

# Oscillations

## 1. Mouvement périodique

Nous connaissons des phénomènes de la vie courante qui se répètent régulièrement ; le mouvement de la Lune autour de la Terre, celui de la Terre autour du Soleil, celui d'une balançoire, celui d'un piston, l'oscillation d'un ressort et l'oscillation d'un pendule, le mouvement de l'aiguille de la montre,....

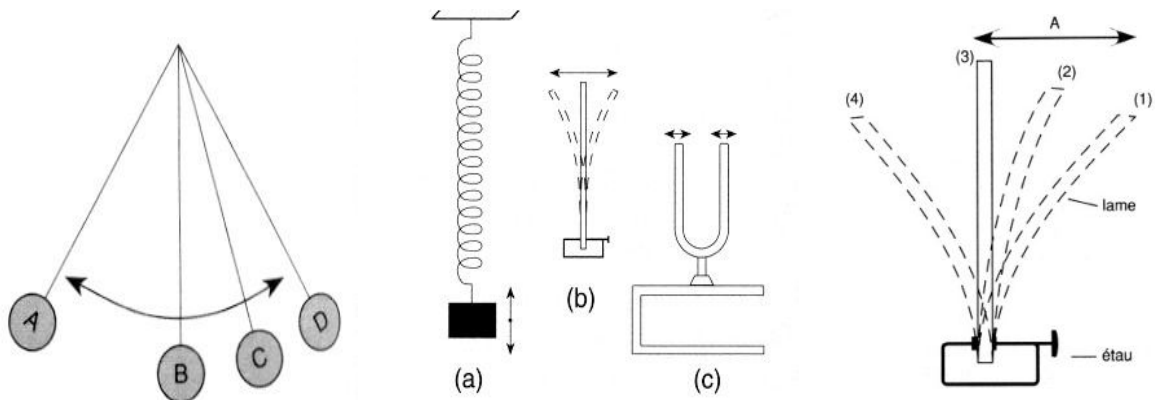
*Un mouvement est dit périodique s'il se reproduit identique à lui-même au bout d'intervalles de temps égaux.*

### 1.1 OSCILLATION D'UN OBJET

#### 1.1.1 Mouvements d'oscillation

Parmi les mouvements périodiques, nous nous intéresserons aux objets effectuant des oscillations périodiques de part et d'autre *d'une position d'équilibre*.

Exemples : masse suspendue à un ressort, pendule, diapason frappé, lame vibrante,...



|                              |                                                                                                                                                    |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b><u>Oscillateur</u></b>    | <i>objet décrivant un mouvement de va et vient de part et d'autre d'une position d'équilibre 0</i>                                                 |
| <b><u>Oscillation</u></b>    | <i>mouvement de l'oscillateur</i>                                                                                                                  |
| <b><u>L'élongation y</u></b> | <i>distance qui sépare l'objet de sa position d'équilibre 0</i>                                                                                    |
| <b><u>Amplitude A</u></b>    | <i>valeur maximale de l'élongation y</i>                                                                                                           |
| <b><u>Période T</u></b>      | <i>durée d'une oscillation <b>complète</b> (temps pour aller d'un point et y revenir dans le même sens). La période T se mesure en seconde (s)</i> |
| <b><u>Fréquence f</u></b>    | <i>nombre d'oscillations effectuées en une seconde. Elle se mesure en hertz (Hz)      1hz = 1 vibration / s</i>                                    |

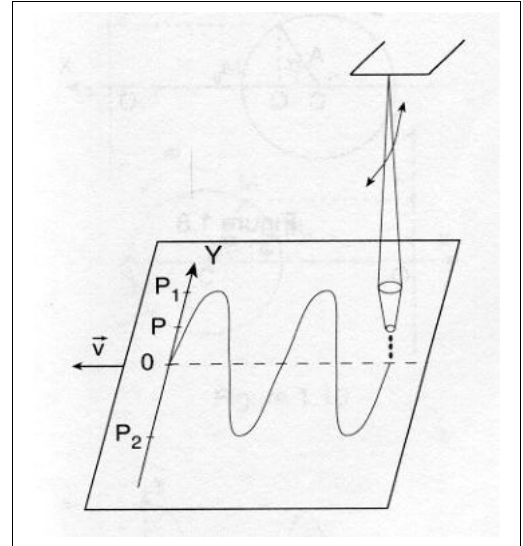
*La fréquence f et la période T sont liées par la relation*

$$f = 1 / T$$

## 2. Mouvement harmonique

Parmi le mouvement périodique, il y en a un qui se prête particulièrement bien à une étude mathématique : c'est le mouvement harmonique simple ou sinusoïdal (MVS)

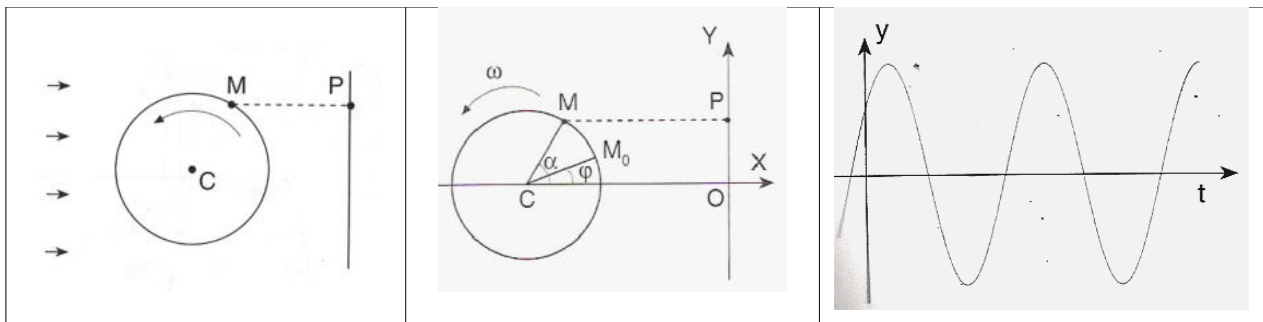
Regardons en détails, l'oscillation d'un pendule laissant « une trace sur son passage » qui n'est rien d'autre qu'une sinusoïde.



### 2.1 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Eclairons latéralement un disque vertical en rotation uniforme autour de son centre et observons la projection de ce mouvement sur un écran.

*La projection sur un axe, d'un mouvement circulaire uniforme est un mouvement harmonique*



#### 2.1.1 Equations du MVS

Soit un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  sur lequel un point  $M$  est en MCU à la vitesse angulaire constante  $\omega$

Projetons le vecteur tournant  $\overline{OM}$  sur l'axe  $Y$  vertical.

Supposons qu'en  $t = 0$ ,  $\overline{OM}$  et l'axe  $X$  fasse un angle  $\varphi$

A l'instant  $t$ , cet angle devient  $\omega t + \varphi$

Considérons le mouvement du point  $P$  (projection de  $M$  sur  $Y$ ). Le point  $P$  décrit autour de  $O$ , un mouvement rectiligne vibratoire ou harmonique

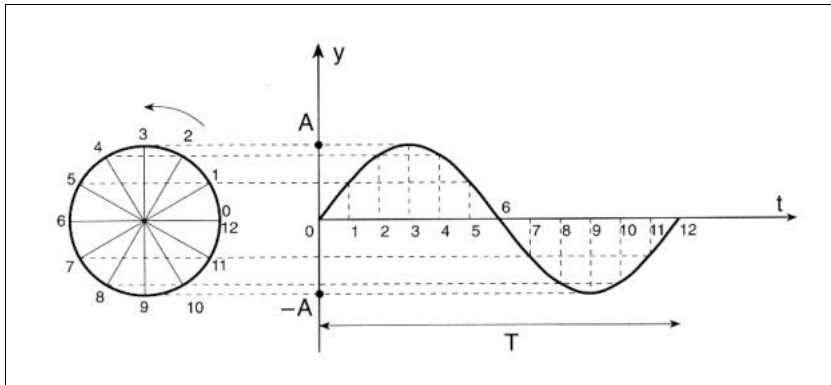
Le graphique  $y = f(t)$  est une sinusoïde d'où le nom de mouvement vibratoire sinusoïdal donné à ce mouvement.

L'équation du point  $P$  est donnée par la fonction

|                      |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y$                  | <b>l'élongation (m)</b>                              | C'est la distance de 0 à $P$ ; elle varie avec le temps $t$<br>La valeur maximale de l'élongation est l'amplitude (ici = $R$ mais souvent notée $A$ ). Elle est constante et toujours positive.<br>( $y = A$ quand $\sin(\omega t + \varphi) = 1$ |
| $\omega$             | <b>pulsation (rad/s)</b>                             | $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$                                                                                                                                                                                                                |
| $\omega t + \varphi$ | <b>phase du mouvement (rad)</b>                      | angle qui précise la position du point $P$                                                                                                                                                                                                        |
| $\varphi$            | <b>phase à l'origine ou constante de phase (rad)</b> | angle qui précise la position à l'instant initial $t = 0$                                                                                                                                                                                         |

L'équation du mouvement est

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



Si  $\varphi = 0$  alors le graphe  $y = f(t)$  est tel que  $y = 0$  en  $t = 0$ s.

