Exercices résolus de mathématiques.

Suites - Combinaisons Probabilités

PRO 0

EXPRO000 – EXPRO009

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXPRO001 – Liège, septembre 2000.

A) Démontrer les formules

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \in N_0$$

On pourra éventuellement utiliser la méthode par récurrence.

B) Déduire de A) la valeur de la somme :

$$mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+.....1.(n-m+1) \qquad m, n \in N_0 \ (m<n)$$

C) calculer pour m = 7 et n = 10.

$$A) \ \underline{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{Soit } \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

$$\to \quad 2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)+(n+1)+(n+1)+.......(n+1)+(n+1)$$

$$= n(n+1)$$

$$\to \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Par récurrence :

On vérifie pour $n=1$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$

On suppose la formule vraie pour $(n-1)$.

$$\to \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Démontrons qu'elle est vraie pour n

$$\to \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2$$

$$= \frac{2n^3 - 2n^2 - n^2 + n + 6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\to \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$B)$ $mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + ...1.(n-m+1)$

$$= mn + (mn - m - n + 1) + (mn - 2m - 2n + 4) + (mn - 3m - 3n + 9) + ...$$

$$= m(mn) - (m+n)(1 + 2 + 3 + ... + m - 1) + \left(1 + 4 + 9 + ...(m-1)^2\right)$$

$$= m^2 n - (m+n)\sum_{k=1}^{m-1} k + \sum_{k=1}^{m-1} k^2$$

$$= m^2 n - (m+n)\frac{(m-1)m}{2} + \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}$$

$$= \frac{m}{6}\left[6mn + 3(m+n)(m-1) + (m-1)(2m-1)\right]$$

$$= \boxed{\frac{m}{6}\left[6mn - (m-1)((3n + m + 1)\right]}$$

$C)$ Vérifions pour $m = 7$ et $n = 10$

1) $7\times10 + 6\times9 + 5\times8 + 4\times7 + 3\times6 + 2\times5 + 1\times4$

$= 70 + 54 + 40 + 28 + 18 + 10 + 4$

$= 224$

2) Formule

$$\frac{m}{6}\left[6mn - (m-1)((3n + m + 1)\right]$$

$$= \frac{7}{6}\left[6\times7\times10 - (7-1)((3\times10 + 7 + 1)\right]$$

$$= 224$$

METHODE ALTERNATIVE

Voici une méthode alternative. Proposons-nous de trouver les formules donnant les sommes suivantes

$$\sum_{1}^{n} k^2 \quad , \quad \sum_{1}^{n} k^3 \ , \quad \sum_{1}^{n} k^4 \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$\underline{\sum_{1}^{n} k^2}$

1) Démontrons qu'il esiste un unique polynôme $P(x)$ de degré 3 tel

$\forall x \to P(x+1) - P(x) = x^2$ et que $P(1) = 0$

Soit ce polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Comme $P(1) = 0 \to a + b + c + d = 0$

De plus ,

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d - \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \\ &= ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a \\ &\quad + bx^2 + 2bx + b \\ &\quad + cx + c \\ &\quad + d \\ &\quad - ax^3 - bx^2 - cx - d \\ &= 3ax^2 + (3a + 2b)x^2 + a + b + c \end{aligned}$$

Qui doit être égale à x^2. Or deux polynômes sont identiques si les coefficients des mêmes puissances sont égales. On identifie les coefficients et on obtient

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \to \left\{ a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6} \right. \quad \to d = 0$$

La solution de ce système étant unique le polynôme $P(x)$ est unique

$$\to P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x}{6}\left(2x^2 - 3x + 1\right) = \frac{x}{6}(x-1)(2x-1)$$

2) Calculons maintenant la somme des carrés, en appliquant $P(x+1)-P(x)=x^2$

$$1^2 \quad = P(2)-P(1)$$

$$2^2 \quad = P(3)-P(2)$$

....

