	6	-6	-9	6
3	6	-2	-6	7
3	6	3	-3	9
3	6	8	-1	12
3	7	3	-4	10
3	8	-9	-13	7
3	8	3	-5	11
3	9	3	-6	12
3	10	3	-7	13

A	B	C	L1	L2
4	-10	4	-6	14
4	-9	4	-5	13
4	-8	-8	-12	8
4	-8	4	-4	12
4	-7	4	-3	11
4	-6	-5	-8	7
4	-6	-1	-5	8
4	-6	4	-2	10
4	-6	9	0	13
4	-5	4	-1	9
4	-4	-2	-4	6
4	-4	4	0	8
4	-4	10	2	12
4	-3	-4	-5	5
4	-3	4	1	7
4	-2	1	0	5
4	-2	4	2	6
4	-2	7	3	8
4	-1	4	3	5
4	0	-10	-10	4
4	0	-9	-9	4
4	0	-8	-8	4
4	0	-7	-7	4
4	0	-6	-6	4
4	0	-5	-5	4
4	0	-4	-4	4
4	0	-3	-3	4
4	0	-2	-2	4
4	0	-1	-1	4
4	0	0	0	4
4	0	1	1	4
4	0	2	2	4
4	0	3	3	4
4	0	4	4	4
4	0	5	4	5
4	0	6	4	6
4	0	7	4	7
4	0	8	4	8
4	0	9	4	9
4	0	10	4	10
4	1	4	3	5
4	2	1	0	5
4	2	4	2	6
4	2	7	3	8
4	3	-4	-5	5
4	3	4	1	7
4	4	-2	-4	6
4	4	4	0	8
4	4	10	2	12
4	5	4	-1	9
4	6	-5	-8	7
4	6	-1	-5	8
4	6	4	-2	10
4	6	9	0	13
4	7	4	-3	11
4	8	-8	-12	8
4	8	4	-4	12
4	9	4	-5	13
4	10	4	-6	14

A	B	C	L1	L2
5	-10	-10	-15	10
5	-10	5	-5	15
5	-9	5	-4	14
5	-8	-7	-11	9
5	-8	5	-3	13
5	-7	5	-2	12
5	-6	-4	-7	8
5	-6	0	-4	9
5	-6	5	-1	11
5	-6	10	1	14
5	-4	-10	-11	6
5	-4	-1	-3	7
5	-4	5	1	9
5	-5	5	0	10
5	-3	-3	-4	6
5	-3	5	2	8
5	-2	2	1	6
5	-2	5	3	7
5	-2	8	4	9
5	-1	5	4	6
5	0	-10	-10	5
5	0	-9	-9	5
5	0	-8	-8	5
5	0	-7	-7	5
5	0	-6	-6	5
5	0	-5	-5	5
5	0	-4	-4	5
5	0	-3	-3	5
5	0	-2	-2	5
5	0	-1	-1	5
5	0	0	0	5
5	0	1	1	5
5	0	2	2	5
5	0	3	3	5
5	0	4	4	5
5	0	5	5	5
5	0	6	5	6
5	0	7	5	7
5	0	8	5	8
5	0	9	5	9
5	0	10	5	10
5	1	5	4	6
5	2	2	1	6
5	2	5	3	7
5	2	8	4	9
5	3	-3	-4	6
5	3	5	2	8
5	4	-10	-11	6
5	4	-1	-3	7
5	4	5	1	9
5	5	5	0	10
5	6	-4	-7	8
5	6	0	-4	9
5	6	5	-1	11
5	6	10	1	14
5	7	5	-2	12
5	8	-7	-11	9
5	8	5	-3	13
5	9	5	-4	14
5	10	-10	-15	10
5	10	5	-5	15

A	B	C	L1	L2
6	-10	-9	-14	11
6	-10	6	-4	16
6	-9	6	-3	15
6	-8	-6	-10	10
6	-8	6	-2	14
6	-7	6	-1	13
6	-6	-10	-12	8
6	-6	-3	-6	9
6	-6	1	-3	10
6	-6	6	0	12
6	-5	6	1	11
6	-4	-9	-10	7
6	-4	0	-2	8
6	-4	6	2	10
6	-3	-2	-3	7
6	-3	6	3	9
6	-2	3	2	7
6	-2	6	4	8
6	-2	9	5	10
6	-1	6	5	7
6	0	-10	-10	6
6	0	-9	-9	6
6	0	-8	-8	6
6	0	-7	-7	6
6	0	-6	-6	6
6	0	-5	-5	6
6	0	-4	-4	6
6	0	-3	-3	6
6	0	-2	-2	6
6	0	-1	-1	6
6	0	0	0	6
6	0	1	1	6
6	0	2	2	6
6	0	3	3	6
6	0	4	4	6
6	0	5	5	6
6	0	6	6	6
6	0	7	6	7
6	0	8	6	8
6	0	9	6	9
6	0	10	6	10
6	1	6	5	7
6	2	3	2	7
6	2	6	4	8
6	2	9	5	10
6	3	-2	-3	7
6	3	6	3	9
6	4	-9	-10	7
6	4	0	-2	8
6	4	6	2	10
6	5	6	1	11
6	6	-10	-12	8
6	6	-3	-6	9
6	6	1	-3	10
6	6	6	0	12
6	7	6	-1	13
6	8	-6	-10	10
6	8	6	-2	14
6	9	6	-3	15
6	10	-9	-14	11
6	10	6	-4	16

A	B	C	L1	L2
7	-10	-8	-13	12
7	-10	7	-3	17
7	-9	7	-2	16
7	-8	-5	-9	11
7	-8	7	-1	15
7	-7	7	0	14
7	-6	-9	-11	9
7	-6	-2	-5	10
7	-6	2	-2	11
7	-6	7	1	13
7	-5	7	2	12
7	-4	-8	-9	8
7	-4	1	-1	9
7	-4	7	3	11
7	-3	-1	-2	8
7	-3	7	4	10
7	-2	4	3	8
7	-2	7	5	9
7	-2	10	6	11
7	-1	7	6	8
7	0	-10	-10	7
7	0	-9	-9	7
7	0	-8	-8	7
7	0	-7	-7	7
7	0	-6	-6	7
7	0	-5	-5	7
7	0	-4	-4	7
7	0	-3	-3	7
7	0	-2	-2	7
7	0	-1	-1	7
7	0	0	0	7
7	0	1	1	7
7	0	2	2	7
7	0	3	3	7
7	0	4	4	7
7	0	5	5	7
7	0	6	6	7
7	0	7	7	7
7	0	8	7	8
7	0	9	7	9
7	0	10	7	10
7	1	7	6	8
7	2	4	3	8
7	2	7	5	9
7	2	10	6	11
7	3	-1	-2	8
7	3	7	4	10
7	4	-8	-9	8
7	4	1	-1	9
7	4	7	3	11
7	5	7	2	12
7	6	-9	-11	9
7	6	-2	-5	10
7	6	2	-2	11
7	6	7	1	13
7	7	7	0	14
7	8	-5	-9	11
7	8	7	-1	15
7	9	7	-2	16
7	10	-8	-13	12
7	10	7	-3	17

A	B	C	L1	L2
8	-10	-7	-12	13
8	-10	8	-2	18
8	-9	8	-1	17
8	-8	-4	-8	12
8	-8	8	0	16
8	-7	8	1	15
8	-6	-8	-10	10
8	-6	-1	-4	11
8	-6	3	-1	12
8	-6	8	2	14
8	-5	8	3	13
8	-4	-7	-8	9
8	-4	2	0	10
8	-4	8	4	12
8	-3	0	-1	9
8	-3	8	5	11
8	-2	5	4	9
8	-2	8	6	10
8	-1	8	7	9
8	0	-10	-10	8
8	0	-9	-9	8
8	0	-8	-8	8
8	0	-7	-7	8
8	0	-6	-6	8
8	0	-5	-5	8
8	0	-4	-4	8
8	0	-3	-3	8
8	0	-2	-2	8
8	0	-1	-1	8
8	0	0	0	8
8	0	1	1	8
8	0	2	2	8
8	0	3	3	8
8	0	4	4	8
8	0	5	5	8
8	0	6	6	8
8	0	7	7	8
8	0	8	8	8
8	0	9	8	9
8	0	10	8	10
8	1	8	7	9
8	2	5	4	9
8	2	8	6	10
8	3	0	-1	9
8	3	8	5	11
8	4	-7	-8	9
8	4	2	0	10
8	4	8	4	12
8	5	8	3	13
8	6	-8	-10	10
8	6	-1	-4	11
8	6	3	-1	12
8	6	8	2	14
8	7	8	1	15
8	8	-4	-8	12
8	8	8	0	16
8	9	8	-1	17
8	10	-7	-12	13
8	10	8	-2	18

A	B	C	L1	L2
9	-10	-6	-11	14
9	-10	9	-1	19
9	-9	9	0	18
9	-8	-3	-7	13
9	-8	9	1	17
9	-7	9	2	16
9	-6	-7	-9	11
9	-6	0	-3	12
9	-6	4	0	13
9	-6	9	3	15
9	-5	9	4	14
9	-4	-6	-7	10
9	-4	3	1	11
9	-4	9	5	13
9	-3	9	6	12
9	-3	1	0	10
9	-2	6	5	10
9	-2	9	7	11
9	-1	9	8	10
9	0	-10	-10	9
9	0	-9	-9	9
9	0	-8	-8	9
9	0	-7	-7	9
9	0	-6	-6	9
9	0	-5	-5	9
9	0	-4	-4	9
9	0	-3	-3	9
9	0	-2	-2	9
9	0	-1	-1	9
9	0	0	0	9
9	0	1	1	9
9	0	2	2	9
9	0	3	3	9
9	0	4	4	9
9	0	5	5	9
9	0	6	6	9
9	0	7	7	9
9	0	8	8	9
9	0	9	9	9
9	0	10	9	10
9	1	9	8	10
9	2	6	5	10
9	2	9	7	11
9	3	1	0	10
9	3	9	6	12
9	4	-6	-7	10
9	4	3	1	11
9	4	9	5	13
9	5	9	4	14
9	6	-7	-9	11
9	6	0	-3	12
9	6	4	0	13
9	6	9	3	15
9	7	9	2	16
9	8	-3	-7	13
9	8	9	1	17
9	9	9	0	18
9	10	-6	-11	14
9	10	9	-1	19

A	B	C	L1	L2
10	-10	-5	-10	15
10	-10	10	0	20
10	-9	10	1	19
10	-8	-2	-6	14
10	-8	10	2	18
10	-7	10	3	17
10	-6	-6	-8	12
10	-6	1	-2	13
10	-6	5	1	14
10	-6	10	4	16
10	-5	10	5	15
10	-4	-5	-6	11
10	-4	4	2	12
10	-4	10	6	14
10	-3	2	1	11
10	-3	10	7	13
10	-2	7	6	11
10	-2	10	8	12
10	-1	10	9	11
10	0	-10	-10	10
10	0	-9	-9	10
10	0	-8	-8	10
10	0	-7	-7	10
10	0	-6	-6	10
10	0	-5	-5	10
10	0	-4	-4	10
10	0	-3	-3	10
10	0	-2	-2	10
10	0	-1	-1	10
10	0	0	0	10
10	0	1	1	10
10	0	2	2	10
10	0	3	3	10
10	0	4	4	10
10	0	5	5	10
10	0	6	6	10
10	0	7	7	10
10	0	8	8	10
10	0	9	9	10
10	0	10	10	10
10	1	10	9	11
10	2	7	6	11
10	2	10	8	12
10	3	2	1	11
10	3	10	7	13
10	4	-5	-6	11
10	4	4	2	12
10	4	10	6	14
10	5	10	5	15
10	6	-6	-8	12
10	6	1	-2	13
10	6	5	1	14
10	6	10	4	16
10	7	10	3	17
10	8	-2	-6	14
10	8	10	2	18
10	9	10	1	19
10	10	-5	-10	15
10	10	10	0	20

Chapitre III
Coordonnées homogènes.
Tangentes, normales,

1 – Coordonnées homogènes

Les coordonnées homogènes sont définies à un facteur près selon les formules :

$$\boxed{x = \frac{X}{Z} \quad , \quad y = \frac{Y}{Z} \quad \text{avec} \quad Z \neq 0}$$

Exemple 1 :

Le point P de coordonnées cartésiennes $(2,3)$ a pour coordonnées homogènes $(2,3,1)$ ou encore $(4,6,2)$, ou $(-6,-9,-3)$ etc....

2 - Point à l'infini

Soit les équations paramétriques de la droite : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda k \\ y = y_0 + \mu k \end{cases}$, λ et μ étant les coefficients directeurs de la droite.

Soit $M (x, y) = M (X, Y, Z)$ un point de cette droite, avec $\begin{cases} X = \dfrac{x_0 + \lambda k}{h} \\ Y = \dfrac{y_0 + \mu k}{h} \\ Z = \dfrac{1}{h} \end{cases}$

Plus Z sera petit, et plus le point s'éloigne (car x et y deviennent grands). Donc si $Z \to 0$, le point M devient un point à l'infini dont les coordonnées sont :

$$\lim_{h \to \infty} M\left(\frac{x_0}{h} + \lambda, \frac{y_0}{h} + \mu, \frac{1}{h}\right) = M(\lambda, \mu, 0) = M(1, m, 0)$$

Où m est le coefficient angulaire de la droite. Le point M (1, m, 0) est le point à l'infini de la droite

Exemple 2 :

Soit la droite : $2x+3y-3=0$. Son point à l'infini est $\left(1,-\frac{2}{3},0\right)$

3 – Equation générale des coniques.

L'équation générale des coniques qui, en coordonnées cartésiennes, est

$$f\left(x,y\right)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

devient en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{f\left(X,Y,Z\right)\equiv AX^2+2BXY+CY^2+2DXZ+2EYZ+FZ^2=0}$$

Autrement dit on « complète » par des facteurs en *Z*.