## Lois de la vitesse et de l'accélération

Soit un mobile  $P$  se déplaçant sur un axe  $OY$ . Si  $y_1$  désigne l'abscisse à l'instant  $t_1$ , et  $y_2$  celle à l'instant  $t_2$ , alors il parcourt une distance  $\Delta y = y_2 - y_1$  au cours de l'intervalle de temps

$\Delta t = t_2 - t_1$ , et sa **vitesse moyenne** au cours de cet intervalle se calcule par :  $v_{\text{moy}} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ .

Pour déterminer la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant  $t_1$ , il faut calculer la vitesse moyenne sur un intervalle où  $t_2$  est infiniment proche de  $t_1$ . Par définition :

$$v_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t), \text{ c'est-à-dire la dérivée de } y(t) \text{ par rapport à } t.$$

$$\text{De même pour l'accélération : } a_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = y''(t)$$

Elles sont donc obtenues par dérivation par rapport au temps de la fonction espace  $y$  (ou loi du mouvement) pour la vitesse et par dérivation de la loi de la vitesse pour l'accélération.

$$\begin{aligned} v(t) &= y' = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= y'' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y \end{aligned}$$

## 2.2 DYNAMIQUE DU MVS

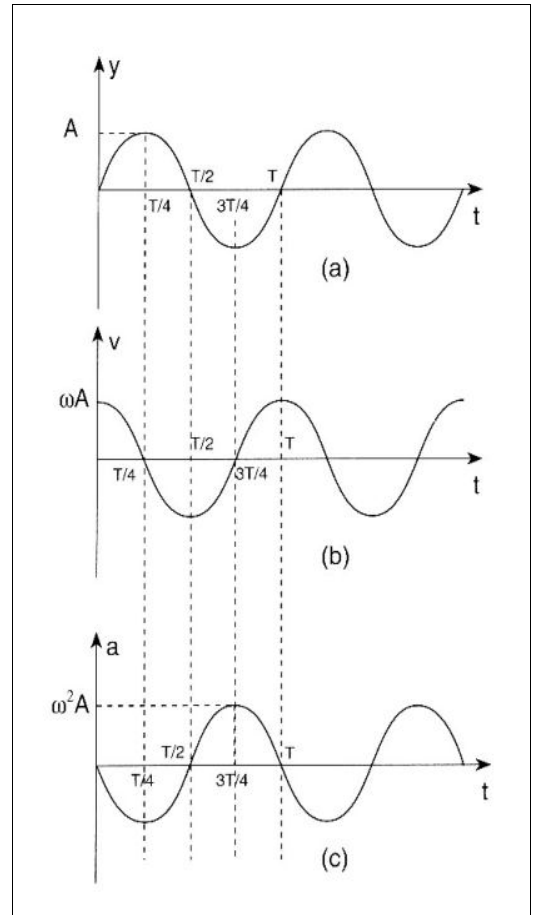
*Dans un MVS, l'accélération est toujours de signe contraire à l'élongation. Elle est donc toujours dirigée vers le centre.*

*Nous savons que l'accélération est due à une force ou un ensemble de forces dont la résultante est telle que  $= m$  et ce d'après la seconde loi de Newton.*

*Par conséquent, lorsqu'un mouvement est harmonique, la force qui le produit a pour grandeur :  $F = -m\omega^2 y$  avec  $m$ ,  $\omega$  qui sont des constantes du mouvement, on écrira  $F = -ky$*

Réciproquement, si une force (agissant sur un corps de masse  $m$ ) possède ces 2 caractéristiques, alors le mouvement de cette masse doit être harmonique de

pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ou de période  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



### Conclusion

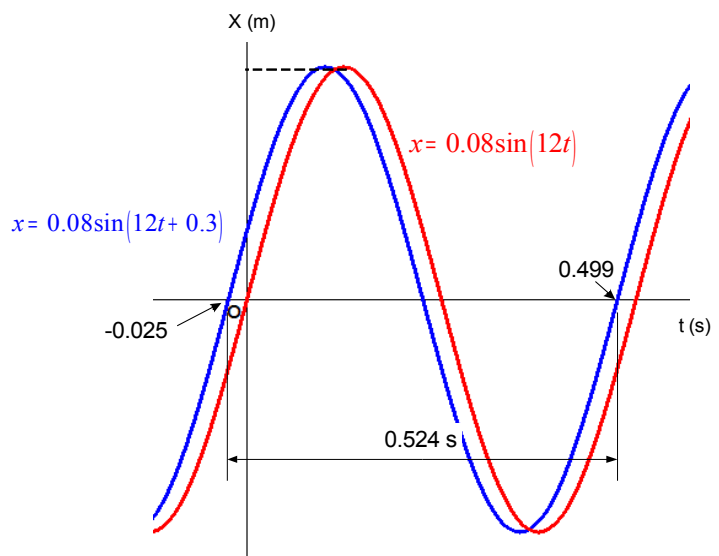
La force produisant un mouvement harmonique sur un corps de masse  $m$   
*est proportionnelle à l'élongation  $y$*   
*est toujours de signe opposé à l'élongation :  $F$  est une force de rappel*

### Exemple

La position d'une particule en mouvement sur l'axe des  $x$  est donnée par-

$$y = 0.08 \sin(12t + 0.3)$$

Où  $x$  est en mètres et où  $t$  est en secondes. A) Tracer la courbe  $x(t)$  représentant cette fonction. B) Déterminer la position, la vitesse et l'accélération à  $t = 0.6$  s. C) Quelle est l'accélération lorsque la position est de  $x = -0.05$  m ?



## Solution

a) En comparant avec l'équation , on en déduit immédiatement que l'amplitude  $A = 0.08 \text{ m}$ ,

et que la pulsation est  $\omega = 12 \text{ rad/s}$ . La période est donc  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.524 \text{ s}$ . La constante de phase est  $\varphi = +0.3 \text{ rad/s}$  et donc la courbe sera décalée de  $0.3/12 = 0.025 \text{ s}$  vers la gauche par rapport à un sinus non décalé.

b) La vitesse et l'accélération à un instant quelconque sont données par

$$v(t) = x' = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = 0.96 \cos(12t + 0.3) \text{ m/s}$$

$$a(t) = x'' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -11.52 \sin(12t + 0.3) \text{ m/s}^2$$

A  $t = 0.6 \text{ s}$ , la phase du mouvement est  $(12 \times 0.6 + 0.3) = 7.5 \text{ rad}$ . Lorsqu'on utilise cette valeur dans les expressions données, on trouve  $x = 0.075 \text{ m}$ ,  $v = 0.333 \text{ m/s}$  et  $a = -10.8 \text{ m/s}^2$

c) On sait que  $a = -\omega^2 x = -12^2 \times (-0.05) = 7.2 \text{ m/s}^2$

## Exemple

Une tache lumineuse sur l'écran d'un ordinateur oscille le long d'une ligne droite horizontale d'un mouvement sinusoïdal à la fréquence de  $1.5 \text{ Hz}$ . La longueur totale de la ligne parcourue est de  $20 \text{ cm}$  et la tache commence le mouvement à droite de l'écran.

Déterminer

- a) Sa pulsation, b) Sa période, c) Sa vitesse maximale, d) Son accélération maximale
- e) Exprimer la position horizontale ( $x$ ) en fonction du temps et trouver la position de la tache en  $t = 0.4 \text{ s}$

Résolution.

a)  $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1.5 = 3\pi \text{ rad/s}$

b)  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.5} = 0.67 \text{ s}$

c)  $x_{\max} = A\omega = 2\pi f A = 2\pi \times 1.5 \times 0.1 = 0.94 \text{ m/s}$

d)  $a_{\max} = A\omega^2 = A(2\pi f)^2 = 0.1 \times (2 \times \pi \times 1.5)^2 = 8.9 \text{ m/s}^2$

e)  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$

A l'instant  $t = 0$ ,  $x = +A \rightarrow A = A \sin \varphi \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x = 0.1 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.1 \sin \pi\left(3t + \frac{1}{2}\right)$

A l'instant  $t = 0.4 \text{ s} \rightarrow x = 0.1 \sin \pi(3 \times 0.4 + 0.5) = -0.081 = -8.1 \text{ cm}$

## 2.3 ENERGIE D'UN OSCILLATEUR

L'énergie totale d'un oscillateur est la somme des énergies cinétique et potentielle.  
Pour un oscillateur, il y a au cours du mouvement une transformation continue de l'énergie cinétique en énergie potentielle et vice et versa.

