

Chap 3 : Biomécanique

Rappels

Les conditions d'équilibre statique sont :

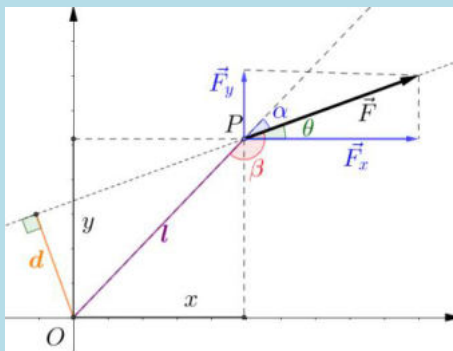
Equilibre de translation : la résultante des forces extérieures qui agissent sur le corps est nulle.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Equilibre de rotation : la somme des moments des forces extérieures qui agissent sur le corps est nul. Le choix du centre de rotation est quelconque.

$$\sum \vec{\Gamma}_E = \vec{0}$$

Calcul pratique du moment d'une force



Dans les exercices, les forces considérées sont toujours coplanaires. On peut déterminer le moment d'une force selon trois méthodes :

- 1) $\Gamma_{\vec{F}} = F.l.\sin \alpha$
 - F : grandeur de la force \vec{F}
 - l : distance entre le centre de rotation et le point d'action de la force
 - α : angle entre la droite support de \vec{F} et la droite support de l

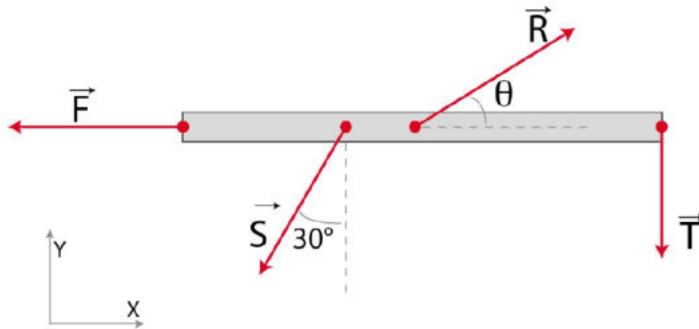
Note : il est équivalent de prendre α ou β car ce sont des angles supplémentaires.

- 2) $\Gamma_{\vec{F}} = F.d$
 - d : bras de levier, distance entre le centre de rotation et la droite support de la force. ($d = l \sin \alpha$)

- 3) $\Gamma_{\vec{F}} = y.F_x + x.F_y$
 - F_x, F_y : composantes horizontale et verticale de \vec{F}
 - x, y : coordonnées de P , points d'action de \vec{F}

Note : $F_x = F \cos \theta$, $F_y = F \sin \theta$

Exercice 3.1 Une barre horizontale subit quatre forces, représentées à la figure ci-dessous. Tant en équilibre de translation, elle respecte la condition $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$. On vous demande (a) de trouver les composantes R_x et R_y de la force inconnue \vec{R} , et (b) de calculer sa norme R et sa direction θ . On donne les valeurs numériques suivantes : $\|\vec{F}\| = 40 \text{ N}$, $\|\vec{T}\| = 25 \text{ N}$ et $\|\vec{S}\| = 30 \text{ N}$.



Solution

Il suffit d'écrire l'équilibre de translation.

$$\begin{cases} R_x = R \cos \theta = F + S \sin 30^\circ = 40 + 30 \times \frac{1}{2} = 55 \text{ N} & (1) \end{cases}$$

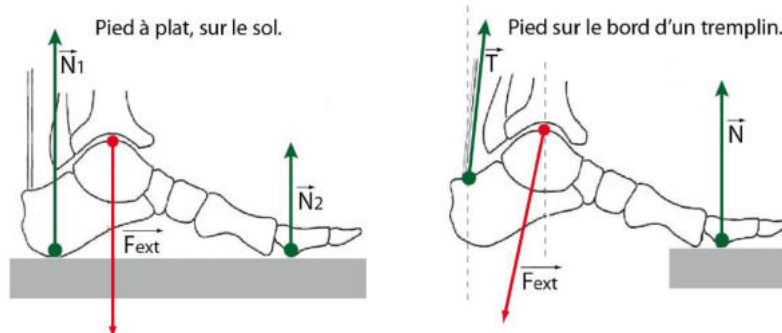
$$\begin{cases} R_y = R \sin \theta = S \cos 30^\circ + T = 30 \cos 30^\circ + 25 = 50.98 \text{ N} & (2) \end{cases}$$

Pour obtenir θ , on divise (2) par (1):

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{50.98}{55} = 42.83^\circ$$

$$\Rightarrow R = \frac{R_x}{\cos \theta} = \frac{55}{\cos 42.83^\circ} = 75 \text{ N}$$

Exercice 3.2 Statique du pied dans deux positions. L'objectif est de comparer, pour un homme de poids W , un pied posé à plat sur le sol à une situation où le pied ne repose que sur l'avant, comme c'est le cas par exemple pour un plongeur "en pleine concentration", s'appêtant à effectuer un saut vers l'arrière depuis le bord d'un tremplin. Le tendon d'Achille n'exerce une force que dans la seconde situation (voir figure 3.1). On considère un homme "normal", de masse 70 kg.