Exemple 3

$$f\left(x,y\right)\equiv 2x^2+3y^2-3=0 \quad\Rightarrow\quad f\left(X,Y,Z\right)\equiv 2X^2+3Y^2-3Z^2=0$$

Exemple 4

$$f\left(x,y\right)\equiv x^2-2xy-y^2+3x-4y-8=0$$
$$\Rightarrow f\left(X,Y,Z\right)\equiv X^2-2XY-Y^2+3XZ-4YZ-8Z^2=0$$

4 – Equations aux dérivées partielles

La transformation vers les coordonnées homogènes permet de définir 3 dérivées partielles

$$\boxed{\begin{cases} f'_x=2AX+2BY+2DZ \\ f'_y=2BX+2CY+2EZ \\ f'_z=2DX+2EY+2FZ \end{cases}}$$

f'_X étant obtenu en dérivée par rapport à *X* et en considérant les autres variables *Y*, Z comme constants

Exemple 5

Soit la conique :

$$f(X,Y,Z) \equiv -2X^2 + 3XY + 3Y^2 + 2XZ - YZ - 3Z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_X = -4X + 3Y + 2Z \\ f'_Y = 3X + 6Y - Z \\ f'_Z = 2X - Y - 6Z \end{cases}$$

On peut maintenant définir

$$\boxed{\begin{cases} f'_a = 2Aa + 2Bb + 2Dc \\ f'_b = 2Ba + 2Cb + 2Ec \\ f'_c = 2Da + 2Eb + 2Fc \end{cases}}$$

Obtenu en remplaçant X, Y, Z par les coordonnées (a, b, c) d'un point particulier.

On vérifie la relation :

$$\boxed{Xf'_a + Yf'_b + Zf'_c = af'_X + bf'_Y + cf'_Z}$$

Exemple 6

Soit la conique de l'exemple précédent :

$$f(X,Y,Z) \equiv -2X^2 + 3XY + 3Y^2 + 2XZ - YZ - 3Z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_X = -4X + 3Y + 2Z \\ f'_Y = 3X + 6Y - Z \\ f'_Z = 2X - Y - 6Z \end{cases}$$

Soit le point $(1,2,3) \Rightarrow \begin{cases} f'_a = -4\times1 + 3\times2 + 2\times3 = 8 \\ f'_b = 3\times1 + 6\times2 - 1\times3 = 12 \\ f'_c = 2\times1 - 1\times2 - 6\times3 = -18 \end{cases}$

Et on vérifie :

$$af'_X + bf'_Y + cf'_Z = 1(-4X + 3Y + 2Z) + 2(3X + 6Y - Z) + 3(2X - Y - 6Z)$$
$$= 8X + 12Y - 18Z = Xf'_a + Yf'_b + Zf'_c$$

5 – Relation de Taylor

Dans $f(x,y,z)$ remplaçons x par $x + a$, y par $y + b$ et z par $z + c$, on obtient après développement, la relation de Taylor dont nous nous servirons plus tard :

$$\boxed{f\left(X+a,Y+b,Z+c\right)=f\left(X,Y,Z\right)+\left(af'_X+bf'_Y+cf'_Z\right)+f\left(a,b,c\right)}$$

Exemple 7

Reprenons encore la même conique :

$$f\left(X+1,Y+2,Z+3\right)=\overbrace{-2X^2+3XY+3Y^2+2XZ-YZ+3Z^2}^{f(X,Y,Z)}\overbrace{+8X+12Y-18Z}^{af'_x+bf'_y+cf'_z}+\overset{f(1,2,3)}{43}$$

6 - Equation d'une droite

En coordonnées homogènes, l'équation d'une droite est :

$$aX+bY+cZ=0$$

Les équations paramétriques deviennent :

Soient deux points $M_1\left(X_1,Y_1,Z_1\right)$ et $M_2\left(X_2,Y_2,Z_2\right)$

Alors : $\begin{cases} X=X_1-kX_2 \\ Y=Y_1-kY_2 \\ Z=Z_1-kZ_2 \end{cases}$

On retrouvera les équations paramétriques « normales », en posant $k=\lambda\dfrac{Z_1}{Z_2}$. On arrive à $\begin{cases} x=x_1+\lambda\left(x-x_2\right) \\ y=y_1+\lambda\left(y-y_2\right) \end{cases}$. Or $(x-x_2)$ et $(y-y_2)$ sont les composantes du vecteur directeur de la droite, donc on obtient bien $\begin{cases} x=x_1+\lambda u \\ y=y_1+\lambda v \end{cases}$

Exemple 8

Soient $M_1(1,2,3)$ et $M_2(4,5,6)$.

Les équations paramétriques de la droite passant par ces deux points est

$$\begin{cases} X = 1-4k \\ Y = 2-5k \\ Z = 3-6k \end{cases}$$

7 - Equation des tangentes

7 – 1 Tangente issue d'un point *P* (*a*, *b*,*c*).

Soit *M* (*X*, *Y*, *Z*), un point arbitraire fixe d'une droite issue de *P* . Un point quelconque de cette droite a pour coordonnées $\left(a-kX, b-kY, c-KZ\right)$. Si ce point appartient aussi à la conique d'équation *f* (*Y*, *Y*, *Z*) = 0. Donc :

$$f\left(a-kX, b-kY, c-kZ\right) = k^2 f\left(X,Y,Z\right) - k\left(xf'_a + yf'_b + zf'_c\right) + f\left(a,b,c\right) = 0$$

Pour que ce point quelconque soit un point de tangence, il faut et il suffit que la réalisant de cette équation du second degré soit nul :

$$\boxed{\left(Xf'_a + Yf'_b + Zf'_c\right)^2 - 4f\left(a,b,c\right)f\left(X,Y,Z\right) = 0} \qquad (1)$$

C'est une équation du second degré qui représente deux droites. Ce sont les tangentes à la conique issues du point *P*.

Selon que le réalisant est positif nul ou négatif, et en fonction de la position du point *P*, ces tangentes seront distinctes, confondues ou imaginaires.

Malheureusement, l'équation ci-dessus est rarement factorisable facilement. Par conséquent, en pratique, on utilisera plutôt l'équation aux coefficients angulaires. En effet, si le point fixe est à l'infini, ces coordonnées deviennent (1, *m*, 0). D'où,

$$\begin{aligned} &\left(Xf'_a + Yf'_b + Zf'_c\right)^2 - 4f\left(a,b,c\right)f\left(X,Y,Z\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(f'_a + mf'_b\right)^2 - 4f\left(a,b,c\right)f\left(1,m,0\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(f'_a + mf'_b\right)^2 - 4f\left(a,b,c\right)\left(A + Bm + Cm^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Ou encore

$$\boxed{\left[f'^{2}_{b}-4Cf\left(a,b,c\right)\right]m^2+2\left[f'_a\,f'_b-4Bf\left(a,b,c\right)\right]m+f'^{2}_{a}-4Af\left(a,b,c\right)=0}$$

Dans le cas où $B=0$ (pas de terme en XY)

$$\boxed{\left[f'^{2}_{b}-4Cf\left(a,b,c\right)\right]m^2+2\left[f'_a\,f'_b\right]m+f'^{2}_{a}-4Af\left(a,b,c\right)=0}$$

Les racines de ces équations sont les coefficients angulaires des tangentes issues de P
Ces formules semblent assez complexes, les exemples qui suivent vont montrer que leur utilisation est simple et rapide.

Exemple 9 (Fig 14)

Trouvez les tangentes à la conique d'équation :

$2x^2+y^2-2x+y-1=0$ issues du point $P(2,3)$

La conique en coordonnées homogènes s'écrit:

$f(x,y,z)=2x^2+y^2+2xz+yz-z^2=0$

on a $A=2;\ B=0;\ C=1\ \ et\ \ f(2;3;1)=\ 8+9-4+3-1=15$

$$\begin{cases} f'_x=4x-2z \\ f'_y=2y+z \\ f'_z=-2x+y-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_a=6 \\ f'_b=7 \\ f'_c=-3 \end{cases}$$

Les coefficients angulaires des tangentes sont donnés par :

$(f'^{2}_{b}-4\,C\ f(abc))\,m^2+2\ f'_a\ f'_b\,m+f'^{2}_{a}-4\,A\ f(abc)=0$

$(7^2-4.1.15)\,m^2+2.6.7\ m+36-4.2.15=0 \quad\Rightarrow\quad 11\,m^2-84\,m+84=0$

D'où $m_1=6.4530$ et $m_2=1.1834$

Les équations des tangentes sont : $t_1\equiv y=6.453\,x-9.906$ et $t_2\equiv y=1.1834\,x+0.6332$

Exemple 10 (Fig 15)

Conique : $3xy-y+x+1=0$ point $P(1.1)$

$A=0,B=3/2,C=0$

$f\left(0,1,1\right)=4$

$$\begin{cases} f'_x=3y+z \\ f'_y=3x-z \\ f'_z=-y+x+2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_a=4 \\ f'_b=2 \\ f'_c=2 \end{cases}$$

$$\left[f'^2_b-4Cf(a,b,c)\right]m^2+2\left[f'_a\,f'_b-4Bf(a,b,c)\right]m+f'^2_a-4Af(a,b,c)=0$$

$$\Rightarrow(2-0)^2m^2+2\left(4\times 2-4\times\frac{3}{2}\times 4\right)m+4^2+0\Rightarrow 4m^2-8m+4=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m_1=7.4641 & \Rightarrow\quad t_1\equiv y=7.4641x-6.4641\\ m_2=0.5359 & \Rightarrow\quad t_2\equiv y=0.5359x+0.4641\end{cases}$$

7 – 2 Tangentes issues d'un point de la conique.

Dans ce cas $f(X, Y, Z) = 0$ et l'équation (1) devient simplement :

$$\boxed{Xf'_a+Yf'_b+Zf'_c=0}$$

Le coefficient angulaire de la tangente est donc :

$$\boxed{m_T=-\frac{f'_a}{f'_b}}$$

L'équation de la tangente en coordonnées non homogènes est alors :

$$\boxed{y-b=-\frac{f'_a}{f'_b}(x-a)}$$

Exemple 11 (Fig 15)

Conique : $3xy-y+x-1=0$ point $T_3(1,-1)$

$$\begin{cases}f'_x=3y+z\\ f'_y=3x-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_a=-2\\ f'_b=2\end{cases}\Rightarrow t_3\equiv y+1=-\frac{-2}{2}(x+1)\ \Rightarrow t_3\equiv y=x-2$$

Exemple 12 (Fig 14)

Conique : $2x^2+y^2-2x+y-1=0$ point $T_3=(0.271,-1.25)$

$$\Rightarrow f'_a=-3.092\qquad f'_b=-1.49$$

$$\Rightarrow t_3\equiv y+1.25=-\frac{-3.092}{-1.49}(x+0.273)\Rightarrow t_3\equiv y=2.075x-3.861$$

7 – 3 Tangentes parallèles à une direction donnée.

Dans l'équation : $\left(Xf'_a+Yf'_b+Zf'_c\right)^2-4f(a,b,c)\,f(X,Y,Z)=0$

$$f(a,b,c)=f(1,m,0)\Rightarrow \boxed{\left(f'_x+mf'_y\right)^2-4\left(A+2Bm+Cm^2\right)f(X,Y,Z)=0}$$

Cette équation étant assez complexe, il est préférable de passer par la corde de contact. On donnera un exemple plus loin.

8 – Corde de contact

8 – 1 Corde de contact des tangentes issues d'un point P (a, b,c).

Soit T_1 : (x_1, y_1, z_1) et T_2 : (x_2, y_2, z_2) , les deux points de tangences. t_1 la tangente en T_1 et t_2 la tangente en T_2 :

$$\begin{cases} T_1\in t_1 \;\rightarrow\; xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0 \\ T_2\in t_2 \;\rightarrow\; xf'_{x_2}+yf'_{y_2}+zf'_{z_2}=0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} P\in t_1 \;\rightarrow\; af'_{x_1}+bf'_{y_1}+cf'_{z_1}=0 \\ P\in t_2 \;\rightarrow\; af'_{x_2}+bf'_{y_2}+cf'_{z_2}=0 \end{cases} \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on en déduit que les coordonnées des points de contact vérifient l'équation :

$$\boxed{af'_x+bf'_y+cf'_z=0} \text{ ou } \boxed{f'_aX+f'_bY+f'_cZ=0}$$

Exemple 13: (Fig 15)

Conique : $3xy-y+x+1=0$ point $P(1.1)$

$$\begin{cases} f'_x=3y+z \\ f'_y=3x-z \\ f'_z=-y+x+2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_a=4 \\ f'_b=2 \\ f'_c=2 \end{cases}$$

Corde de contact des tangentes issues de P :

$c_1\equiv f'_aX+f'_bY+f'_cZ=2x+y+1=0$

Exemple 14: (Fig 14)

Conique : $2x^2+y^2-2x+y-1=0$ Tangentes issues du point $P(2,3)$

$$\begin{cases} f'_x = 4x-2z \\ f'_y = 2y+z \\ f'_z = -2x+y-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_a = 6 \\ f'_b = 7 \\ f'_c = -3 \end{cases} \quad \text{Corde de contact : } c_1 \equiv 6x+7y-3=0$$

8 – 2 Corde de contact des tangentes parallèles à une direction donnée *m*.

Ces tangentes étant issues du point à l'infini (1, *m*, 0), la formule précédente devient :

$$\boxed{f'_x + mf'_y = 0}$$

Exemple 15 (Fig 14)

Conique : $2x^2+y^2-2x+y-1=0$ Direction : 3

$\Rightarrow f'_x = 4x-2 \quad f'_y = 2y+1$

$\Rightarrow c_2 \equiv 4x-2+3(2y+1)=0 \Rightarrow c_2 \equiv 4x+6y+1=0$

8 – 3 Calcul des points de tangences

Dans le cas des tangentes issues d'un point, le calcul des points de tangence est simplifié par si on connaît la corde de contact. En effet, le calcul se ramène à un système de deux équations du premier degré, ce qui est plus facile que de constituer un système entre la conique et chacune des tangentes.

Dans le cas des tangentes parallèles à une direction donnée, il faut constituer un système entre la corde et la conique. On a ainsi une équation du second degré qui donnera les points de tangence, et donc permettra d'établir les équations des tangentes.