**Dans le cas idéal où il n'y a pas de frottement, l'énergie totale est constante.**

Evaluons l'énergie totale grâce à cette propriété.

A tout instant,

Rappel :  $E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2}mv^2$  et

Prenons par exemple le cas du pendule, lorsque l'élongation  $y = 0$ ,  $E_{\text{cinétique}}$  est maximale et

$E_{\text{potentielle}} (= 0 \text{ J})$ , donc  $E = \frac{1}{2}mv^2 + 0$  or  $v_{\text{max}}^2 = \omega^2 A^2$

Finalement, l'énergie d'un oscillateur est donnée par la formule

$$E = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

Conclusion :

***L'énergie d'un oscillateur est fonction de l'amplitude et de la fréquence f de l'oscillation.***

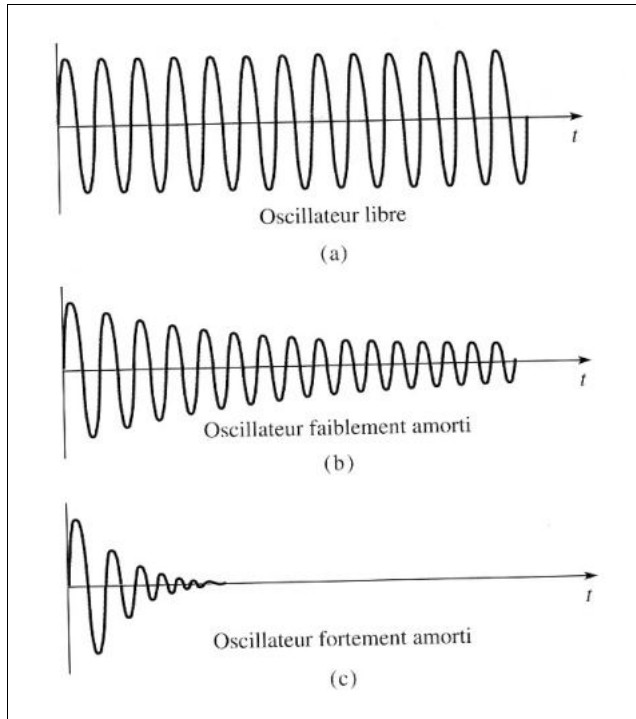
### Exemple

Soit une masse de 200 g animé d'un mouvement d'oscillation d'équation : -. Quelle est l'énergie de cet oscillateur ?

Résolution

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (3\pi)^2 \times 0.5^2 = 9.13 \text{ J}$$

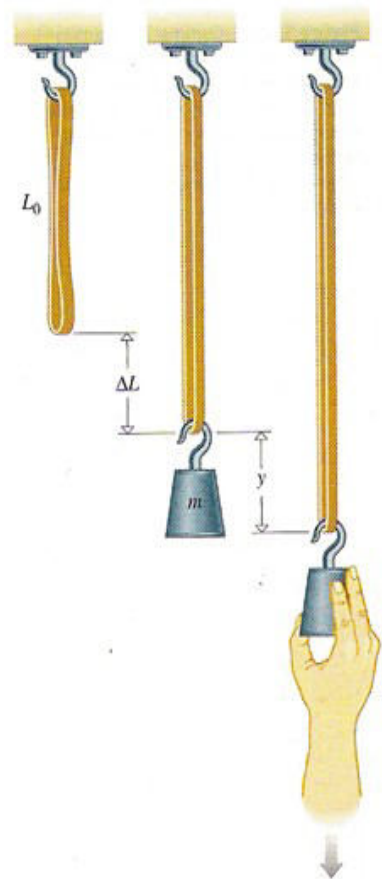
## 2.4 MOUVEMENT VIBRATOIRE AMORTI



Si on observe des oscillations sur une longue période, on remarque une diminution progressive de l'amplitude ; on dit que les oscillations sont amorties.

Cet amortissement est dû aux frottements qui ne sont jamais nuls et l'énergie initiale se dissipe en chaleur.

Une diminution progressive de l'énergie mécanique du pendule entraîne une diminution de son amplitude sans rien changer à son rythme d'oscillation.



## 2.5 EXEMPLES DE M.V.S.

### 2.5.1 Masse suspendue à un ressort

Une bande élastique suspendue à un crochet s'allonge d'une longueur  $\Delta L$ , si elle porte une masse  $m$ . Alors la force de rappel vers le haut est égale au poids vers le bas :  $k\Delta L = mg$ , c'est à dire que la force de rappel exercée par la bande élastique est proportionnelle à l'élongation

$$F = -ky$$

$k$  est la constante de rappel du ressort.

Dans ces conditions, l'objet écarté de sa position initiale se met à osciller avec un mouvement vibratoire sinusoïdal de période propre

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Plus la constante  $k$  du ressort est élevée, plus le ressort est raide et plus courte est la période. Plus la masse est élevée et plus la période est élevée.

## Exemple

Un ressort hélicoïdal vertical en acier s'allonge de 50.0 cm s'il porte un sac de bonbons de 2,0 kg. Le sac est alors à 1.00 m au-dessus de la tête d'un enfant. Le sac est tiré vers le bas de 25,0 cm puis lâché. Combien de temps faut-il pour qu'il revienne à la même hauteur de 1,00 m au-dessus de l'enfant ?

Résolution

Le sac est en équilibre quand la masse est à 1.00 m au-dessus de l'enfant. Le point le plus bas (0.75 cm au-dessus de l'enfant) est la position initiale ( $y = A$ ) du sac. Celui-ci revient à la position d'équilibre au bout d'un quart de période, soit  $t = T/4$ . Pour trouver  $T$ , nous devons d'abord trouver  $k$ .

Initialement : -

$$\text{Alors : } k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{2.0 \times 9.81}{0.5} = 39.2 \text{ N/m}$$

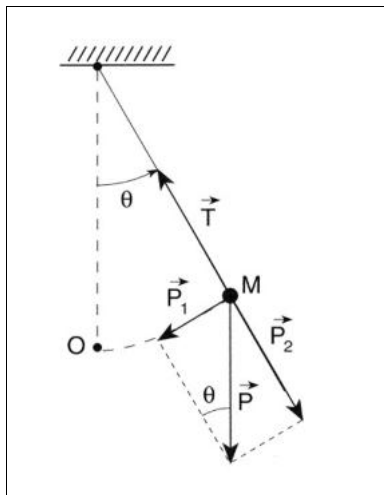
$$\text{Donc : } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.0}{39.2}} = 1.4 \text{ s} \rightarrow \frac{T}{4} = 0.35 \text{ s}$$

## 2.5.2 Le pendule

Il est constitué d'une masse  $m$  suspendue à un fil inextensible de longueur  $L$ .

Sur la masse agissent 2 forces, le poids  $P$  et la traction du fil  $T$ . Le poids peut être décomposé en une composante  $P_1$  tangente à la trajectoire et une composante  $P_2$  qui lui est perpendiculaire.

La résultante de  $T$  et de  $P$  est  $\perp$  à la trajectoire et fait changer la direction du mouvement (mouvement circulaire).



$P_1$  est donc la seule force à faire varier la grandeur de la vitesse et à ramener la masse vers sa position d'équilibre en  $O$ .

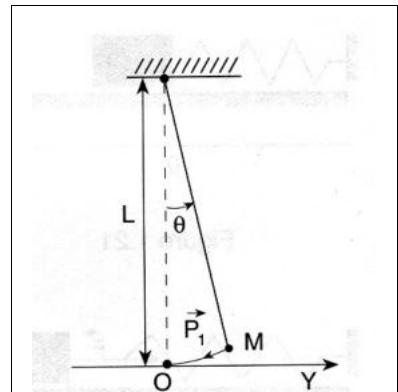
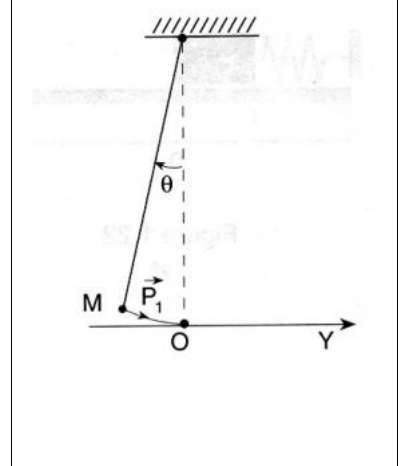


Figure 1.24a



**Pour des oscillations de faibles amplitudes** ( $\theta < 10^\circ$ ) alors  $\theta \text{ (rad)} = \sin \theta$

$$\theta \text{ (Rad)} = \frac{OM}{L}$$

De plus,

Or la longueur de l'arc  $OM$  vaut l'élongation  $y$ . (la corde se confond avec l'arc pour de faibles angles)

Donc, dans le cas de faibles amplitudes,  $\theta \text{ (rad)} = \frac{y}{L} \theta \text{ (rad)}$



et la force  $P_1 = m \cdot g \cdot \frac{y}{L}$

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{y}{L} = -ky$$

En remarquant que  $y$  et  $F$  sont toujours de signe contraire, on a :

La force  $F$  est bien une force de rappel proportionnelle à  $y$  et de signe contraire.