$$(n-1)^2 = P(n)-P(n-1)$$

$$n^2 \quad = P(n+1)-P(n)$$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1)=0$

$$1^2+2^2+.....(n-1)^2+n^2=\sum_1^n k^2 = P(n+1)$$

Il suffit maintenant de développer le polynôme

$$\boxed{\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\underline{\sum_1^{\mathrm{n}} k^3}$$

1) On applique la même méthode, mais cette fois on cherche un polynôme de dégré 4

$P(x+1)-P(x)=x^3$ avec $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ et $P(1)=0$

$$\begin{aligned}
P(x+1)-P(x) &= a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e-\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)\\
&= ax^4+4ax^3+6ax^2+4ax+a\\
&\quad + bx^3+3bx^2+3x+b\\
&\quad + cx^2+2cx+c\\
&\quad + dx+d\\
&\quad +e\\
&\quad -ax^3-bx^3-cx^2-dx-e\\
&= 4ax^3+(6a+3b)x^2+(4a+3a+2c)x+a+b+c+d=0
\end{aligned}$$

Ce qui donne le système : $\begin{cases} 4a=1 \\ 6a+3b=0 \\ 4a+3a+2c=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \rightarrow \left\{ a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}, d=0 \rightarrow e=0 \right.$

$$\rightarrow P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2=\frac{x^2}{4}(x-1)^2$$

2) Calculons maintenant la somme des cubes, en appliquant $P(x+1)-P(x)=x^3$

$$1^3 \quad = P(2)-P(1)$$

$$2^3 \quad = P(3)-P(2)$$

....

$$(n-1)^3 = P(n)-P(n-1)$$

$$n^3 \quad = P(n+1)-P(n)$$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1)=0$

$$1^3+2^3+.....(n-1)^3+n^3=\sum_1^n k^3 = P(n+1)$$

Il suffit maintenant de remplacer x par $n+1$ dans $P(x)$

$$\boxed{\sum_1^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_1^n k\right)^2}$$

$$\sum_1^n k^4$$

1) On cherche maintenant un polynôme du 5ème degré

$P(x+1)-P(x)=x^4$ avec $P(1)=0$

En partant de $P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$, on arrive au système

$$\begin{cases} 5a=1 \\ 10a+4b=0 \\ 10a+6b+3c=0 \\ 5a+4b+3c+2d=0 \\ a+b+c+d+e=0 \end{cases} \rightarrow \left\{ a=\frac{1}{5}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}, d=0, e=-\frac{1}{30} \rightarrow f=0 \right.$$

$$\rightarrow P(x)=\frac{x}{30}\left(6x^4-15x^3+10x^2-1\right) \xrightarrow{Horner} P(x)=\frac{x}{30}(x-1)(2x-1)\left(3x^2-3x-1\right)$$

2) Calculons maintenant la somme des puissance 4, en appliquant $P(x+1)-P(x)=x^4$

$1^4 \quad = P(2)-P(1)$

$2^4 \quad = P(3)-P(2)$

....

$(n-1)^4 = P(n)-P(n-1)$

$n^4 \quad = P(n+1)-P(n)$

En additionnant membre à membre, on obtient, compte tenu que $P(1)=0$

$$1^4+2^4+.....(n-1)^4+n^4=\sum_1^n k^4=P(n+1)$$

Il suffit maintenant de remplacer x par $n+1$ dans $P(x)$

$$\boxed{\sum_1^n k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

Résolu le 15 janvier 2002, Modifié le 8 octobre 06

EXPRO002 – Liège, septembre 1996.

A) Démontrer la relation

$$k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1} \quad \text{si} \;\; n \geq k \geq 1$$

B) En déduire la valeur de la somme :

$$C_n^1 + 2\,C_n^2 + 3\,C_n^3 + \ldots\ldots + n\,C_n^n$$

$$A) \;\; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \rightarrow \qquad k\,C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad \rightarrow \quad n\,C_{n-1}^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\rightarrow \;\; \boxed{k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1}}$$

$$B) \;\; C_n^1 + 2\,C_n^2 + 3\,C_n^3 + 4\,C_n^4 + \ldots.. + n\,C_n^n$$

$$= n\,C_{n-1}^0 + n\,C_{n-1}^1 + n\,C_{n-1}^2 + \ldots\ldots.$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots\ldots. + C_{n-1}^{n-1}\right)$$

Le facteur entre parenthéses est une ligne du triangle de Pascal.