Exemple 16a (Fig 15)

Conique : $2x^2+y^2-2x+y-1=0$ Tangentes issues du point $P(2,3)$

On a vu que pour cette conique, les équations des tangentes sont :

$t_1 \equiv y = 6.453\,x - 9.906$ et $t_2 \equiv y = 1.1834\,x + 0.6332$

Et que l'équation de la corde de contact est : $c \equiv 6x + 7y - 3 = 0$

$$T_1 \equiv t_1 \cap c : \begin{cases} y = 6.453\,x - 9.906 \\ y = -\dfrac{6}{7}x + \dfrac{3}{7} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_1 : (1.4137, -0.7832)$$

$$t_2 \cap c : \begin{cases} y = 1.1834\,x + 0.6332 \\ y = -\dfrac{6}{7}x + \dfrac{3}{7} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2 : (-0.1, 0.5145)$$

Exemple 16b (Fig 16)

Conique : $3xy - y + x + 1 = 0$ Point $P(1,1)$

On connait déjà les équations des tangentes et de la corde de contact:

On aura deux systèmes à résoudre

$$\begin{cases} t_1 \equiv y = 0.5359x + 0.4641 \\ c_1 \equiv 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 = (-0.5773, 0.1547)$$

$$\begin{cases} t_2 \equiv y = 7.4641x - 6.4641 \\ c_1 \equiv 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 = (0.5774, -2.1547)$$

Exemple 17a (Fig 15)

Conique : $2x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ Déterminer les tangentes de direction 3.

On sait que la corde de contact est $c_2 \equiv 4x + 6y + 1 = 0$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \\ 4x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_4 = (1.346, -1.064) \\ T_5 = (-0.346, 0.064) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_4 \equiv y = 3x - 5.102 \\ t_5 \equiv y = 3x + 1.102 \end{cases}$$

Exemple 17b (Fig 15)

Conique : $3xy - y + x + 1 = 0$ Direction : $m = 2$

$$\begin{cases} f'_x = 3y + z \\ f'_y = 3x - z \\ f'_z = -y + x + 2z \end{cases}$$

Corde de contact des tangentes de direction 2 :

$$f'_x + mf'_y = 0 \Rightarrow 3y + 1 + 2(3x - 1) = 0 \Rightarrow c_2 \equiv 6x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3xy - y + x + 1 = 0 \\ 6x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_5 : (-0.138, 0.609) \Rightarrow t_5 \equiv y = 2x + 0.886 \\ T_4 : (0.805, -1.276) \Rightarrow t_4 \equiv y = 2x - 2.886 \end{cases}$$

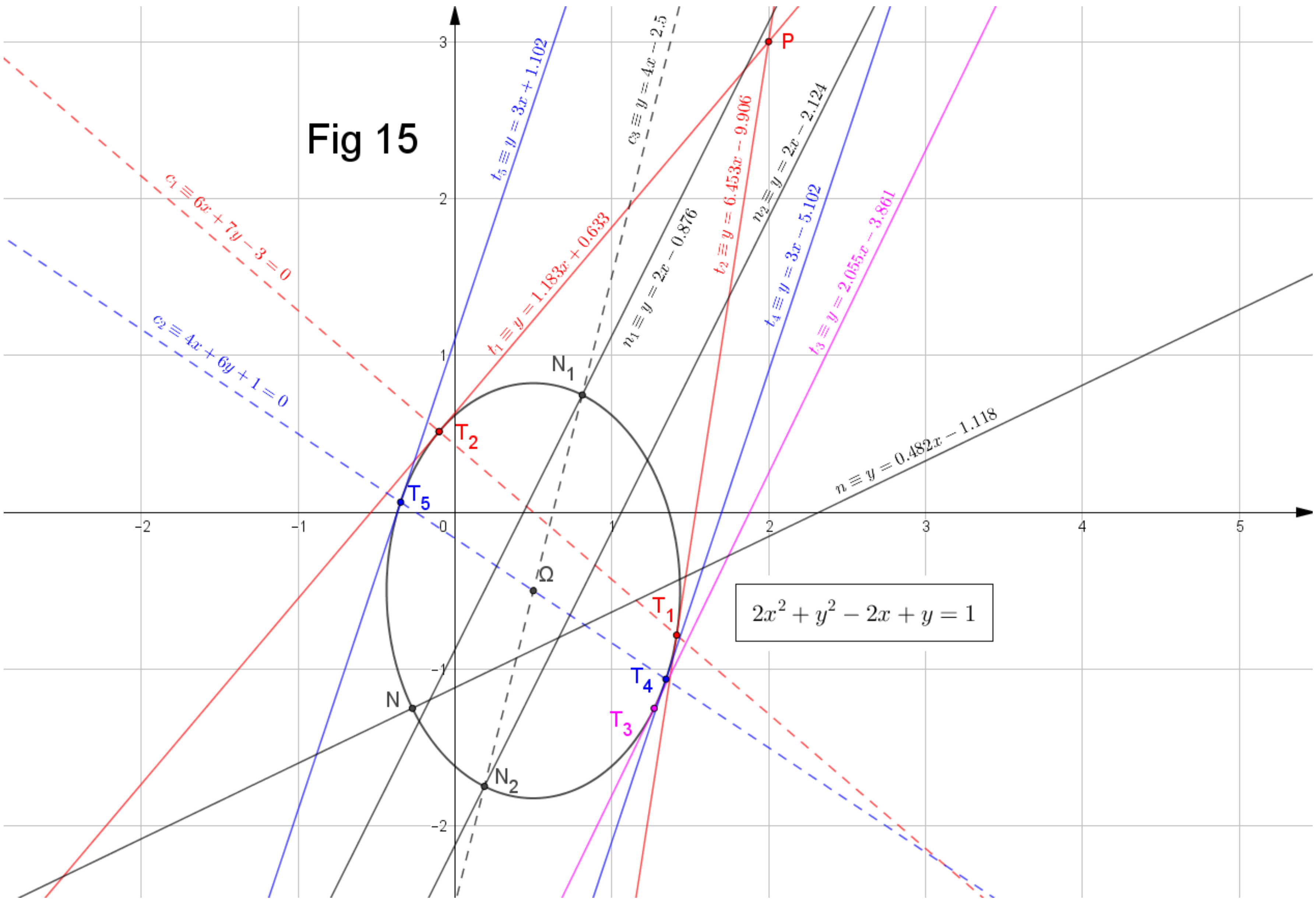


Fig 15
$c_1 \equiv 6x + 7y - 3 = 0$
$c_2 \equiv 4x + 6y + 1 = 0$
$t_5 \equiv y = 3x + 1.102$
$c_3 \equiv y = 4x - 2.5$
$t_1 \equiv y = 1.183x + 0.633$
$n_1 \equiv y = 2x - 0.876$
$t_2 \equiv y = 6.453x - 9.906$
$n_2 \equiv y = 2x - 2.124$
$t_4 \equiv y = 3x - 5.102$
$t_3 \equiv y = 2.055x - 3.861$
$n \equiv y = 0.482x - 1.118$
$2x^2 + y^2 - 2x + y = 1$
P
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
N_1
N_2
N
Ω

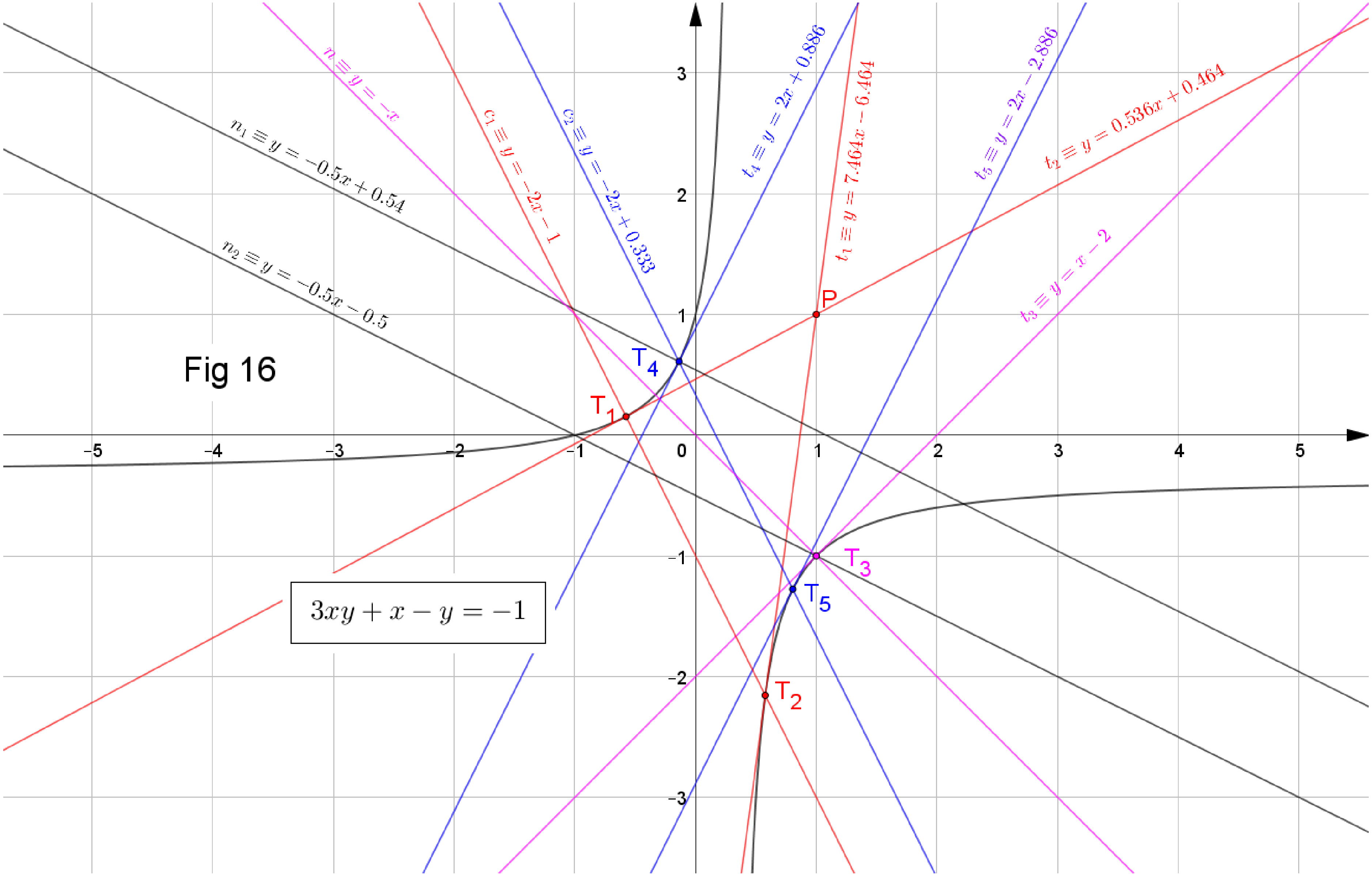


Fig 16
$3xy + x - y = -1$
$n \equiv y = -x$
$n_1 \equiv y = -0.5x + 0.54$
$n_2 \equiv y = -0.5x - 0.5$
$c_1 \equiv y = -2x - 1$
$c_2 \equiv y = -2x + 0.333$
$t_4 \equiv y = 2x + 0.886$
$t_1 \equiv y = 7.464x - 6.464$
$t_5 \equiv y = 2x - 2.886$
$t_2 \equiv y = 0.536x + 0.464$
$t_3 \equiv y = x - 2$
P
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5

9 – Normales

On appelle **normale** en un point d'une conique la perpendiculaire à la tangent an ce point de la courbe et tracée par le point de contact appelé aussi pied de la normale.

9 – 1 Normale en un point d'une conique : P (a, b,c).

C'est immédiat :

$$\boxed{y-b=\frac{f'_b}{f'_a}(x-a)}$$

Exemple 18a (Fig 15)

$$\text{Conique : } 2x^2+y^2-2x+y-1=0 \qquad \text{point } N(-0.271,-1.25)$$
$$\Rightarrow f'_a=-3.092 \qquad f'_b=-1.49$$
$$\Rightarrow n\equiv y+1.25=\frac{-1.49}{-3.092}(x+0.273)\Rightarrow n\equiv y=0.4819x-1.1184$$

Exemple 18b (Fig 16)

$$\text{Conique : } 3xy-y+x+1=0 \qquad \text{Normale au point : } T_3(1,-1)$$
$$\text{Exemple 11}\Rightarrow f'_a=-2,\ f'_b=2$$
$$\Rightarrow n\equiv y+1=\frac{2}{-2}(x-1)\Rightarrow n\equiv y=-x$$

9 – 2 Normales issues d'un point donné : P (a, b,c).

Il n'y a pas de « formule magique » qui donne immédiatement la réponse. Soit N (x , y) , le pied de la normale qui appartient en même temps à la conique et à la normale que passe par le point P , d'où le système :

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ y-b=\dfrac{f'_b}{f'_a}(x-a) \end{cases}$$

Note : La deuxième équation est une hyperbole équilatère. Il y a en général 4 normales issues d'un même point à une conique. Les pieds de ces quatre normales se trouvent sur cette hyperbole, qui passe par le centre de la conique, par le point donné, et a des asymptotes parallèles aux axes de symétrie de la conique. C'est l'**hyperbole équilatère d'Apollonius**.

Exemple 19

Voir exercices récapitulatifs à la fin.

9 – 3 Normales parallèles à une direction donnée m.

L'équation est :

$$\boxed{mf'_x - f'_y = 0}$$

Cette droite est la droite des **pieds des normales**. Il y a en générale deux normales parallèles à une direction donnée.

Exemple 20a (Fig 15)

$$\text{Conique} : 2x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \quad \text{Direction } : m = 2 \quad \begin{cases} f'_x = 4x - 2 \\ f'_y = 2y + 1 \end{cases}$$

$$c_3 \equiv 2(4x-2) - (2y+1) = 0 \Rightarrow c_3 \equiv 8x - 2y - 5 = 0$$

$$c_3 \cap C : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \\ 8x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 18x^2 - 18x + \frac{11}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1(0.8118, 0.7472) \\ N_2(0.1882, -1.7472) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 \equiv y = 2x - 0.876 \\ n_2 \equiv y = 2x - 2.124 \end{cases}$$

Exemple 20b (Fig 16)

$$\text{Conique} : 3xy - y + x + 1 = 0 \qquad \text{Direction} : m = -\frac{1}{2} \qquad \begin{cases} f'_x = 3y + z \\ f'_y = 3x - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Corde des pieds des normales} : \ c_2 \equiv -\frac{1}{2}(3y+1) - 3x + 1 = 0 \Rightarrow c_2 \equiv y = -2x + \frac{1}{3}$$

$$c_2 \cap C : \begin{cases} 3xy - y + x + 1 = 0 \\ y = -2x + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = T_4 = (-0.1381, 0.6095) \\ N_2 = T_5 = (0.8047, -1.2761) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 0.54 \\ n_2 \equiv y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

10 – Centres

On appelle **centre** d'une courbe un point qui divise en deux parties égales tout segment passant par ce point et limité à la courbe.