Dans ces conditions, le mouvement d'un pendule de faible amplitude est donc bien un MVS avec une période propre  $T$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ avec } k = \frac{m \cdot g}{L} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sa période est

En tout point du globe, la période propre d'un pendule ne dépend que de sa longueur (par sa racine) et pas de sa masse.

On peut se servir du pendule pour mesurer  $g$  en tout point de la Terre. ( $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ ).

## Exemple

Quel doit être la longueur d'un pendule, pour que sa période soit 1.00 s à un endroit où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Résolution

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2 \times 9.81}{4 \times \pi^2} = 0.248 \text{ m}$$

## 2.6 LA RÉSONANCE

Dans ce chapitre, nous allons voir comment l'énergie d'un oscillateur peut être transférée à un autre oscillateur.

### 2.6.1 Le pendule simple

On sait qu'un pendule écarté de sa position d'équilibre peut si on le lâche, effectuer des oscillations libres avec une période propre (ou une fréquence propre) qui lui est caractéristique.

Les oscillations se poursuivent jusqu'au moment où l'énergie mécanique de départ aura complètement disparue, absorbée par le milieu extérieur au cours de l'amortissement.

Si on désire que les oscillations continuent, il faut que le système oscillant reçoive de l'énergie du monde extérieur et ce pour compenser l'amortissement

On parlera d'oscillations entretenues. (balançoire, cloche, ....)

## 2.6.2 Définition

On appelle

**résonateur** : le système qui reçoit de l'énergie ( la cloche )

**excitateur** : le système qui fournit de l'énergie périodiquement ( le sonneur de cloche )

**le couplage** : la liaison entre le résonateur et l'excitateur ( la corde )

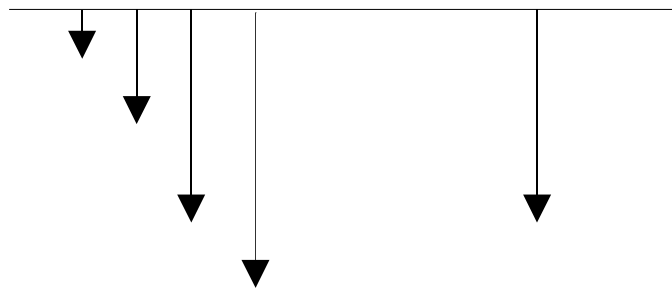
Nous allons voir que ce transfert d'énergie entre l'excitateur et le résonateur n'est maximum que dans le cas où une condition est réalisée : **la condition de synchronisation**.

## 2.6.3 Expérience

Prenons 4 pendules de longueurs  $L_1, L_2, L_3, L_4$  donc de différentes fréquences propres.

Suspendons-les à une corde rigide.

Prenons un cinquième pendule de longueur  $L_3$



Si on écarte le 5, il oscille. On constate alors que son amplitude diminue alors que le 3 se met à osciller graduellement.

Les 1, 2, 4 restant pratiquement immobiles.

Donc l'énergie du 5 (appelé l'excitateur) se transmet progressivement sur le 3 (appelé le résonateur) par l'intermédiaire de la corde ( = couplage ).

**On appelle résonance : le transfert maximum d'énergie entre 2 systèmes.**

**L'énergie se transmet entre les systèmes qui ont la même fréquence propre d'oscillation ou de vibration.**

**Entre les systèmes qui ont des fréquences propres différentes, il n'y a pas ou peu de transfert d'énergie.**

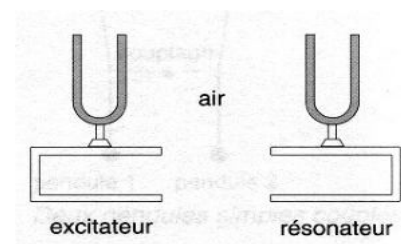
## 2.6.4 Conclusions

**Il y a résonance lorsque la fréquence propre du résonateur est égale à la fréquence propre de l'excitateur.**

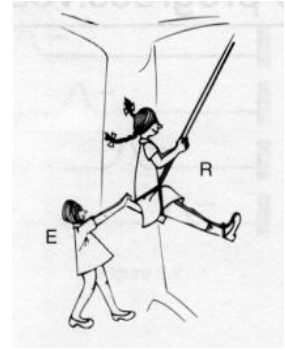
**Le transfert d'énergie a donc un caractère sélectif : le résonateur absorbe l'énergie de façon préférentielle à sa fréquence propre.**

## 2.6.5 Applications

1. Résonance acoustique : 2 diapasons entre en résonance s'ils sont rigoureusement identiques

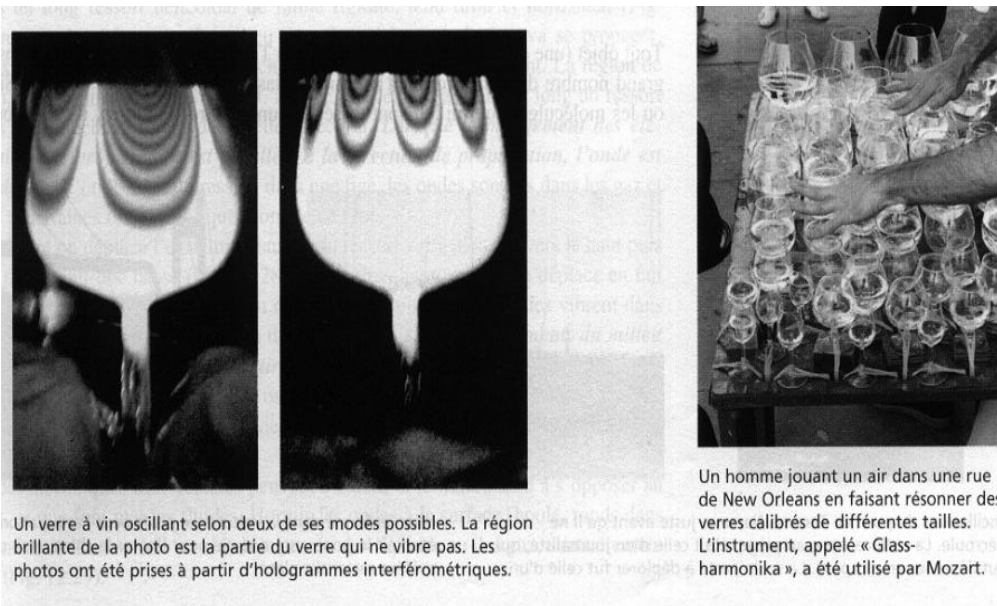
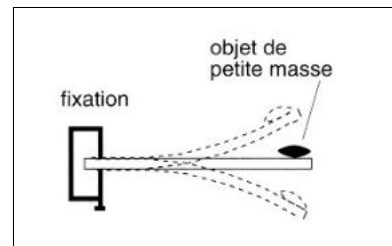


2. Balançoire : Le pousseur (excitateur) communique à la balançoire (résonateur) des impulsions périodiques et ce avec une fréquence égale à celle des oscillations de la balançoire. Dans ces conditions de petites impulsions entraînent une grande amplitude progressive
3. Masse d'eau dans un récipient : l'eau dans une baignoire a une fréquence propre d'oscillation. Des mouvements périodiques de la main la font osciller et peuvent la faire déborder
4. Pièces de voiture : rétroviseur, changement de vitesse, vitre, volant, ... peuvent vibrer lorsque la voiture a une vitesse déterminée : ce qui correspond à une vitesse de rotation du moteur bien déterminée.



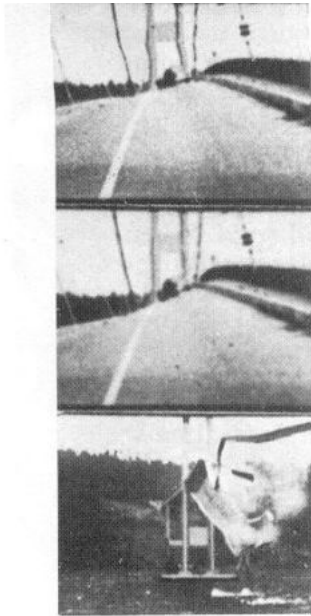
5. Un verre en cristal émet un son si on le frotte à une certaine vitesse.

Si on envoie un son avec une fréquence égale à celle du verre, il est possible que le verre éclate car il absorbe l'énergie acoustique qui lui est apportée à sa fréquence propre.



Un verre à vin oscillant selon deux de ses modes possibles. La région brillante de la photo est la partie du verre qui ne vibre pas. Les photos ont été prises à partir d'hologrammes interférométriques.