La somme des termes d'une ligne de rang $(n\text{-}1)$ est égale à 2^{n-1}

$$\rightarrow \qquad \boxed{n\,2^{n-1}}$$

EXPRO003 – Liège, juillet 1998. Bruxelles, juillet 2002.

Calculer l'expression

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots\dots$$

Vérifier le résultat obtenu pour $n = 9$.

Suggestion calculer $(1 + i)^n$ de deux façons différentes.

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots\dots$$

Appliquons le binôme de Newton

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= C_n^0 1^n i^0 + C_n^1 1^{n-1} i^1 + C_n^2 1^{n-2} i^2 + C_n^3 1^{n-3} i^3 + C_n^4 1^{n-4} i^4 + \dots\dots \\ &= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \dots\dots \\ &= C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \dots\dots + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \dots\dots\right)\end{aligned}$$

D'autre part : $1+i = \sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \frac{\pi}{4} \ \rightarrow\ (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{cis}\ n\frac{\pi}{4}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \dots\dots = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos n\frac{\pi}{4}}$$

Vérification pour $n = 9$

$$\begin{aligned}C_9^0 - C_9^2 + C_9^4 - C_9^6 + C_9^8 &= \frac{9!}{9!\,0!} - \frac{9!}{7!\,2!} + \frac{9!}{5!\,4!} - \frac{9!}{3!\,6!} + \frac{9!}{1!\,8!} \\ &= 1 - 36 + 126 - 84 + 9 = 16\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^9 \cos 9\frac{\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO004 – Liège, Juillet 1996.

Calculer l'expression
Vérifier le résultat obtenu pour n = 9. Suggestion : calculer (1 + i) ^{n} de deux façons différentes.

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - C_n^{11} + \ldots\ldots$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - C_n^{11} + \ldots\ldots$$

Appliquons le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= C_n^0 1^n i^0 + C_n^1 1^{n-1} i^1 + C_n^2 1^{n-2} i^2 + C_n^3 1^{n-3} i^3 + C_n^4 1^{n-4} i^4 + \ldots\ldots\ldots \\ &= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \ldots\ldots \\ &= C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots\ldots . i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \ldots\ldots\right)\end{aligned}$$

D'autre part : $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4} \rightarrow (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{cis}\, n\frac{\pi}{4}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \ldots . = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\frac{\pi}{4}}$$

Vérifions pour $n=9$:

$$\begin{aligned}C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_9^9 &= \frac{9!}{8!1!} - \frac{9!}{6!3!} + \frac{9!}{4!5!} - \frac{9!}{2!7!} + \frac{9!}{0!9!} \\ &= 9 - 84 + 126 - 36 + 1 = 16\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^9 \sin 9\frac{\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO005 – Liège.

Démontrer par récurrence :

$$\sum_{n=1}^{M} C_{n+1}^{2} = C_{M+2}^{3}$$

$$\sum_{n=1}^{M} C_{n+1}^{2} = C_{M+2}^{3}$$

$a)$ On vérifie que la relation est vraie pour $M = 1$ car $C_{2}^{2} = C_{3}^{3} = 1$

$b)$ Suposons que la relation est vraie, démontrons qu'elle est vrai pour $M + 1$

$$\sum_{n=1}^{M+1} C_{n+1}^{2} = \sum_{n=1}^{M} C_{n+1}^{2} + C_{M+2}^{2} = C_{M+2}^{3} + C_{M+2}^{2} = C_{M+3}^{3}$$

Rappel : Dans le triangle de Pascal, on vérifie que : $C_{n}^{p-1} + C_{p}^{p} = C_{n+1}^{p}$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO006 – Espace Math 66.