Soit le centre $O(a,b)$. Transportons le repère à ce centre par translation des axes,

en faisant le changement de variable $\begin{cases} x \to x+a \\ y \to y+a \end{cases}$

L'équation de la conique devient : $Ax^2+Bxy+Cy^2+xf'_a+yf'_b+f(a,b)=0$

Or si la courbe est centrée sur O, les termes du premier degré sont nuls.

Donc a et b sont solutions du système : $\boxed{\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}}$

Cette formule est particulièrement intéressante pour la réduction des coniques.

Exemple 21a

$$\text{Conique : } 2x^2-2xy+y^2+x-2y-2=0 \;\to \begin{cases} f'_x \equiv 4x-2y+1=0 \\ f'_y \equiv -2x+2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \Omega:\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Exemple 21b

$$\text{Conique : } x^2-6xy-2y^2+2x-8y+10=0 \;\to \begin{cases} f'_x \equiv 2x-6y+2=0 \\ f'_y \equiv -6x-4y-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega:\left(-\frac{14}{11},-\frac{1}{11}\right) \simeq (-1.2727,-0.0909)$$

11 – Diamètres, axes, sommets, demi-axes, foyers.

Un **diamètre** est une corde qui passe par le centre. L'équation générale d'un diamètre sera donc :

$$\boxed{f'_x+\lambda f'_y=0 \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel}}$$

Les diamètres les plus intéressants sont les **axes de symétries**. Si ces axes sont pris comme repère la conique s'exprime sous forme réduite : les termes en xy , en x et en y auront disparu.

Pour les **coniques centrées**, les pentes des axes de symétrie sont données par l'équation :

$$\boxed{Bm^2+(A-C)m-B=0}$$

Cette formule sera expliquée plus loin.

Pour les **paraboles**, la direction de l'axe de symétrie est :

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{C}{B}$$

Et l'équation de l'axe est :

$$\boxed{f_x^{'}+\frac{C}{B}f_y^{'}=0 \quad \text{ou} \quad f_x^{'}+\frac{B}{A}f_y^{'}=0}$$

Les pentes étant connues, il est facile d'obtenir l'équation des axes, et les coordonnées des **sommets** qui sont les intersections des axes avec la conique. Les demi-axes, foyers et directrices sont alors faciles à obtenir.

Exemple 22a (Fig 17)

$$\text{Conique : } 2x^2-2xy+y^2+x-2y-2=0 \quad \rightarrow \begin{cases} f'_x \equiv 4x-2y+1=0 \\ f'_y \equiv -2x+2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \Omega:\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Axes :

Directions : $Bm^2+(A-C)m+1=0 \Rightarrow -m^2+m+1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1=1.6180 \\ m_2=-0.6180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv y=1.618x+0.691 \\ a_2 \equiv y=-0.618x+1.809 \end{cases}$$

Sommets :

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2+x-2y-2=0 \\ y=1.618x+0.691 \end{cases} \Rightarrow 1.3819x^2-1.3819x-2.9045=0 \Rightarrow \begin{cases} S_1=(2.0336,3.9813) \\ S_2=(-1.0336,-0.9813) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2+x-2y-2=0 \\ y=-0.618x+1.809 \end{cases} \Rightarrow 3.6179x^2-3.6179x-2.3455=0 \Rightarrow \begin{cases} S_3=(-0.4478,2.0858) \\ S_4=(1.4478,0.9142) \end{cases}$$

Il y a 4 sommets, c'est donc une ellipse.

$$\overline{\Omega S_1}=\sqrt{(0.5-2.0335)^2+(1.5-3.9813)^2}=2.917$$

$$\overline{\Omega S_3}=\sqrt{(0.5+0.4478)^2+(1.5-2.0858)^2}=1.114$$

On en déduit :

Demi-grand axe : $a=2.917$

Demi-petit axe : $b=1.114$

On en déduit aussi que a_1 est l'axe principal.

Distance focale :

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2.917^2-1.114^2}=2.696$$

Foyers :

Définissons le vecteur unitaire : $\vec{v_1}=\frac{\overrightarrow{\Omega S_1}}{\left\|\overrightarrow{\Omega S_1}\right\|}=\frac{\overrightarrow{\Omega S_1}}{a}=\frac{1}{2.917}\begin{pmatrix}1.5335 \\ 2.4813\end{pmatrix}$

Remarquons que ce vecteur n'est rien d'autre que le vecteur propre v_1 définit au chapitre I.
On obtient alors les coordonnées des foyers :

$$F=\Omega \pm c.\vec{v_1}$$

C'est-à-dire, ici,

$$\begin{cases} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \dfrac{2.696}{2.917}\begin{pmatrix} 1.5335 \\ 2.4813 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9172 \\ 3.7931 \end{pmatrix} \\ F_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \dfrac{2.696}{2.917}\begin{pmatrix} 1.5335 \\ 2.4813 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9173 \\ -0.7932 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Directrices :

Distance des directrices du centre : $\overline{\Omega D} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{2.917^2}{2.696} = 3.1561$

Coordonnées du pied des directrices :

$$D = \Omega \pm \overline{OD}.\vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \dfrac{3.1561}{2.917}\begin{pmatrix} 1.5335 \\ 2.4813 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1592 \\ 4.1847 \end{pmatrix} \\ D_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \dfrac{3.1561}{2.917}\begin{pmatrix} 1.5335 \\ 2.4813 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1592 \\ -1.1847 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Equation des directrices :

Les directrices sont parallèles à l'axe secondaire donc de direction : $m_2 = -0.6180$

$$\begin{cases} d_1 \equiv y - 4.1847 = -0.6180(x - 2.1592) \Rightarrow d_1 \equiv y = -0.618x + 5.519 \\ d_2 \equiv y + 1.1847 = -0.6180(x + 1.1592) \Rightarrow d_1 \equiv y = -0.618x - 1.9014 \end{cases}$$

On remarquera que nous avons donc déterminé les éléments principaux de cette conique sans la réduire.

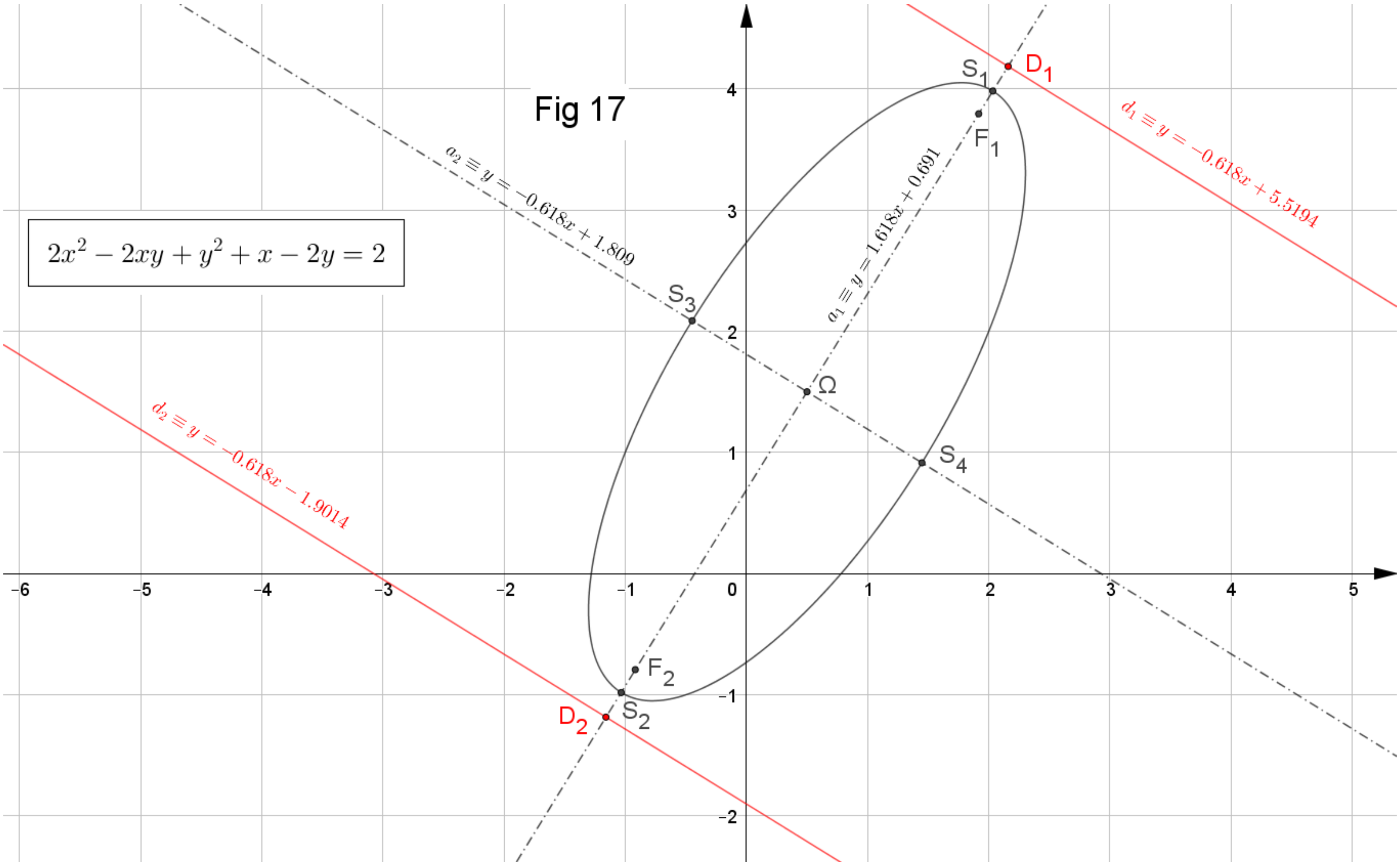


Fig 17
$2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y = 2$
$a_2 \equiv y = -0.618x + 1.809$
$a_1 \equiv y = 1.618x + 0.691$
$d_1 \equiv y = -0.618x + 5.5194$
$d_2 \equiv y = -0.618x - 1.9014$
S_1
D_1
F_1
S_3
Ω
S_4
F_2
S_2
D_2

12 – Asymptotes

Les asymptotes passent par le centre et leurs coefficients angulaires sont donnés par :

$$\boxed{Ct^2 + Bt + A = 0}$$

L'hyperbole a deux asymptotes réelles. L'ellipse a deux asymptotes imaginaires. La parabole à proprement parler n'a pas d'asymptote, mais en coordonnées homogène, elle s'écrit $Z = 0$, c'est la droite de l'infini : La parabole est tangente à la droite de l'infini.

Cette équation fournit un moyen simple de trouver le genre de la conique.

Ellipse	$B^2 - 4AC < 0$	Deux asymptotes imaginaires
Hyperbole	$B^2 - 4AC > 0$	Deux asymptotes réelles
Parabole	$B^2 - 4AC = 0$	Pas d'asymptote

Exemple 22b (Fig 18)

Conique : $x^2 - xy - 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x \equiv 2x - 6y + 2 = 0 \\ f'_y \equiv -6x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Omega = \left(-\frac{14}{11}, -\frac{1}{11}\right) = (-1.2727, 0.0909)$$

Axes :

Directions : $Bm^2 + (A - C)m + 1 = 0 \Rightarrow -3m^2 + 3m + 3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1.6180 \\ m_2 = -0.6180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv y = 1.618x + 1.9684 \\ a_2 \equiv y = -0.618x - 0.8775 \end{cases}$$

Sommets :

$$\begin{cases} x^2 - 6xy - 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ y = 1.618x + 1.9684 \end{cases} \Rightarrow -13.944x^2 - 35.434x - 13.496 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = (-0.4653, 1.2155) \\ S_2 = (-2.0802, -1.3974) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y - 2 = 0 \\ y = -0.618x - 0.8775 \end{cases} \Rightarrow \text{Pas de solutions}$$

Il y a 2 sommets, c'est donc une hyperbole.

On en déduit aussi que a_1 est l'axe principal.