Un homme jouant un air dans une rue de New Orleans en faisant résonner des verres calibrés de différentes tailles. L'instrument, appelé « Glass-harmonika », a été utilisé par Mozart.



Oscillations du pont de Tacoma Narrows juste avant qu'il ne s'écroule. La voiture, prise au piège, était celle d'un journaliste, qui put l'évacuer en rampant. La seule perte à déplorer fut celle d'un



chien enfermé dans la voiture. Le professeur Farquharson, qui étudiait le pont, risqua sa vie pour libérer le chien, mais celui-ci préféra rester sur place.



6. Un pont suspendu peut osciller. Le pont de Tacoma aux USA s'effondra car la fréquence des bourrasques de vent était identique à sa fréquence propre d'oscillation. Les ondulations du pont étaient telles que celui-ci ne s'est plus arrêté d'osciller et ce jusqu'à sa destruction.

7. On casse le pas en passant sur un pont pour ne pas avoir une fréquence particulière égale à celle du pont.
8. Les bateaux sont équilibrés pour que leur fréquence propre soit supérieure à celle de la houle.
9. Une voiture montée sur ressorts peut entrer en résonance avec les bosses de la route. Pour l'éviter, on lui met des amortisseurs.

## 2.7 LE VECTEUR DE FRESNEL

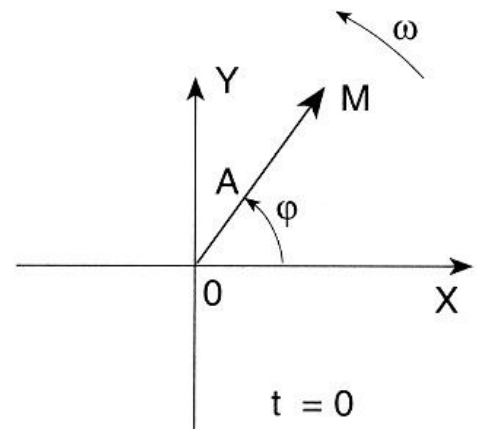
C'est la **représentation graphique de la fonction**  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$

Pour définir complètement un mouvement harmonique, il faut préciser 3 caractéristiques:

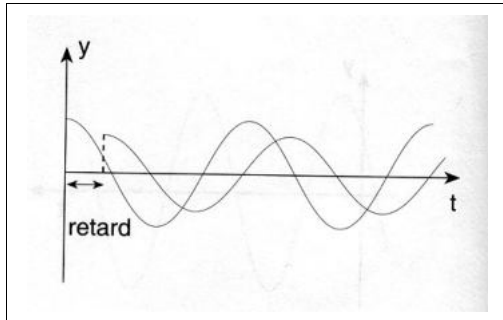
- l'ampleur des oscillations par l'amplitude  $A$
- le rythme des oscillations par  $f$ ,  $T$  ou  $\omega$
- la position initiale par  $\varphi$

Pour représenter *graphiquement* ces 3 caractéristiques, il suffit de dessiner un vecteur  $\vec{A}$  d'amplitude  $A$  qui tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  faisant en  $t=0$ , un angle  $\varphi$  avec l'axe  $X$

**Le vecteur  $A$  est appelé vecteur de Fresnel**



## 2.8 DÉPHASAGE ENTRE 2 OSCILLATEURS DE MÊME FRÉQUENCE



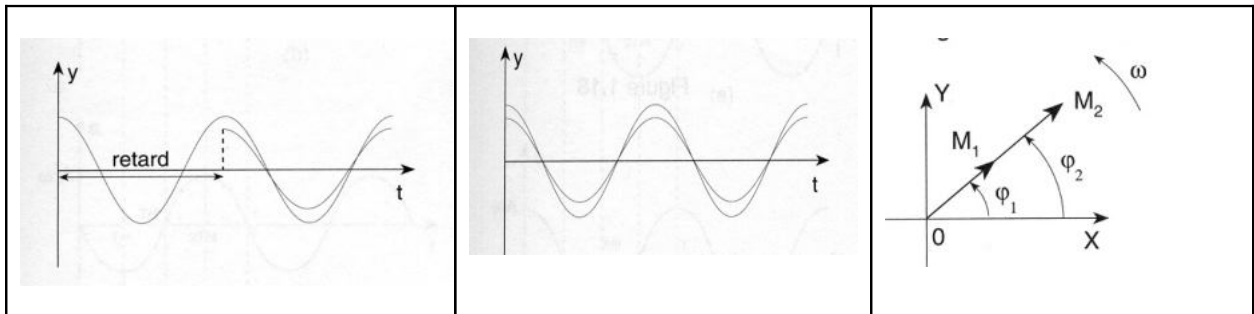
Si 2 pendules sont lâchés à des instants différents, leurs élongations sont déphasées. Un est en retard ou en avance sur l'autre.

Soient 2 MVS d'équation

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ et } y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

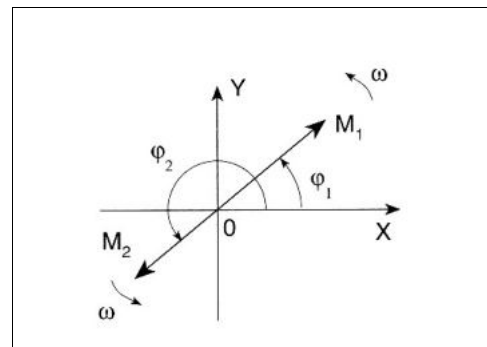
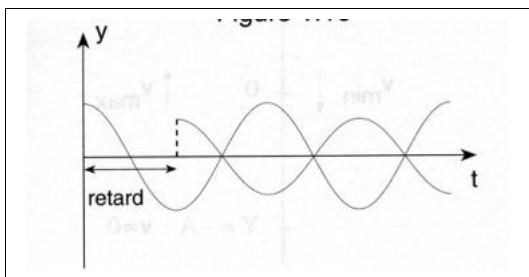
On appelle **déphasage** entre 2 oscillateurs la différence  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \varphi$

Si  $|\varphi_1 - \varphi_2| = 0$  ou  $2k\pi$  les 2 oscillateurs sont en **phase ou en concordance de phase**



Si  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\pi}{2}$  ou  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$  les 2 oscillateurs sont en **quadrature**

Si  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$  ou  $(2k+1)\pi$  les 2 oscillateurs sont en **opposition de phase**



## 2.9 COMPOSITION DE 2 M.V.S DE MÊME FRÉQUENCE ET DE MÊME DIRECTION

### 2.9.1 Introduction

Supposons qu'un point soit animé simultanément par 2 M.V.S. dont la loi est connue.

Chacun de ces 2 M.V.S étant appelé mouvement **composants** c'est à dire que c'est le mouvement que posséderait le point si le 2eme n'existait pas.

**Déterminons les caractéristiques du mouvement résultant c'est à dire la loi du mouvement qu'effectuerait réellement le point sous l'effet combiné des 2 mouvements composants.**

### 2.9.2 Les 2 M. V.S ont la même fréquence ou la même période

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La pulsation est

Appelons  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  les amplitudes et les phases à l'origine des 2 mouvements.

On a  $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  et  $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

**Le principe de superposition consiste à dire que si 2 causes interviennent en même temps, le déplacement imposé au point est égal à la somme géométrique des 2 déplacements qu'imposeraient respectivement les 2 causes en intervenant séparément**

### Méthode de Fresnel

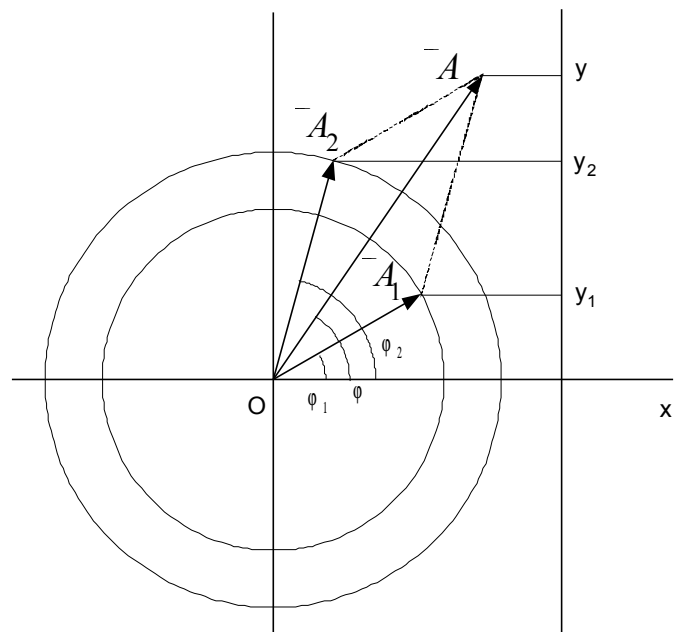
On résout le problème par une simple construction géométrique basée sur les vecteurs de Fresnel.