Résoudre :

$$C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}-387n=0$$

$$\begin{aligned}
C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}-387n&=0\\
2n+C_{2n+1}^{3}&=387n\\
C_{2n+1}^{3}&=385n\\
\frac{(2n+1)!}{(2n+1-3)!3!}&=385n\\
\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!}&=2310n\\
(2n-1).2n.(2n+1)&=2310n\\
4n^{2}&=1156\\
n&=17
\end{aligned}$$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO007 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une famille de cinq enfants et l'on suppose que pour chacun d'eux, la probabilité d'être un garçon ou une fille est de ½

On demande :

a) la probabilité qu'il y ait exactement deux garçons et trois filles dans la famille.
b) la probabilité qu'il y ait au moins un garçon et au moins deux filles dans la famille.

$a)$ Le nombre total de possiblités est de $2^5 = 32$

Construisons le tableau :

F	G	C_n^p
5	0	1
4	1	5
3	2	10
2	3	10
1	4	5
0	5	1

La possibilité 2G + 3F correspond à 10 cas.

La probabilité est donc de : $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

b) La possibilité au moins 1G et au moins 2 F correspond à la somme des lignes 2, 3 et 4 du tableau : $\rightarrow\ 5+10+10=25$

La probabilité est donc de : $\frac{25}{32}$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO008 – BAC France.

Un aquarium contient :

a. 6 poissons rouges, coûtant 15 F pièces
b. 4 poissons jaunes, coûtant 20 F pièces

Un client achète 3 poissons qu'il sort au hasard de cet aquarium. On considère la variable aléatoire *X* désignant le prix total des 3 poissons.

a) Calculer la probabilité de tirer 2 poissons rouges et 1 jaune, et le prix alors payé.
b) Calculer la probabilité de payer 55 francs pour 3 poissons tirés au hasard.
c) Calculer le prix moyen *E* (*X*)
d) Calculer l'écart-type sigma (*X*) du prix payé.

a) La probabilité de tirer un poisson rouge est $\frac{3}{5}$

La probabilité de tirer un poisson jaune est $\frac{2}{5}$

C'est une distribution binomiale. La probabilité de tirer 2 R et 1 J est donc

$$C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1 = 0.432$$

b) La seule combinaison permettant de payer 55 F est 1R + 2J

Probabilité : $C_3^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.288$

c) Calculons:

$$C_3^0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.064 \quad et \quad C_3^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 0.216$$

Etablissons le tableau suivant :

R	0	1	2	3
J	3	2	1	0
p_i	0.064	0.288	0.432	0.216
X	60	55	50	45
$p_i X_i$	3.84	15.84	21.6	9.72

$\rightarrow$ le prix moyen est $E(X) = \sum p_i X_i = 51\,F.$

d) On calcule la variance :

$$V(x) = 0.065(60-51)^2 + 0.288(55-51)^2 + 0.432(50-51)^2 + 0.216(45-51)^2 = 18$$

D'où l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 4.24\,F$

Résolu le 15 janvier 2002

EXPRO009 – Exemple.

On forme un comité de 4 membres choisi au hasard parmi 7 personnes dont 2 frères.

a) Calculer la probabilité que les 2 frères soient choisis
b) Calculer la probabilité qu'un frère soit choisi
c) Calculer la probabilité pour qu'au moins un frère soit choisi
d) Calculer la probabilité pour qu'aucun frère ne soit choisi

$a)$ Nombre de frères : 2

Autres personnes : 5

Nombre total : 7

Il faut 2 frères et 2 autres personnes : $p = \dfrac{C_2^2 C_5^2}{C_7^4} = 0.286$

$b)$ $p = \dfrac{C_2^1 C_5^3}{C_7^4} = 0.571$

$c)$ Soit on considère que c'est la somme de $a)$ et $b)$: $p = 0.286 + 0.571 = 0.857$

Soit on considére que c'est le complément de $d)$: $p = 1 - 0.143 = 0.857$

$d)$ $p = \dfrac{C_5^4}{C_7^4} = 0.143$

Note : on vérifie que

p 2 frères	0.286
p 1 frère	0.571
p aucun frère	0.143
total	1.000

Résolu le 15 janvier 2002