Asymptotes :

$$Ct^2 + Bt + A = 0 \Rightarrow -2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -3.1583 \\ t_2 = 0.1583 \end{cases}$$

Les équations des asymptotes sont :

$$\begin{cases} as_1 \equiv y - 0.0909 = -3.1583(x + 1.2727) \Rightarrow as_1 \equiv y = -3.1583x - 4.1106 \\ as_2 \equiv y - 0.0909 = 0.1583(x + 1.2727) \quad \Rightarrow as_1 \equiv y = 0.1583x + 0.1106 \end{cases}$$

L'angle φ entre a_1 et as_1 est :

$$\tan\varphi = \frac{t_1 - m_1}{1 + t_1 m_1} = \frac{-3.1583 - 1.6180}{1 - 3.1583 \times 1.6180} = 1.1621 \Rightarrow \varphi = 49.29°$$

Demi-axes :

$$\overline{\Omega S_1} = \sqrt{(-1.2727 - 0.4653)^2 + (-0.0909 - 1.2155)^2} = 1.5358$$

On en déduit :

Demi-axe principal: $a = 1.5358$

Demi-axe secondaire : $b = a\tan\varphi = 1.5358 \times 1.1621 = 1.7847$

Distance focale :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1.5358^2 + 1.7847^2} = 2.3545$$

Foyers :

Définissons le vecteur unitaire :

$$\vec{v_1} = \frac{\overrightarrow{\Omega S_1}}{\left\|\overrightarrow{\Omega S_1}\right\|} = \frac{\overrightarrow{\Omega S_1}}{a} = \frac{1}{1.5348}\begin{pmatrix} -0.4653 + 1.2727 \\ 1.2155 + 0.0909 \end{pmatrix} = \frac{1}{1.5348}\begin{pmatrix} 0.8074 \\ 1.3064 \end{pmatrix}$$

Remarquons que ce vecteur n'est rien d'autre que le vecteur propre v_1 définit au chapitre I.
On obtient alors les coordonnées des foyers :

$$F = \Omega \pm c.\vec{v_1}$$

C'est-à-dire, ici,

$$\begin{cases} F_1 = \begin{pmatrix} -1.2727 \\ -0.0909 \end{pmatrix} + \dfrac{2.3545}{1.5348}\begin{pmatrix} 0.8074 \\ 1.3064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0341 \\ 1.9123 \end{pmatrix} \\ F_2 = \begin{pmatrix} -1.2727 \\ -0.0909 \end{pmatrix} - \dfrac{2.3545}{1.5348}\begin{pmatrix} 0.8074 \\ 1.3064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5113 \\ -2.0950 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Directrices :

Distance des directrices du centre : $\overline{\Omega D} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{1.5358^2}{2.3545} = 1.0018$

Coordonnées du pied des directrices :

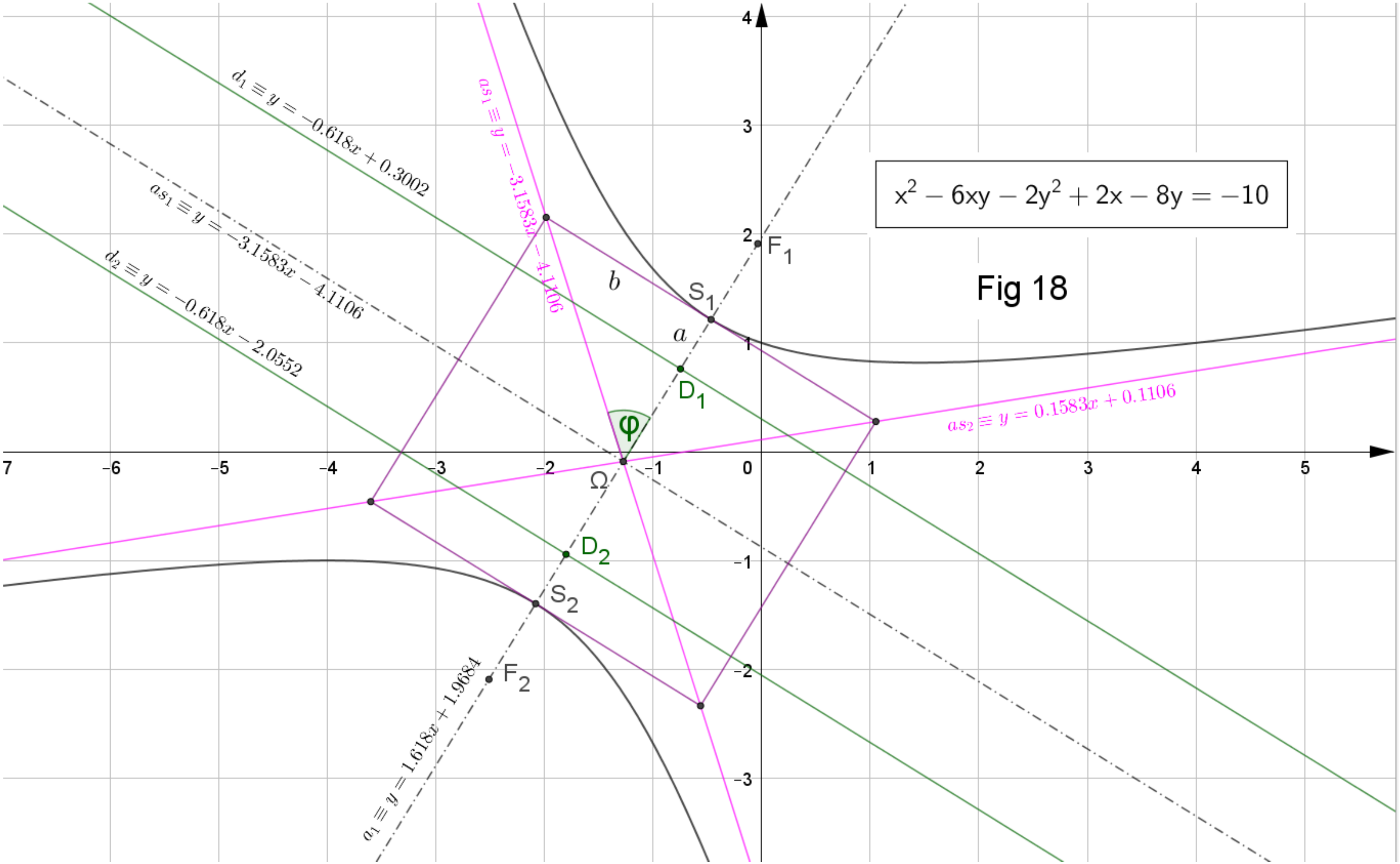
$$D = \Omega \pm \overline{OD}.\vec{v_1} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \begin{pmatrix} -1.2727 \\ -0.0909 \end{pmatrix} + \dfrac{1.0018}{1.5348}\begin{pmatrix} 0.8074 \\ 1.3064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7457 \\ 0.7618 \end{pmatrix} \\ D_2 = \begin{pmatrix} -1.2727 \\ -0.0909 \end{pmatrix} - \dfrac{1.0018}{1.5348}\begin{pmatrix} 0.8074 \\ 1.3064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7997 \\ -0.9436 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Equation des directrices :

Les directrices sont parallèles à l'axe secondaire donc de direction : $m_2 = -0.6180$

$$\begin{cases} d_1 \equiv y - 0.7618 = -0.6180(x + 0.7457) \Rightarrow d_1 \equiv y = -0.618x + 0.3002 \\ d_2 \equiv y + 0.9436 = -0.6180(x + 1.7997) \Rightarrow d_1 \equiv y = -0.618x - 2.0552 \end{cases}$$

On remarquera que nous avons donc déterminé les éléments principaux de cette conique sans la réduire.


$x^2 - 6xy - 2y^2 + 2x - 8y = -10$
Fig 18
$d_1 \equiv y = -0.618x + 0.3002$
$d_2 \equiv y = -0.618x - 2.0552$
$as_1 \equiv y = -3.1583x - 4.1106$
$as_2 \equiv y = 0.1583x + 0.1106$
$a_1 \equiv y = 1.618x + 1.9684$
F_1
F_2
S_1
S_2
D_1
D_2
Ω
φ
a
b

13 - Réduction des coniques

La méthode ci-dessous en très bien adaptée lorsque l'on travaille dans le plan. Si on se trouve dans l'espace à trois dimensions, la méthode des valeurs propres et des vecteurs propres est plus efficace, d'autant plus que les logiciels comme Mathlab, Scilab, Maple, etc…permettent d'effectuer facilement ces calculs.

13 – 1 Elimination des termes du premier degré.

L'élimination des termes du premier degré (en x et y) s'obtient en faisant une **translation** des axes au centre de la conique

Exemple 23a

Conique : $2x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y - 2 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} f'_x \equiv 4x - 2y + 1 = 0 \\ f'_y \equiv -2x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Omega : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

On fait le changement de variable : $\begin{cases} x \to X + \frac{1}{2} \\ y \to Y + \frac{3}{2} \end{cases}$

On remplace dans l'équation de la conique: $2X^2 - -XY + Y^2 - 3.25 = 0$

Les termes du premier degré ont disparu

Exemple 23b

Conique : $x^2 - 6xy - 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \;\to \begin{cases} f'_x \equiv 2x - 6y + 2 = 0 \\ f'_y \equiv -6x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Omega : \left(-\frac{11}{4}, -\frac{1}{11}\right) \simeq (-1.2727, -0.0909)$

On fait le changement de variable : $\begin{cases} x \to X + \frac{1}{2} \\ y \to Y + \frac{3}{2} \end{cases}$

On remplace dans l'équation de la conique: $\Rightarrow X^2 - 6XY + 2Y^2 + 9.0909 = 0$

Les termes du premier degré ont disparu

13 – 2 Elimination du terme en xy.

L'élimination du terme en *xy* s'obtient en faisant une **rotation** des axes.
Si le système des axes coordonnés tourne d'un angle α, on peut exprimer les coordonnées dans le nouveau système grâce aux formules de transformation suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}}$$

Ces formules sont faciles à établir. (Voir n'importe quel cours de géométrie)
Remplaçons dans l'équation de la conique centrée en Ω : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + A\cos^2\alpha\right)x'^2 \\ &\quad + \left[2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + 2B\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\right]x'y' \\ &\quad + \left(C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + A\sin^2\alpha\right)y'^2 + F = 0 \end{aligned}$$

Si le terme en $x'y'$ est nul :

$$2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + 2B\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = (C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{2B}{A-C}}$$

On aurait pu aussi diviser par $\cos^2\alpha$:

$$\rightarrow B\tan^2\alpha + (A-C)\tan\alpha - B = 0 \rightarrow \boxed{Bm^2 + (A-C)m - B = 0}$$

Ce qui démontre la formule donnée plus tôt. Cela montre aussi que la rotation effectuée doit amener les axes de coordonnées à coïncider avec les axes de symétrie de la conique.

Exemple 24a

$C \equiv 2x^2 - 2xy + y^2 = 3.25$

Calculons : $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = -2 \rightarrow 2\alpha = 116.5651° \rightarrow \alpha = 58.2826°$

Faisons maintenant une rotation pour réduire la conique

$\alpha = 58.2826° \rightarrow \cos\alpha = 0.5257$ et $\sin\alpha = 0.8507$

Changement de variable : $\begin{cases} x = \cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y' \\ y = \sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.5257x' - 0.8507y' \\ y = 0.8507x' + 0.5257y' \end{cases}$

On remplace, et après calcul on obtient

$0.3820x^2 + 2.6182y^2 = 3.25 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{2.9168^2} + \dfrac{y^2}{1.1141^2} = 1.$ C'est une ellipse.

Ce qui confirme les calculs de l'exemple 22a.

Exemple 25b

$C \equiv x^2 - 6xy - 2y^2 = -9.0909$

Calculons : $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = -2 \rightarrow 2\alpha = 116.5651° \rightarrow \alpha = 58.2826°$

Faisons maintenant une rotation pour réduire la conique

$\alpha = 58.2826° \rightarrow \cos\alpha = 0.5257$ et $\sin\alpha = 0.8507$

Changement de variable : $\begin{cases} x = \cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y' \\ y = \sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.5257x' - 0.8507y' \\ y = 0.8507x' + 0.5257y' \end{cases}$

On remplace, et après calcul on obtient

$-3.8543x^2 + 2.8542y^2 = -9.0909 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{1.5358^2} + \dfrac{y^2}{1.7847^2} = 1.$ C'est une hyperbole.

Ce qui confirme les calculs de l'exemple 22b.

14 - Exercices récapitulatifs

14 – 1 Soit la conique : $C \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144$**. Déterminer les normales issues du point I :(1,1) ainsi que les tangentes à la conique aux pieds des normales**

Note : Pour ce genre de problème, il est souvent préférable de travailler avec une conique sous forme réduite, sous peine de devoir manipuler des calculs assez fastidieux. Une fois les normales déterminées, il est facile de revenir au repère de base.

$C \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144 \rightarrow C \equiv \dfrac{x^2}{6^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

La conique est une ellipse centrée, de demi-axes : 3 et 2.

On a : $\begin{cases} f'_x = 8x \\ f'_y = 18y \end{cases}$ L'équation de l'hyperbole d'Appolonius qui détermine

les pieds des normales issue de $I(1,1)$ est

$H_A \equiv y - 1 = \dfrac{f'_y}{f'_x}(x-1) \rightarrow y - 1 = \dfrac{4y}{9x}(x-1) \rightarrow H_A \equiv 5xy + 4x - 9y = 0$

C'est bien une hyperbole équilatère qui passe par le centre de C et le point I.

Ces axes sont parallèles au répère et son centre est $\begin{cases} f'_x = 5y + 4 = 0 \\ f'_y = 5x - 9 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow O_{H_A} : (1.8, -0.8)$

De l'équation de H_A, on tire : $y = \dfrac{4x}{9-5x}$. On remplace dans l'équation de C et on obtient : $50x^4 - 180x^3 - 1566x^2 + 6480x - 5832 = 0$

Avec une machine électronique, on calcule facilement les racines :

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -5.929 & \rightarrow y_1 = -0.614 \\ x_2 = \ \ 1.492 & \rightarrow y_2 = \ \ 3.874 \\ x_3 = \ \ 2.297 & \rightarrow y_3 = -3.695 \\ x_4 = \ \ 5.740 & \rightarrow y_4 = -1.166 \end{cases}$$ Il y a donc 4 normales.

A ce stade, il est conseillé de vérifier que les coordonnées des points obtenus appartiennent bien à la conique C et à l'hyperbole H_A

Considérons le pied de la première normale :$N_1(-5.929, -0.614)$

La pente de la normale n_1 en N_1 est : $m_{n_1} = \dfrac{f'_b}{f'_a} = \dfrac{9 \times (-0.614)}{4 \times (-5.929)} = 0.233$

Puisque n_1 passe par N_1 et I, on peut calculer m_{n_1} d'une autre façon:

$m_{n_1} = \dfrac{-0.614 - 1}{-5.929 - 1} = 0.233$ Ce qui est bien la même valeur.