Conformément au principe du dessus, le mouvement résultant a même direction que les 2 mouvements composants et l'élongation

résultante est  $y = y_1 + y_2$

Pour faire cette somme de 2 fonctions sinusoïdales, regardons le vecteur  $\vec{A}$ , somme vectorielle de  $\vec{A}_1$  et  $\vec{A}_2$ .

Comme  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  sont des constantes, le parallélogramme  $OA_1A_2$  tourne sans se déformer et le vecteur  $\vec{A}$  tourne aussi avec la vitesse  $\omega$  et si  $\varphi$  désigne sa phase à l'origine, la projection de  $\vec{A}$  sur l'axe Y est bien la fonction sinusoïdale que l'on cherche.



Le mouvement résultant est donc sinusoïdal, de pulsation  $\omega$  et de loi -

**La somme de 2 fonctions sinusoïdales de même fréquence  $f$  est encore une fonction sinusoïdale de même fréquence  $f$ .**

Sans démonstration, nous admettrons les 2 formules suivantes permettant de trouver l'amplitude résultante  $A$  et la phase à l'origine  $\varphi$  par l'intermédiaire de sa tangente.

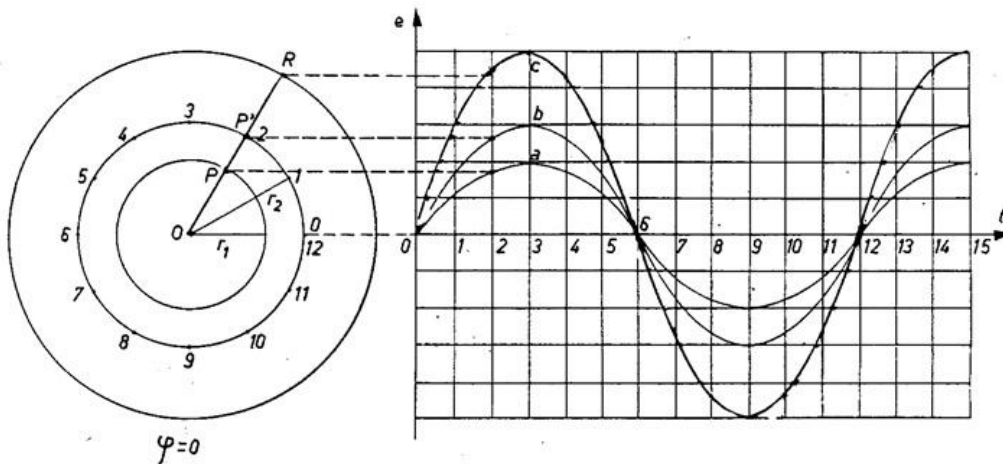
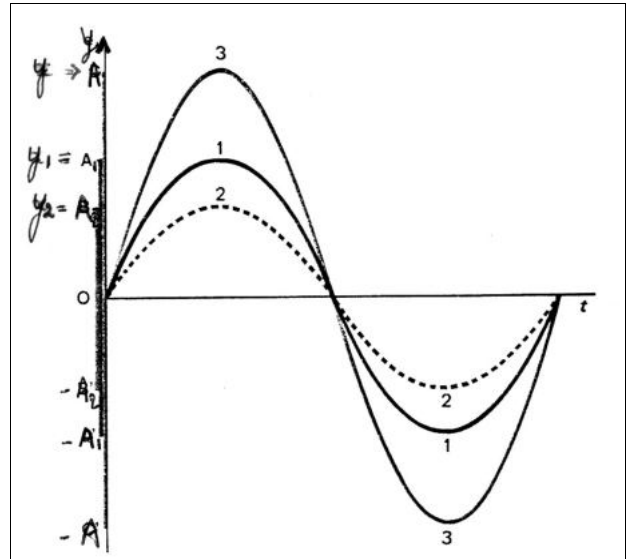
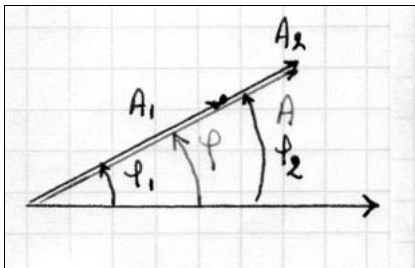
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

### 2.9.3 Composition de 2 MVS en phase

Dans ce cas  $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  ou  $2k\pi$

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{et} \quad A = A_1 + A_2$$

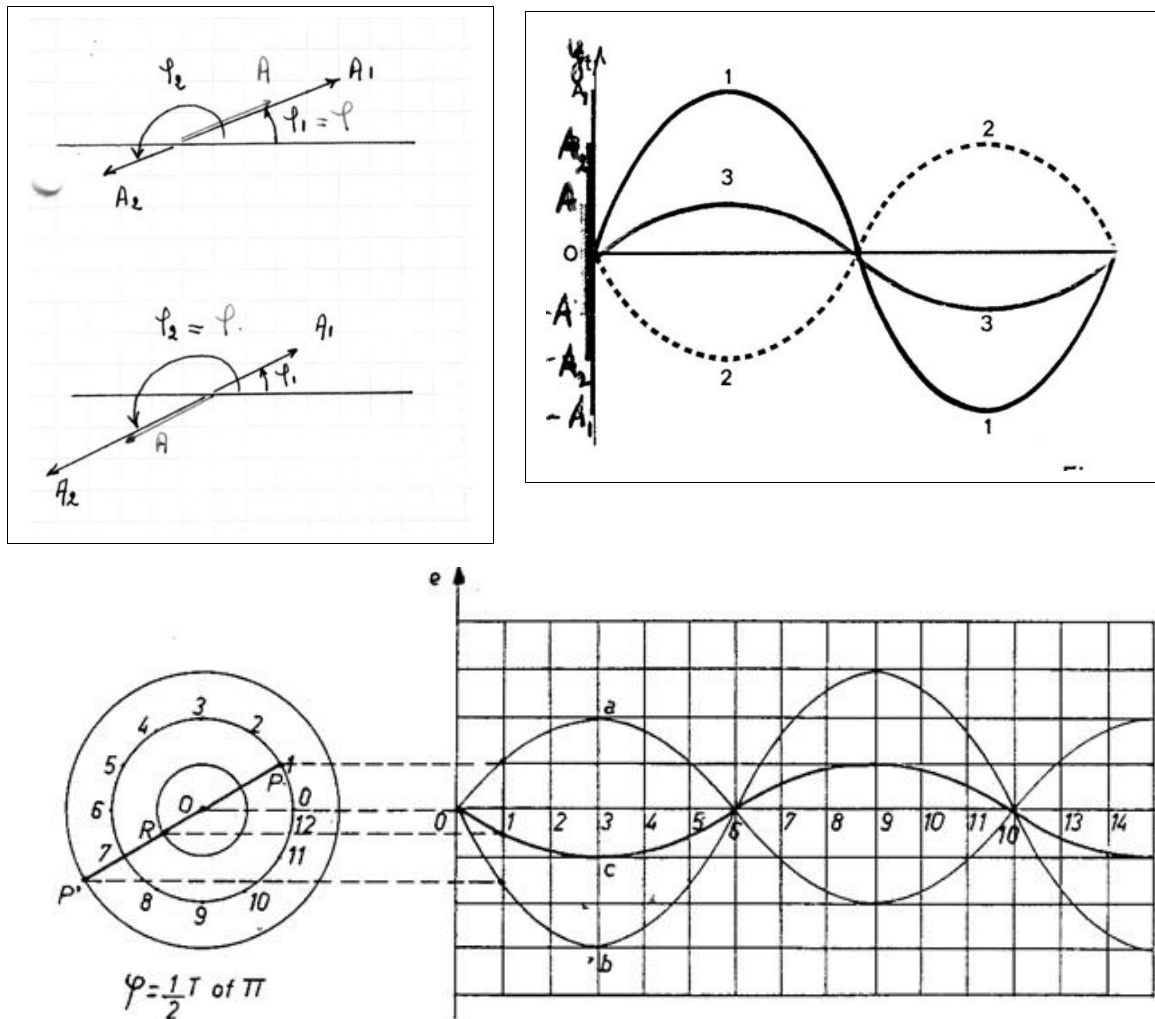


### 2.9.4 Composition de 2 MVS en opposition de phase

Dans ce cas  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi$  ou  $(2k+1)\pi \rightarrow \varphi = \varphi_1$  ou  $\varphi_2$

La phase du mouvement résultant est celle du mouvement qui a la plus grande amplitude.

$$A = |A_1 - A_2|$$



### 2.9.5 Composition de 2 MVS de même fréquence, mais d'amplitude et de phase différentes

#### Exemple 1

Soient les deux MVS donnés par les équations  $y_1 = 3 \sin\left(12t + \frac{\pi}{6}\right)$  et  $y_2 = 4 \sin\left(12t + \frac{6\pi}{7}\right)$   
 Etablir l'équation du mouvement résultant. L'amplitude est donnée en cm