La pente de la tangente t_1 en N_1 est : $m_{t_1} = -\dfrac{f'_b}{f'_a} = -\dfrac{4 \times (-5.929)}{9 \times (-0.614)} = -4.294$

On vérifie que : $m_{t_1} = -\dfrac{1}{m_{n_1}}$. La normale et la tangente sont bien perpendiculaires

Il ne reste plus qu'à écrire les équations de la normale et de la tangente:

$$\begin{cases} n_1 \equiv y - 1 = 0.233(x-1) & \Rightarrow n_1 \equiv 0.233x - y + 0.767 \\ t_1 \equiv y - 0.614 = -4.294(x + 5.929) & \Rightarrow t_1 \equiv 4.294x + y + 26.072 \end{cases}$$

On recommence pour les autres points et on obtient :

	Pied de la normale	Pente de la normale	Pente de la tangente	Equation de la normale	Equation de la tangente
1	$\begin{pmatrix} -5.929 \\ -0.614 \end{pmatrix}$	0.233	-4.294	$y = 0.233x + 0.767$	$y = -4.294x - 26.072$
2	$\begin{pmatrix} 1.492 \\ 3.874 \end{pmatrix}$	5.843	-0.171	$y = 5.843 - 4.843$	$y = -0.171x + 4.130$
3	$\begin{pmatrix} 2.297 \\ -3.695 \end{pmatrix}$	-3.619	0.276	$y = -3.619x + 4.619$	$y = 0.276x - 4.330$
4	$\begin{pmatrix} 5.740 \\ -1.166 \end{pmatrix}$	-0.457	2.189	$y = -0.457x + 1.457$	$y = 2.189x - 13.728$

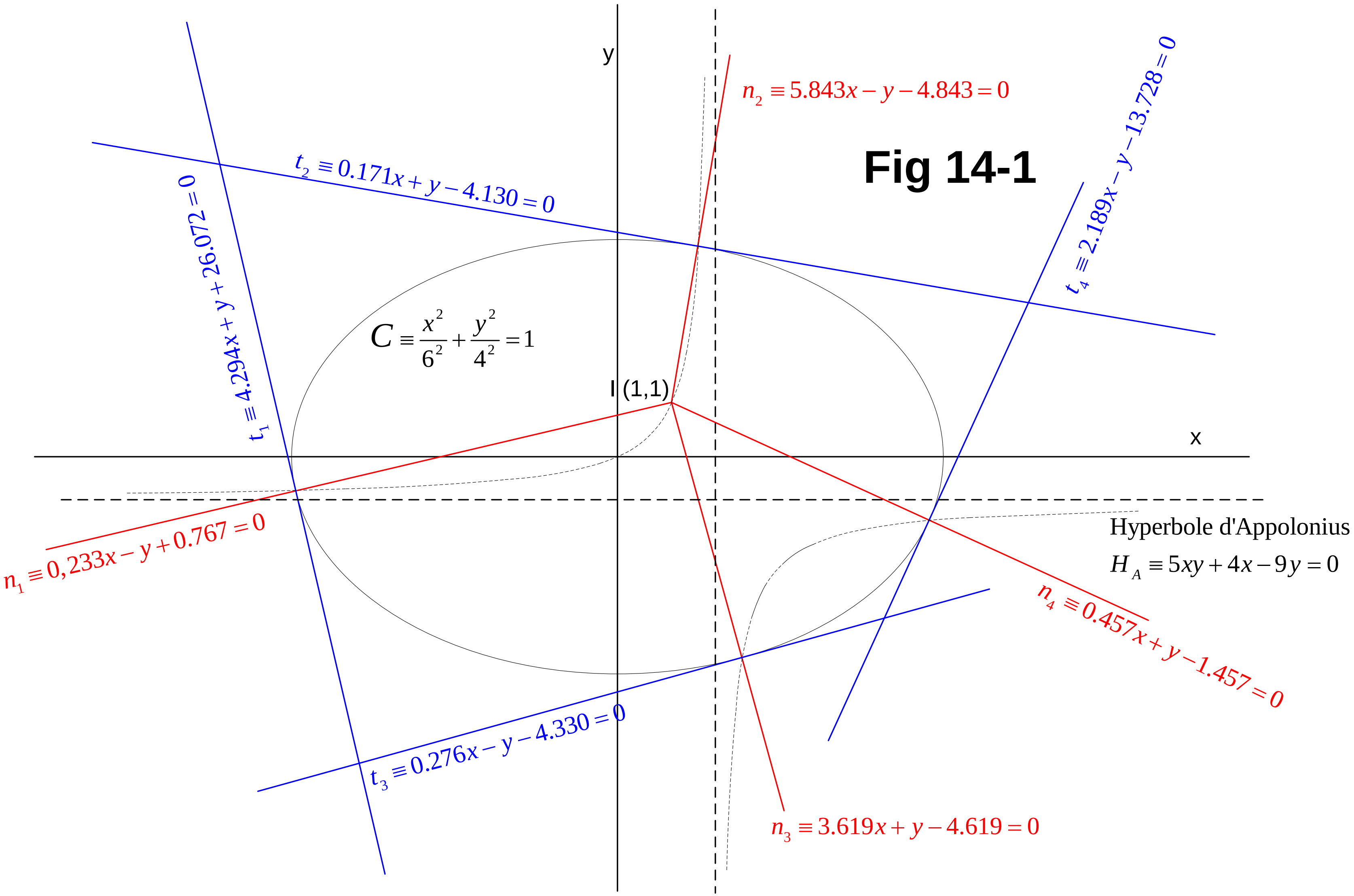


Fig 14-1
y
x
I (1,1)
$C \equiv \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
$n_2 \equiv 5.843x - y - 4.843 = 0$
$t_2 \equiv 0.171x + y - 4.130 = 0$
$t_1 \equiv 4.294x + y + 26.072 = 0$
$t_4 \equiv 2.189x - y - 13.728 = 0$
$n_1 \equiv 0,233x - y + 0.767 = 0$
Hyperbole d'Appolonius
$H_A \equiv 5xy + 4x - 9y = 0$
$n_4 \equiv 0.457x + y - 1.457 = 0$
$t_3 \equiv 0.276x - y - 4.330 = 0$
$n_3 \equiv 3.619x + y - 4.619 = 0$

14 – 2 Soit la conique :

$$C \equiv y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)y + 6 - 6\sqrt{3} = 0.$$

<u>Sans réduire la conique</u>, déterminer le genre de la conique, le centre, les axes, les asymptotes (s'il y en a), les coordonnées des foyers, les tangentes issues du point (5, -3), la corde de contact des tangentes et les points de tangence.

1) <u>Genre de la conique</u> $B^2 - 4AC = 3 > 0$. C'est donc une hyperbole.

2) <u>Centre de la conique</u> $\begin{cases} f'_x = -\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0 \\ f'_y = 2y - \sqrt{3}x + 4 - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases} \rightarrow O' : \left(-3, -2\right)$

3) <u>Les axes</u> Les pentes des axes sont donnés par : $Bm^2 + 2\left(A - C\right)m - B = 0$

$\rightarrow -\sqrt{3}m^2 - 2m + \sqrt{3} = 0 \rightarrow \begin{cases} m_{a1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ m_{a2} = -\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$ Les équations des axes : $\begin{cases} a_1 \equiv y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 2 \\ a_2 \equiv y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 2 \end{cases}$

4) <u>Sommets</u> Ils sont donnés par l'intersection d'un axe et de la conique.

Prenons a_1 et remplaçons y dans l'équation de la conique.

Après simplification : $x^2 + 6x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{3} \cong -4.732 \\ x_2 = -3 + \sqrt{3} \cong -1.268 \end{cases}$

Ce qui donne les deux sommets : $S_1 : \left(-4.732; -3\right)$ et $S_2 : \left(-1.268; -1\right)$

5) <u>Foyers</u>

Utilisons deux méthodes différentes

Méthode 1 : On calcule la distance $O'S_1$: ce qui correspond au "a" dans l'équation réduite de la conique. Ensuite, on calcule l'intersection P de l'asymptote as_1 avec la tangente en S_1 qui est parallèle à l'axe a_2. La distance $O'P$ donne le "b" ce qui permet de calculer la distance entre O' et les foyers : $c^2 = a^2 + b^2$

$$t_{S_1} \equiv y + 3 = -\sqrt{3}\left(x + 3 + 3\sqrt{3}\right) \rightarrow t_{S_1} \equiv y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 12$$

$$P : \begin{cases} t_{S_1} \equiv y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 12 \\ as_1 \equiv y = -2 \end{cases} \rightarrow P : \left(-\frac{10\sqrt{3} + 9}{3}; -2 \right)$$

$$b = \left|OP\right| = \sqrt{\left(-\frac{10\sqrt{3} + 9}{3} + 3\sqrt{3} \right)^2 + \left(-2 + 3\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow c = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cong 2.309$$

La distance des foyers à O' vaut c. Soient $(x_F\,;y_F)$ les coordonnées d'un des foyers.

$$\to \begin{cases} \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (-3-x_F)^2 + (-2-y_F)^2 \\ y_F = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x_F + \sqrt{3}-2 \quad (\text{Le foyer appartient aussi à } a_1) \end{cases} \to (x_F+3)^2 = 4 \to \begin{cases} x_{F_2} = -1 \\ x_{F_1} = -5 \end{cases}$$

Ce qui donne les coordonnées des foyers : $F_1\left(-5;-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2\right)$ et $F_2\left(-1;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2\right)$

Méthode 2 : Il n'est pas nécessaire de calculer le point P pour obtenir "b"

En effet, si α est l'angle entre l'axe a_1 et l'asymptote as_1, alors $b = a\tan\alpha$.

$$\text{Or } \tan\alpha = \frac{m_{a_1} - m_{as_1}}{1 + m_{a_1}.m_{as_1}} \to b = 2\times\frac{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Le reste est identique à la méthode 1.

6) Les tangentes La conique s'écrit en coordonnées homogènes :

$$\mathcal{C} \equiv y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}xz + \left(4-3\sqrt{3}\right)yz + \left(6-6\sqrt{3}\right)z^2 = 0$$

Et le point $I : (5,-3,1)$

Donc : $f(a,b,c) = 3 + 8\sqrt{3} \cong 16{,}856$

$$\begin{cases} f'_x = -\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z \\ f'_y = 2y - \sqrt{3}x + \left(4-3\sqrt{3}\right)y \\ f'_z = -2\sqrt{3}x + \left(4-3\sqrt{3}\right)y + 12\left(1-\sqrt{3}\right)z \end{cases} \to \begin{cases} f'_a = \sqrt{3} \cong 1{,}732 \\ f'_b = -2-\sqrt{3} \cong -15{,}856 \\ f'_c = -13\sqrt{3} \cong -22{,}517 \end{cases}$$

Les pentes des tangentes sont données par :

$$\left[(f'_a)^2 - 4Cf(a,b,c)\right]m^2 + 2\left[f'_a\, f'_b - 2Bf(a,b,c)\right]m + (f'_a)^2 - 4Af(a,b,c) = 0$$

$$\to 184m^2 + 61{,}855m + 3 = 0 \to \begin{cases} m_{t_1} = -0{,}0588 \\ m_{t_2} = -0{,}2774 \end{cases}$$

$$\text{Les tangentes passent par } I \to \begin{cases} t_1 \equiv y = -0{,}0588x - 2{,}706 \\ t_2 \equiv y = -0{,}2774x - 1{,}613 \end{cases}$$

7) Corde de contact

L'équation est : $f'_a X + f'_b Y + f'_c Z = 0$

$\rightarrow \sqrt{3}x - 2\left(1+4\sqrt{3}\right)y - 12\sqrt{3} = 0 \ \rightarrow cc \equiv y = 0{,}109x - 1{,}42$

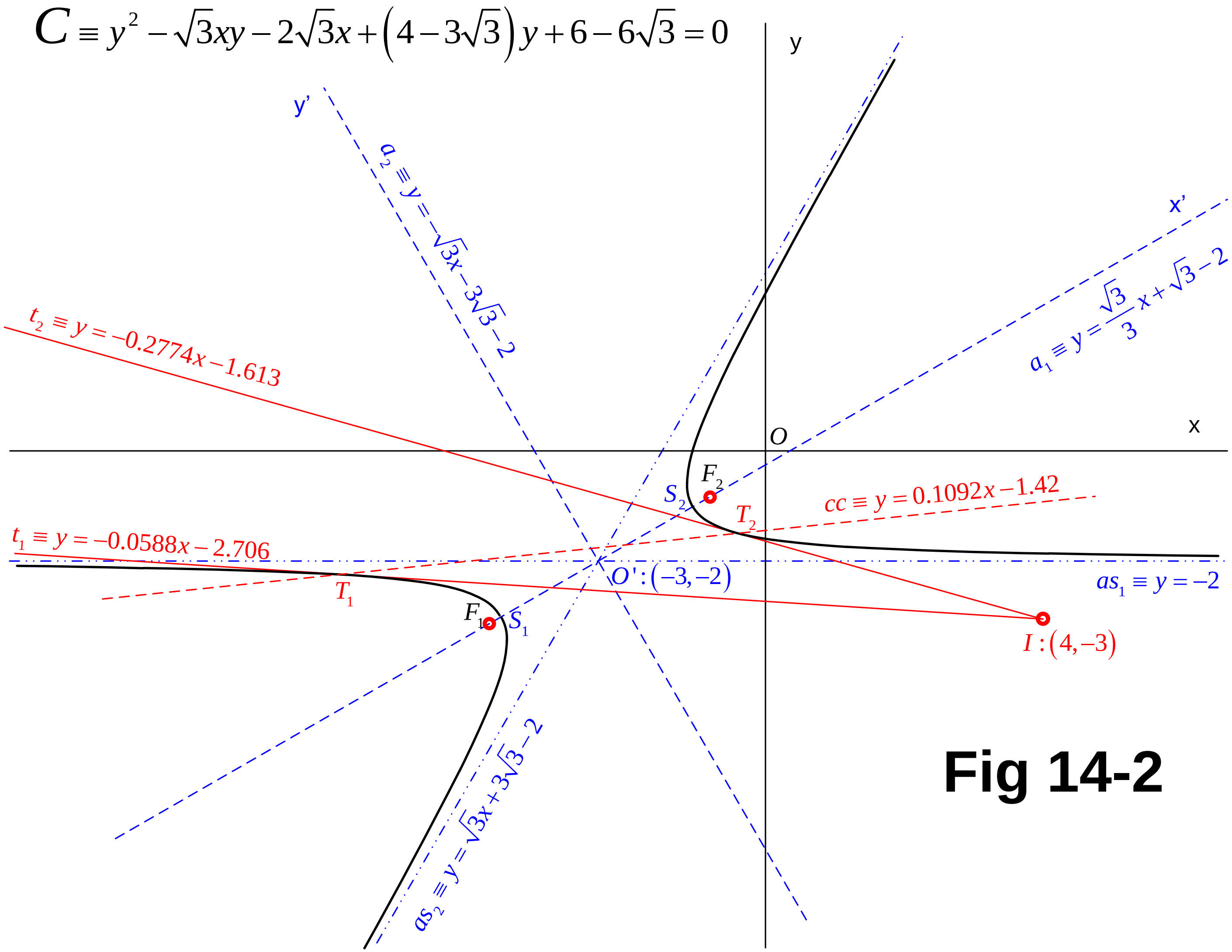
8) Points de tangence

Ils sont donnés par l'intersection des tangentes avec la corde de contact.

$$\begin{cases} cc \equiv y = 0{,}109x - 1{,}42 \\ t_1 \equiv y = -0{,}0588x - 2{,}706 \end{cases} \rightarrow T_1 : \left(-7{,}655; -2{,}256\right)$$

$$\begin{cases} cc \equiv y = 0{,}109x - 1{,}42 \\ t_1 \equiv y = -0{,}2774x - 1{,}613 \end{cases} \rightarrow T_2 : \left(-0{,}5; -1{,}475\right)$$

On vérifie facilement que T_1 et T_2 appartiennent bien à la conique C.