Résolution

L'amplitude résultante est :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{6\pi}{7}\right)} = 3.39 \text{ cm}$$



La phase résultante peut se calculer de deux façons différentes. Soit on applique directement la

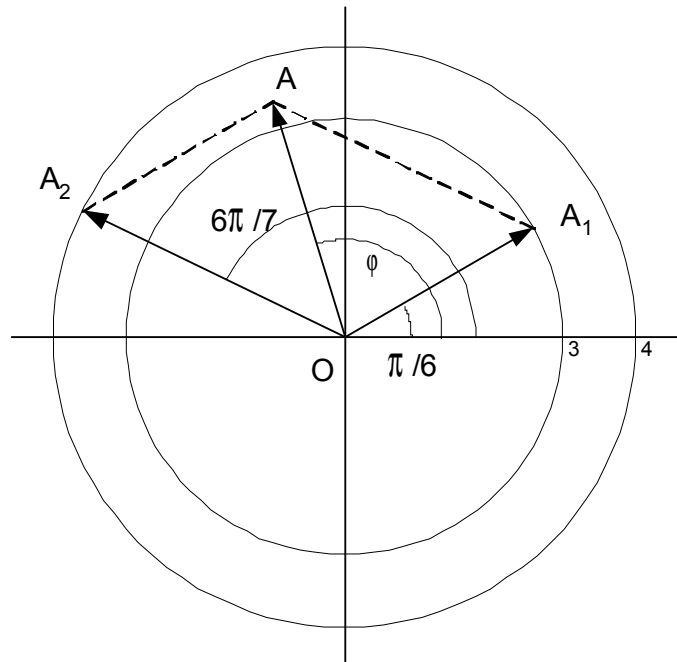
$$\text{formule } \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{6} + 4 \sin \frac{6\pi}{7}}{3 \cos \frac{\pi}{6} + 4 \cos \frac{6\pi}{7}} = -3.217 \rightarrow \varphi = 1.87 \text{ rad}$$

Ou bien on résout le triangle  $OAA_1$  :

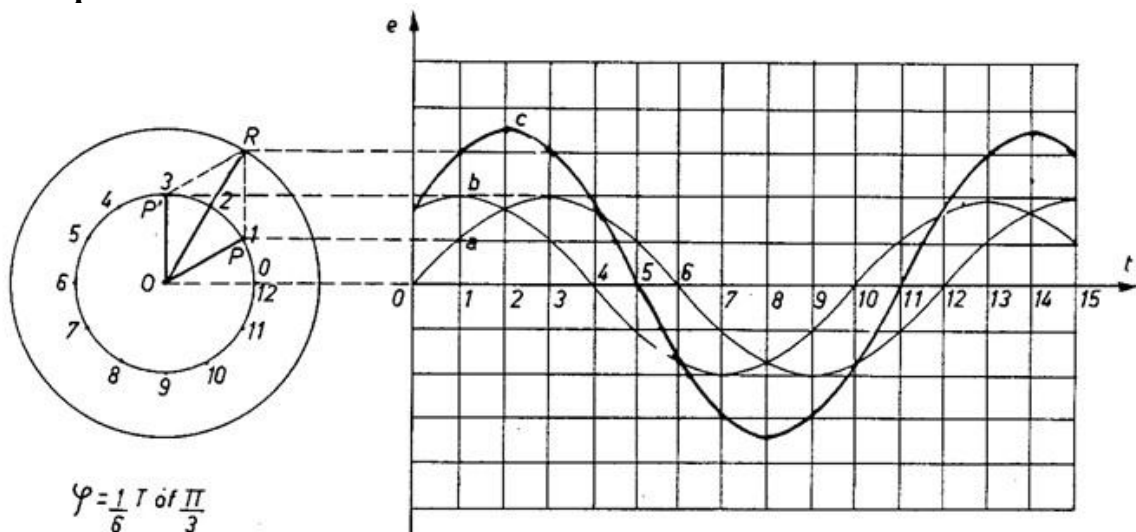
$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{A^2 + A_1^2 - A_2^2}{2AA_1} = \frac{3.39^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 3.39 \times 3} = 1.348 \rightarrow (\varphi - \varphi_1) = 1.348$$

$$\rightarrow \varphi = 1.348 + \frac{\pi}{6} = 1.87 \text{ rad}$$

Finalement, l'équation du mouvement est :  $y = 3.39 \sin(12t + 1.87)$



### Exemple 2



## Exercices sur le MVS

1. L'abscisse  $Y$  d'un point animé d'un MVS est  $Y = 5 \sin 6t$ . ( $Y$  en cm et  $t$  en s)  
Déterminer l'amplitude, la pulsation, la fréquence, la phase à l'origine et la période de ce MVS  
(rép : 5cm / 6 rad/s / 0.95Hz /  $\varphi=0$  rad / 1.05s )

2. Ecrire l'équation d'un MVS d'un mobile sachant qu'en  $t = 0$ , son élongation est maximale et égale à +10cm et que son accélération est de  $-40 \text{ cm/s}^2$ .  
(rép :  $y = 10 \sin (2t + \pi / 2)$  )

Même question sachant que l'amplitude vaut 10cm et qu'en  $t = 0$ , que se trouve son élongation  $Y = -5 \text{ cm}$  et qu'il va de haut en bas. La période  $T = 2\pi$  seconde.  
(rép :  $Y = 10 \sin (1t - 5\pi / 6)$  )

3. Un corps de 400g est en MVS avec une amplitude de 20 cm, une période de 2s et  $\varphi = 0$   
Calculer la vitesse, l'accélération et la force de rappel sur ce corps en  $Y = 0$ ,  $Y = 20\text{cm}$  et  $Y = 5\text{cm}$   
(rép : 0.628 m/s / 0 m/s / 0.608 m/s      0m/s<sup>2</sup> / -1.97m/s<sup>2</sup> / -0.49m/s<sup>2</sup>  
0N / -0.788N / -0.196 N )

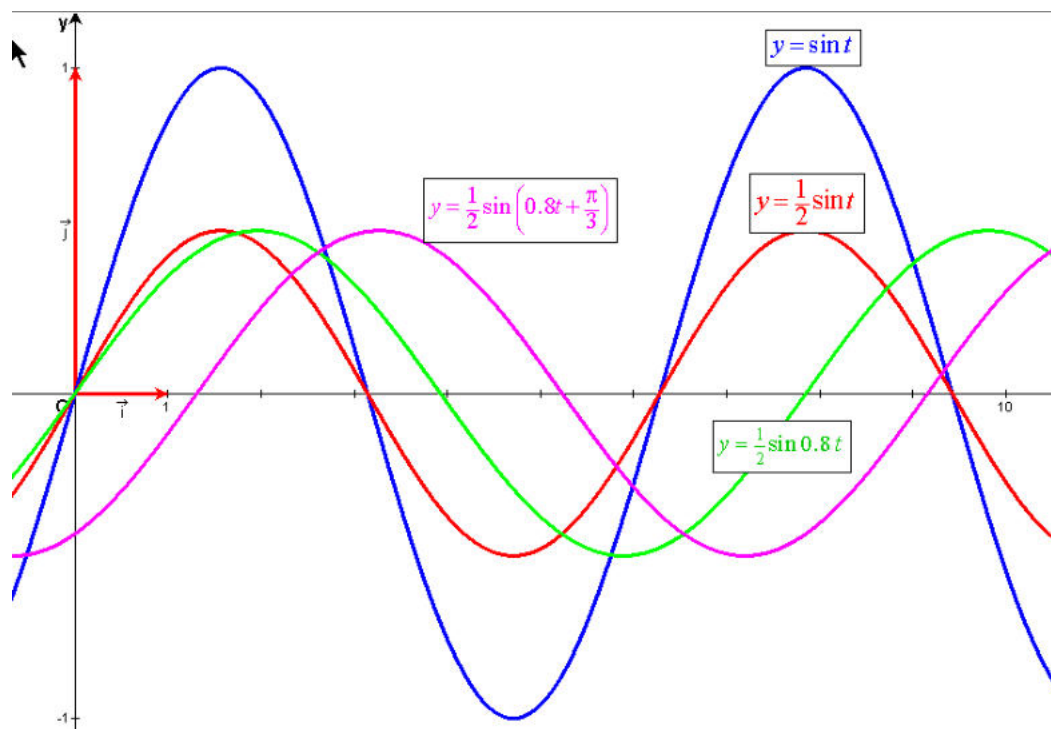
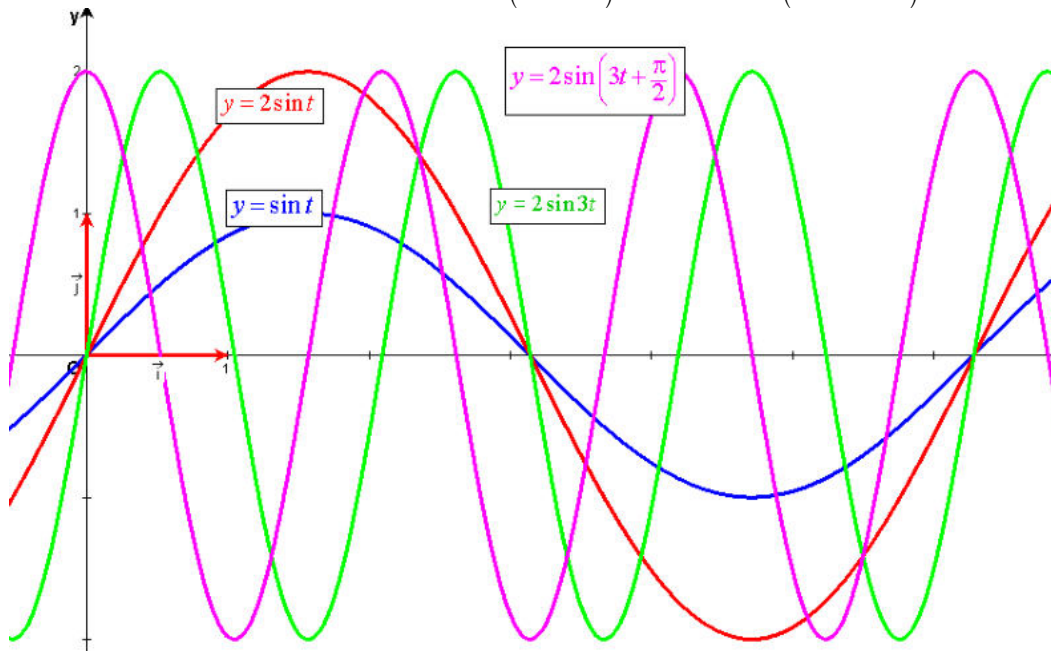
4. En un point s'ajoutent algébriquement 2 MVS  
a)  $Y_1 = 8 \sin 10\pi t$  et  $Y_2 = 6 \sin(10\pi t + \pi / 2)$   
b)  $Y_1 = 15 \sin(10\pi t)$  et  $Y_2 = 15 \sin (10\pi t + 3\pi / 2)$   
c)  $Y_1 = 2 \sin(\omega t - \pi / 3)$  et  $Y_2 = 2 \sin (\omega t + \pi / 6)$

Etablir l'équation du mouvement résultant dans les 3 cas

# Le MVS

## Exemples

Construire les sinusoïdes d'équation  $y = 2 \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$  et  $y = \frac{1}{2} \sin\left(0.8t - \frac{\pi}{3}\right)$



1. L'abscisse Y d'un point animé d'un MVS est  $Y = 5 \sin 6t$  (Y en cm et t en s)  
Déterminer l'amplitude, la pulsation, la fréquence, la phase à l'origine et la période de ce MVS.

Résolution

a)  $Y = A \sin(\omega t + \varphi)$  ici  $Y = 5 \sin 6t \rightarrow A = Y_{\max} = 5 \text{ cm}$

b)  $\omega = 6 \text{ rad/s}$

c)  $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = 0.955 \text{ Hz}$

d)  $\varphi = 0$

e)  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.955} = 1.05 \text{ s}$

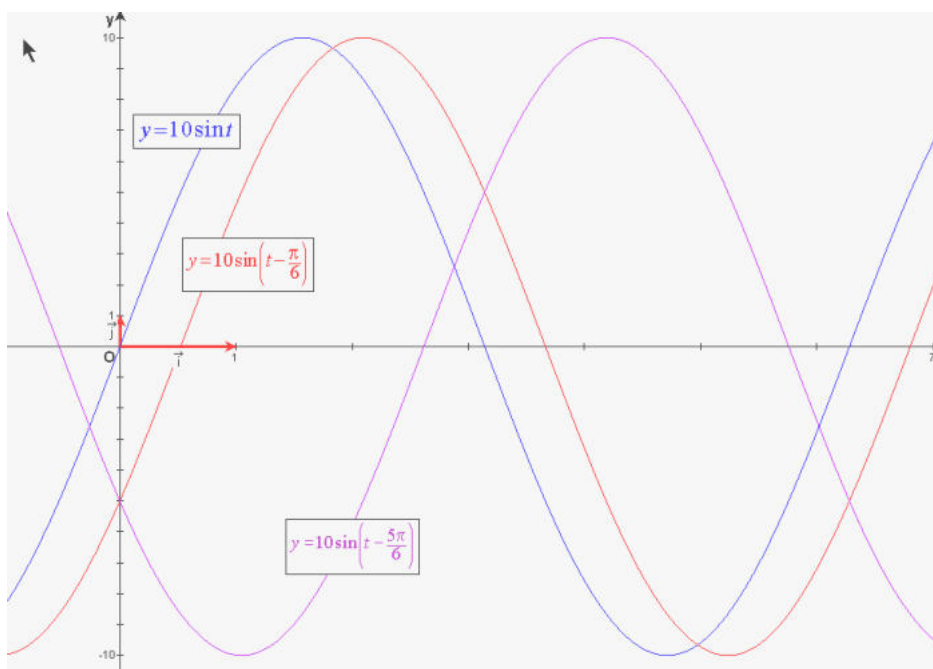
2. Ecrire l'équation du MVS d'un mobile sachant qu'en  $t = 0$ , son élongation est maximale et égale à  $+10 \text{ cm}$  et que son accélération est de  $-40 \text{ cm/s}^2$

Résolution

$$\text{si } t = 0 \rightarrow \begin{cases} y = y_{\max} \rightarrow \begin{cases} A = 10 \text{ cm} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ a = y'' = -\omega^2 y \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-a}{y}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Conclusion :  $y = 10 \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

3. Même question que la 2), sachant que l'amplitude vaut  $10 \text{ cm}$ , qu'en  $t = 0$ , son élongation vaut  $y = -5 \text{ cm}$ , qu'il va de haut en bas et que sa période est de  $2\pi \text{ s}$ .



## Résolution

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 10 \text{ cm} \\ t = 0 \rightarrow y = -5 \text{ cm} \rightarrow y = A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow -5 = 10 \sin \varphi \rightarrow \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s} \end{array} \right\} \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{5\pi}{10} \\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Supposons  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow y = 10 \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow y' = v = 10 \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow v(0) = 10 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Supposons  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow y = 10 \sin\left(t - \frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow y' = v = 10 \cos\left(t - \frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow v(0) = 10 \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -10 \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Or d'après l'énoncé,  $y(0) = -5$  et le mobile va de haut en bas. Autrement dit,  $y$  s'éloigne de sa position d'équilibre et donc DECROIT  $\rightarrow y$  doit être  $< 0$

Conclusion :  $y = 10 \sin\left(t - \frac{5\pi}{6}\right)$

4. Un corps de 400 g est en MVS avec une amplitude de 20 cm, une période 2s et une phase à l'origine nulle. Calculer la vitesse, l'accélération et la force de rappel sur ce corps en  $y = 0$ ,  $y = 20$  cm et  $y = 5$  cm

## Résolution

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 20 \text{ cm} \\ T = 2 \text{ s} \rightarrow \omega = \pi \text{ rad/s} \rightarrow y = 0.2 \sin \pi t \\ \varphi = 0 \end{array} \right.$$

|                         | $y = 0 \text{ m}$  | $y = 0.2 \text{ m}$    | $y = 0.05 \text{ m}$                                   |
|-------------------------|--------------------|------------------------|--------------------------------------------------------|
| $t$                     | 0 s                | 0.5 s                  | $0.05 = 0.2 \sin \pi t \rightarrow t = 0.08 \text{ s}$ |
| $v = 0.2\pi \cos \pi t$ | 0.628 m/s          | 0 m/s                  | 0.608 m/s                                              |
| $a = -\omega^2 y$       | 0 m/s <sup>2</sup> | -1.97 m/s <sup>2</sup> | -0.49 m/s <sup>2</sup>                                 |
| $F = ma$                | 0 N                | -0.788 N               | -0.196 N                                               |

5. Quelle la période d'un pendule de 1 m de long ?

Résolution

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9.81}} = 2,0061 \text{ s} \approx 2 \text{ s}$$

Cette valeur est assez remarquable. On appelle ce pendule le pendule des secondes.

Notes : Le pendule

- Permet la mesure du temps
- Permet de démontrer la rotation de la Terre. (Pendule de Foucault)
- La simplification par  $m$  dans  $ma = mgy/l$  n'est pas innocente. En effet, les  $m$  dans les deux membres ne sont pas de même nature. En simplifiant, on postule que masse inertielle et gravifique sont identiques. Si ce n'était pas le cas, la période du pendule dépendrait de la masse. On vérifie jusque des périodes aussi petites que  $10^{-12}$  s qu'il en est bien ainsi.