$C \equiv y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)y + 6 - 6\sqrt{3} = 0$
y
y'
x
x'
O
$a_2 \equiv y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 2$
$a_1 \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 2$
$t_2 \equiv y = -0.2774x - 1.613$
$t_1 \equiv y = -0.0588x - 2.706$
$cc \equiv y = 0.1092x - 1.42$
$as_1 \equiv y = -2$
$as_2 \equiv y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} - 2$
F_2
S_2
T_2
$O' : (-3, -2)$
T_1
F_1
S_1
$I : (4, -3)$

Fig 14-2

14 – 3 Soit la conique :

$$C \equiv 21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 + \left(20\sqrt{3} - 126\right)x + \left(30\sqrt{3} - 124\right)y - \left(263 + 60\sqrt{3}\right) = 0$$

Déterminer le genre de la conique, le centre, les axes, les asymptotes (s'il y en a), les coordonnées des foyers.

Déterminer, les tangentes et les normales parallèles à la direction : $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **.**

1) <u>Genre</u> : $B^2 - 4AC = 100 \times 3 - 4 \times 21 \times 31 < 0$

$\rightarrow$ Ellipse (Donc pas d'asymptotes réelles)

2) <u>Centre</u> : $\begin{cases} f'_x = 42x - 10\sqrt{3}y - 126 + 20\sqrt{3} = 0 \\ f'_y = -10\sqrt{3}x + 62y - 124 + 30\sqrt{3} = 0 \end{cases} \rightarrow O'(3,2)$

3) <u>Axes</u> : L'équation des axes est : $Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0$

$$\rightarrow -10\sqrt{3}m^2 + 2(21 - 31)m + 10\sqrt{3} = 0 \rightarrow \begin{cases} m_{a_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ m_{a_2} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Les axes passent par le centre :

$$\begin{cases} a_1 \equiv y - 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) \\ a_2 \equiv y - 2 = -\sqrt{3}(x - 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} + 2 \\ a_2 \equiv y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

4) <u>Réduction de la conique</u>

Les axes a_1, a_2 et le centre O' définissent un nouveau système d'axes $x'O'y'$.

4.1) Translation au centre : on remplace dans C , x par $x - 3$ et y par $y - 2$

$\rightarrow$ Après simplication : $21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 576 \qquad (1)$

4.2) Rotation d'un angle α avec $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30° \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

On remplace dans $(1) \rightarrow \; 16x'^2 + 36y'^2 = 576 \rightarrow C' \equiv \dfrac{x'^2}{6^2} + \dfrac{y'^2}{4^2} = 1$

5) Sommets, foyers

Dans le système $x'O'y'$, les sommets sont :$(6,0);(0,4);(-6,0);(0,-4)$

Et comme : $c^2 = a^2 - b^2 = 2\sqrt{5}$, les foyers : $\left(2\sqrt{5},0\right);\left(-2\sqrt{5},0\right)$

Pour exprimer ces points dans le système xOy, on fait la rotation inverse

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{y}{2} \\ y' = +\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} \quad \text{suivit de la tanslation inverse :} \begin{cases} x \to x+3 \\ y \to y+2 \end{cases}$$

	$x'O'y'$	Rotation		Translation	xOy
Sommets	$(6,0)$	$\to$	$\left(3\sqrt{3},3\right)$	$\to$	$\left(3\sqrt{3}+3,5\right)$
	$(0,4)$		$\left(-2,2\sqrt{3}\right)$		$\left(1,2\sqrt{3}+2\right)$
	$(-6,0)$		$\left(-3\sqrt{3},-3\right)$		$\left(-3\sqrt{3}+3,-1\right)$
	$(0,-4)$		$\left(2,-2\sqrt{3}\right)$		$\left(5,-2\sqrt{3}+2\right)$
Foyers	$\left(2\sqrt{5},0\right)$		$\left(\sqrt{15},\sqrt{5}\right)$		$\left(\sqrt{15}+3,\sqrt{5}+2\right)$
	$\left(-2\sqrt{5},0\right)$		$\left(-\sqrt{15},\sqrt{5}\right)$		$\left(-\sqrt{15}+3,-\sqrt{5}+2\right)$

Note : Pour les rotations, on peut utiliser aussi la notation matricielle.

Par exemple : $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

6) Tangentes

L'équation de la corde de contact des tangentes parallèles à une direction donnée est :

$$f'_x + mf'_y = 0 \to 42x - 10\sqrt{3}y - 126 + 20\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-10\sqrt{3}x + 62y + 30\sqrt{3} - 124\right) = 0$$

$$\to\ cc_t \equiv y = 0,979 - 0,937$$

Les coordonnées des points de tangence sont données par l'intersection de C et cc_1

On remplace donc y dans C :$\to 33,755x^2 - 202,529x - 272,206 = 0$

$$\to \begin{cases} x_1 = -1,131 \to y_1 = -2,044 \\ x_2 = 7,131 \ \to y_2 = 6,044 \end{cases} \to \begin{cases} T_1\left(-1,131;-2,044\right) \\ T_2\left(7,131;6,044\right) \end{cases}$$

Il reste plus qu'a écrire les équations des tangentes :

$$\begin{cases} t_1 \equiv y + 2,044 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x + 1,131\right) \\ t_2 \equiv y - 6,044 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x - 7,131\right) \end{cases} \to \begin{cases} t_1 \equiv y = -0,577x - 2,697 \\ t_2 \equiv y = -0,577x + 10,161 \end{cases}$$

7) <u>Normales</u>

La corde des pieds des normales est : $mf'_x - f'_y = 0$

$\rightarrow\ cc_n \equiv y = -0{,}133x + 2{,}4$

Les pieds des normales sont les intersections de C et de cc_n.

On remplace donc dans C et on obtient : $23{,}857x^2 - 143{,}153x - 361{,}255 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}913 & \rightarrow\ y_1 = 2{,}655 \\ x_2 = 7{,}914 & \rightarrow\ y_2 = 1{,}346 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1(-1{,}913; 2{,}655) \\ N_2(7{,}914; 1{,}346) \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'a écrire les équations des normales.

$$\begin{cases} n_1 \equiv y - 2{,}655 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + 1{,}913) \\ n_2 \equiv y - 1{,}346 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x - 7{,}914) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_1 \equiv y = -0{,}577x + 1{,}55 \\ n_2 \equiv y = -0{,}577x + 5{,}915 \end{cases}$$

$$C \equiv 21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 + \left(20\sqrt{3} - 126\right)x + \left(30\sqrt{3} - 124\right)y - \left(263 + 60\sqrt{3}\right) = 0$$

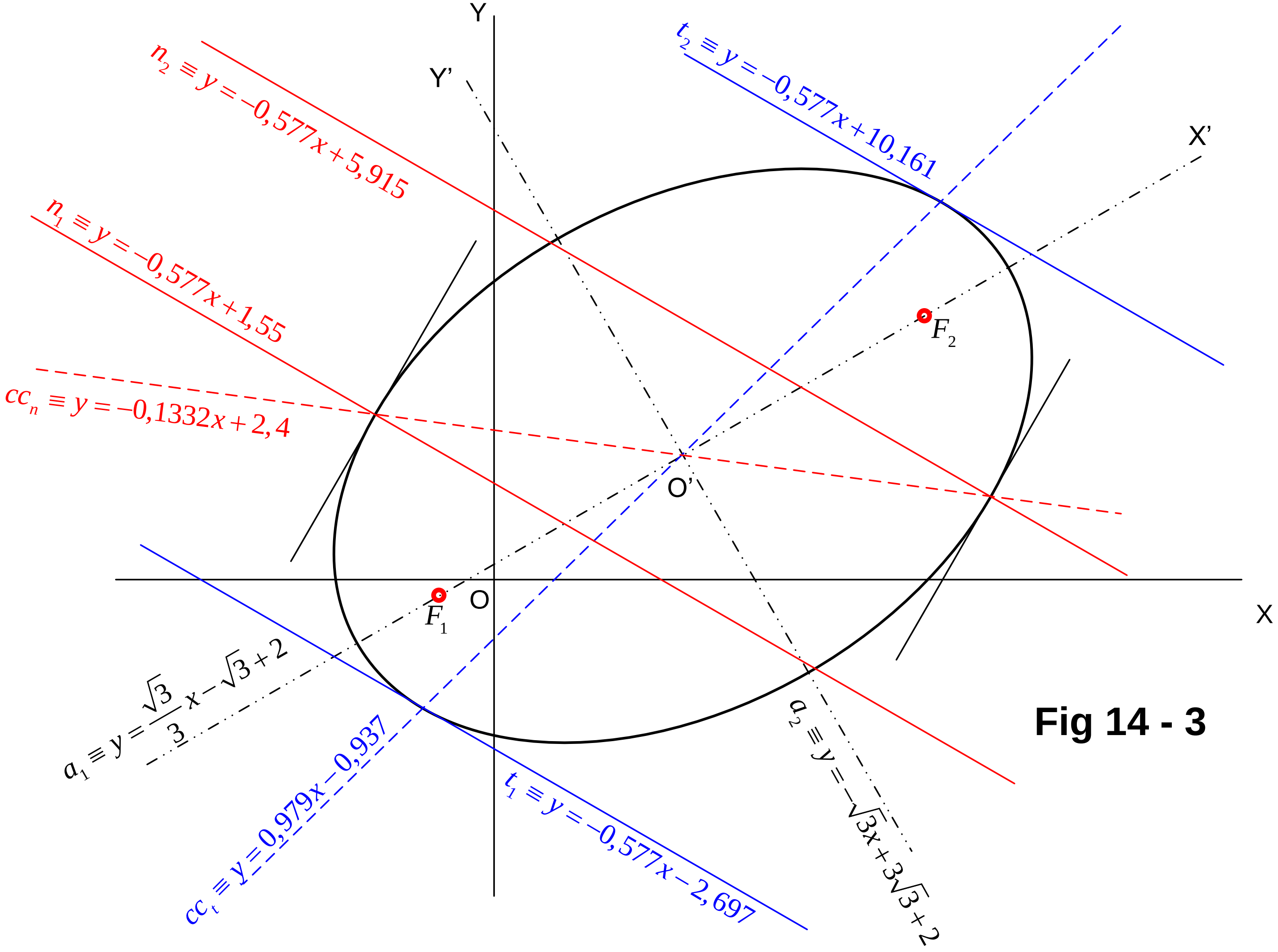


Fig 14 - 3

Chapitre IV
Détermination de coniques.
Faisceaux de coniques

1-Cas général.

Soient $S = 0$ et $S'=0$ les équations abrégées de deux coniques. On démontre que toutes les coniques passant par les points communs à $S = 0$ et $S'=0$ rentrent dans l'équation générale suivante :

$$\boxed{S+\lambda S'=0 \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

Et que réciproquement cette équation ne représente que des coniques.

Cette formule permet de déterminer très facilement un grand nombre de coniques comme le montre les cas particuliers qui suivent.

L'équation générale des coniques comprend 6 coefficients (A,B,C,D,E et F). Il faut donc connaître 5 conditions, c'est-à-dire 5 points. Un point de tangence compte pour deux conditions. Donc deux points de tangence et un point ordinaire suffisent à déterminer une conique.

2-Coniques passant par les points communs à une conique et à deux droites données.

Soient $S = 0$ et les deux droites d_1 et d_2. On considère $d_1d_2=0$ comme une conique dégénérée. L'équation générale des coniques passant par les intersections de la conique $S = 0$ et les deux droites d_1 et d_2 est :

$$\boxed{S+\lambda d_1d_2=0}$$

Exemple 27 (Fig 22)

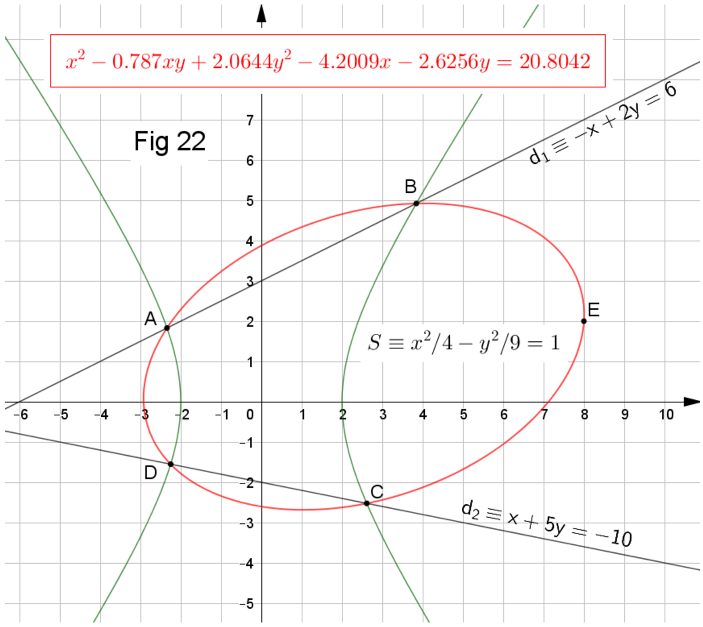
Soit la conique $S\equiv\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ et les droites $d_1\equiv -x+2y-6=0$ et $d_2\equiv x+5y+10=0$. Déterminer la conique passant par les points d'intersection de S, des deux droites et le point $E(8,2)$.

La conique cherchée est de la forme $S+\lambda d_1d_2=0$. C'est-à-dire :

$$\left(9x^2-4y^2-36\right)+\lambda\left(-x+2y-6\right)\left(x+5y+10\right)=0$$

Comme E appartient à la conique cherchée, on détermine facilement λ, en remplaçant x et y par les coordonnées de E. Ce qui donne $\lambda=1.8714$. On injecte cette valeur dans l'équation de la conique et on obtient après réduction des termes :

$$\mathscr{C} \equiv x^2 - 0.787xy + 2.064y^2 - 4.20x - 2.63y - 20.80 = 0$$



3-Coniques bitangentes à une conique donnée, la corde de contact étant donnée.

Si la droite d_1 de déplace pour coïncider avec la droite d_2 pour donner la droite c, l'équation générale devient :

$$\boxed{S + \lambda c^2 = 0}$$

Exemple 28 (Fig 23)

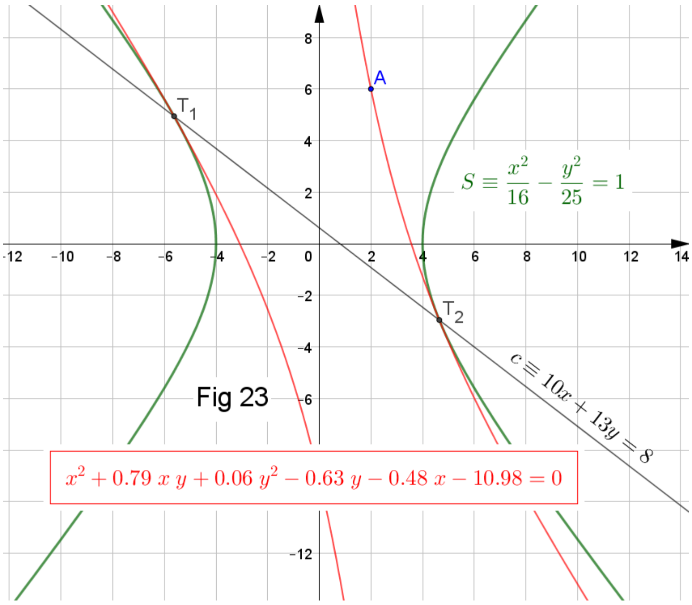
Soit la conique $S \equiv \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ et la corde de contact $c \equiv 10x + 13y - 8 = 0$ et le point $A(2,6)$. Trouver la conique bitangente à S et passant par A.

La conique cherchée est de la forme $S + \lambda c^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - 1\right) + \lambda(10x + 13y - 8)^2 = 0$$

En tenant compte que la conique passe par A, on obtient $\lambda = 2.7037 \times 10^{-4}$. Avec cette valeur, on obtient l'équation de la conique :

$$x^2 + 0.79xy + 0.06y^2 - 0.63y - 0.48x - 10.98 = 0$$



4-Coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

Soient t_1 et t_2 les deux tangentes et c la corde de contact. L'équation générale sera :

$$\boxed{t_1 t_2 + \lambda c^2 = 0}$$

***Exemple 29* (*Fig 24*)**

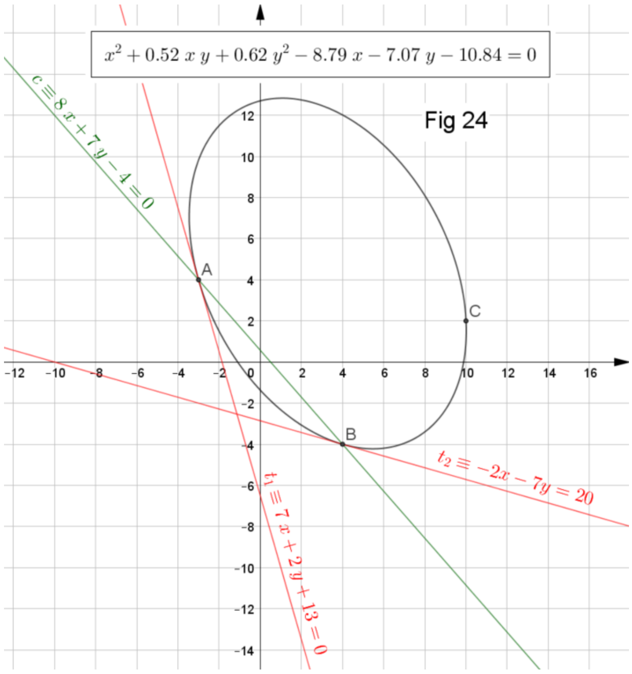
Déterminer la conique passant par $C(10,2)$ et tangente en $A(-2,4)$ à la droite $t_1 \equiv 7x + 2y + 13 = 0$ et en $B(4,-4)$ à la droite $t_2 \equiv 2x + 7y + 20 = 0$.

Soit $AB \equiv c \equiv 8x + 7y - 4 = 0$ la corde de contact. La conique s'écrit $t_1 t_2 + \lambda c^2 = 0$:

$$(7x + 2y + 13)(2x + 7y - 4 = 0) + \lambda(8x + 7y - 4)^2 = 0$$

Comme elle passe par $C(10,2)$, on obtient facilement la valeur de $\lambda = -0.58$.
En utilisant cette valeur, on obtient l'équation de la conique :

$$x^2 + 0.52xy + 0.62y^2 - 8.79x - 7.07y - 10.84 = 0$$



5-Hyperboles dont les asymptotes sont données.

Ceci est un cas particulier car on peut considérer les asymptotes comme des tangentes à l'infini. Soient as_1 et as_2 les deux asymptotes. La corde est alors la droite de l'infini. L'équation générale est :

$$\boxed{as_1.as_2 + \lambda c^2 = 0}$$

Exemple 30 (Fig 25)

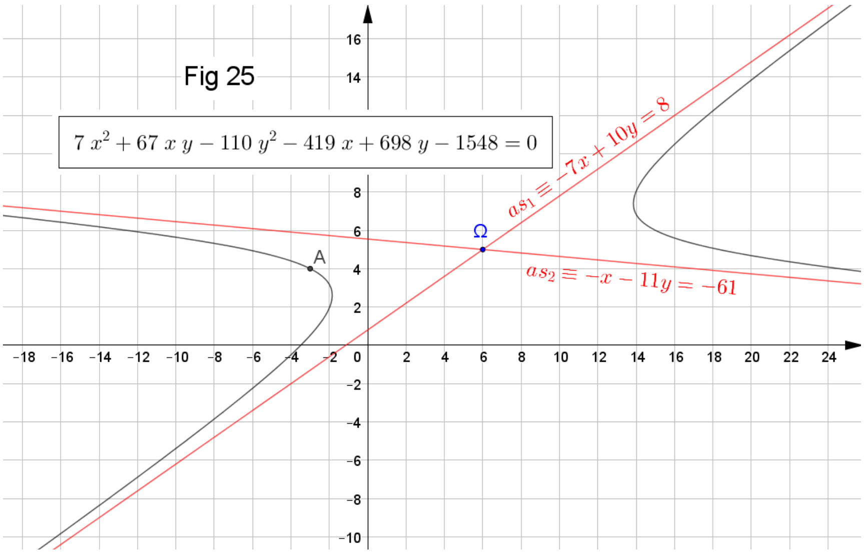
Déterminer l'hyperbole passant par le point A(-3,4) et ayant pour asymptotes $as_1 \equiv -7x + 10y - 8 = 0$ et $as_2 \equiv -x - 11y + 61 = 0$

L'équation est de la forme $as_1 as_2 + \lambda c^2 = 0$ c'est-à-dire :

$$(-x - 11y + 61)(-7x + 10 - 8) + \lambda = 0$$

En exprimant que la conique passe par A, on obtient : $\lambda = -1060$, valeur que l'on introduit dans l'équation de la conique. On obtient après simplification :

$$7x^2 + 67xy - 110y^2 - 419x + 689y - 1548 = 0$$



6-Coniques circonscrites à un quadrangle.

Les quatre sommets du quadrangle déterminent quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4. L'équation est alors :

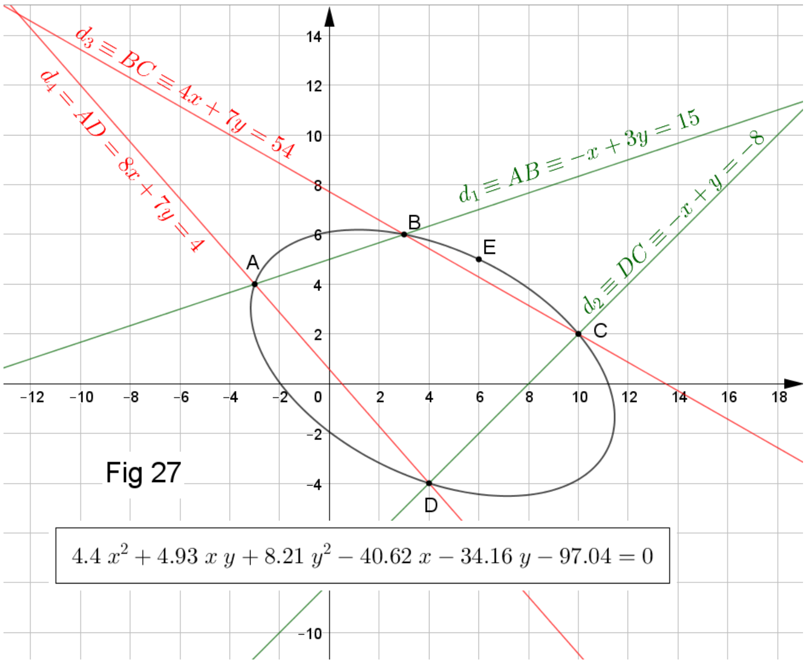
$$\boxed{d_1.d_2 + \lambda d_3.d_4 = 0}$$

Attention au choix des droites d_1 et d_2 sont les côtés opposés du quadrangle. De même pour d_3 et d_4.

Exemple 31 (Fig 26)

Déterminer la conique passant par les points :
$A(-3,4), B(3,6), C(10,2), D(4,-4)$ et $E(6,5)$

On détermine d'abord les droites :
$\begin{cases} d_1 \equiv AB \equiv -x+3y-15=0 \\ d_2 \equiv DC \equiv -x+y+8=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} d_3 \equiv BC \equiv 4x+7y-54=0 \\ d_4 \equiv AD \equiv 8x+7y-4=0 \end{cases}$
La conique est donc de la forme : $d_1d_2 + \lambda d_3d_4 = 0$
$(-x+3y-15)(-x+y+8)+\lambda(4x+7y-54)(8x+7y-4)=0$
Comme le point E appartient à la conique, on obtient la valeur de λ :
$E(6,5) \in \mathscr{C} \Rightarrow \lambda = 0.1063$
On injecte cette valeur dans l'expression de la conique et après calcul, on obtient :
$\mathscr{C} \equiv x^2 + 1.12xy + 1.87y^2 - 9.23 - 7.76y - 22.05 = 0$



7-Coniques circonscrites à un triangle et admettant une tangente donnée en un des sommets de ce triangle.

Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent. Les coniques peuvent être considérées comme circonscrites à un quadrangle dégénéré en un triangle avec la tangente au sommet du quatrième côté.
L'équation est :

$$\boxed{d_1.d_3 + \lambda d_2.t = 0}$$

Où t est la tangente par exemple en A et d_1 et d_3 sont les côtés issus du sommet A.

Exemple 32 (*Fig 27*)

Déterminer la conique tangente en A(-3,4) à la droite $t_1 \equiv 7x + 2y + 13 = 0$ et passant par B(3,6),C(10,2) et D(4,-4).

Définissons :
$d_1 \equiv BD \equiv -10x - y + 36 = 0 \quad d_3 \equiv AD \equiv 8x + y - 4 = 0 \quad d_4 \equiv AB \equiv -x + 3y - 15 = 0$
La conique est de la forme $t_1 d_1 + \lambda d_3 d_4 = 0$:

$$(7x + 2y + 13)(-10x - y + 36) + \lambda(8x + 7y - 4)(-x + 3y - 15) = 0$$

Comme la conique passe par C(10,2), on trouve facilement $\lambda = -3.3579$. En injectant cette valeur dans l'expression de la conique, on trouve

$$x^2 + 1.95xy + 1.68y^2 - 11.87x - 10.48y - 6.18 = 0$$

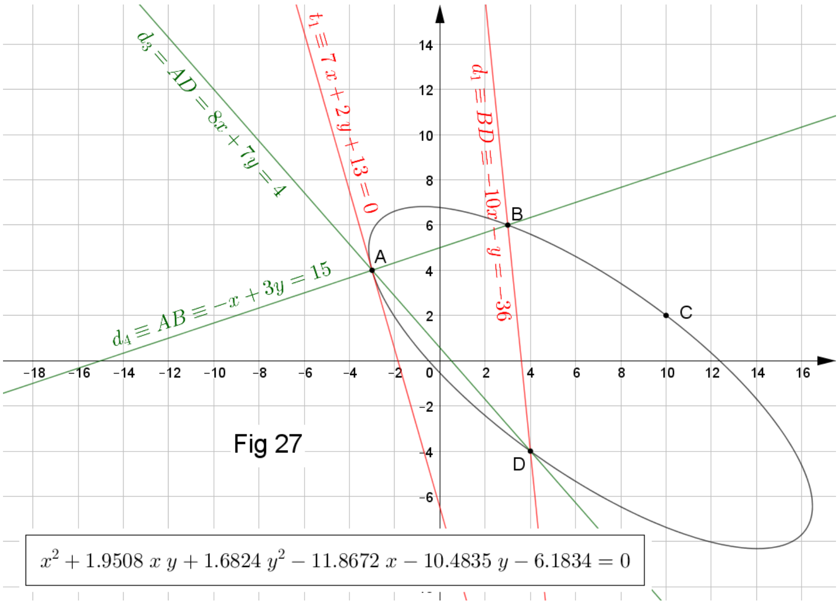

$d_3 \equiv AD \equiv 8x + 7y = 4$
$t_1 \equiv 7x + 2y + 13 = 0$
$d_1 \equiv BD \equiv -10x - y = -36$
$d_4 \equiv AB \equiv -x + 3y = 15$
A
B
C
D
$x^2 + 1.9508\,x\,y + 1.6824\,y^2 - 11.8672\,x - 10.4835\,y - 6.1834 = 0$

Fig 27