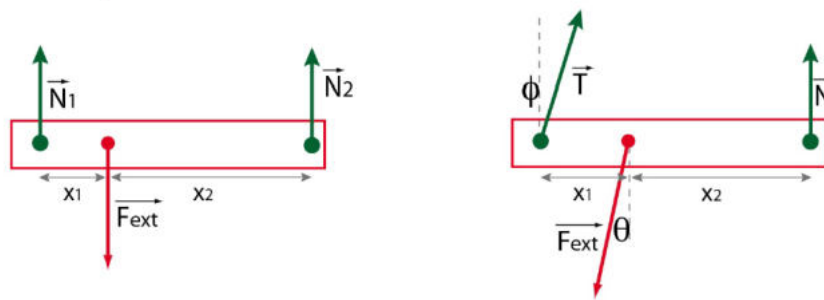


FIGURE 3.1 – Statique du pied (exercice 3.2).

On demande de calculer :

1. pour le pied à plat, la grandeur des deux forces normales \vec{N}_1 et \vec{N}_2 exercées par le sol sur le pied.
2. pour le pied à l'équilibre sur le bord du tremplin, la grandeur de la force \vec{T} agissant sur le tendon.
3. pour le pied à l'équilibre sur le bord du tremplin, la grandeur de la force \vec{F}_{ext} et de l'angle θ .

Remarques :

- La valeur de l'angle ϕ peut être déterminée par l'observation d'athlètes dans cette position d'équilibre avant un saut. On prendra la valeur $\phi = 8^\circ$.
- Les valeurs moyennes des dimensions d'un pied donnent : $x_1 = 6,2 \text{ cm}$ et $x_2 = 12,3 \text{ cm}$.
- Après avoir réalisé les calculs, il est important de donner une interprétation aux valeurs obtenues, en les comparant avec le poids (W , paramètre).

Solution

$$1) F_{ext} = \frac{70}{2} \times 9.81 = 343.35 \text{ N}$$

$$\text{Rot : } N_2 (x_1 + x_2) = F_{ext} \cdot x_1 \Rightarrow N_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} F_{ext} = \frac{6.2}{6.2 + 12.3} \times 343.35 = 115.07 \text{ N}$$

$$\Rightarrow N_1 = F_{ext} - N_2 = 343.35 - 115.07 = 228.3 \text{ N}$$

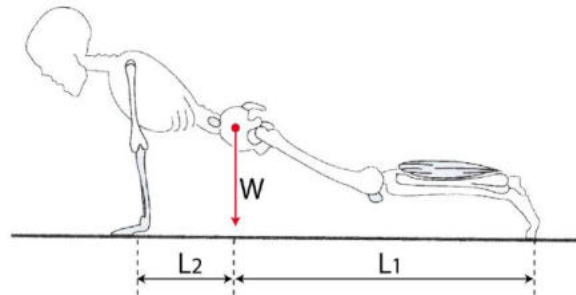
$$2 \text{ et } 3) N = \frac{70}{2} \times 9.8 = 343.35 \text{ N}$$

$$\text{Rot : } T \cos \phi \cdot x_1 = N \cdot x_2 \Rightarrow T = \frac{x_2}{x_1 \cos \phi} \frac{N}{\cos 8^\circ} = \frac{12.3}{6.2} \frac{343.35}{\cos 8^\circ} = 687.9 \text{ N}$$

$$\text{Tr: } \begin{cases} T \sin \phi = F_{ext} \sin \theta \\ T \cos \phi + N = F_{ext} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{ext} \sin \theta = 687.9 \times \sin 8^\circ = 95.73 \text{ N} \\ F_{ext} \cos \theta = 343.35 + 687.9 \cos 8^\circ = 1024.51 \text{ N} \end{cases}$$

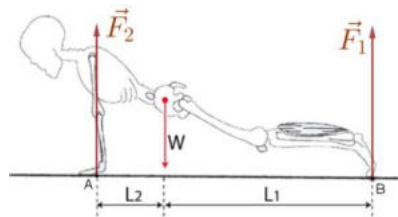
$$\Rightarrow \theta = \arctan \frac{95.73}{1024.51} = 5.34^\circ \Rightarrow F_{ext} = \frac{1024.51}{\cos 5.34^\circ} = 1029 \text{ N}$$

Exercice 3.3 La figure 3.2 illustre un homme entretenant sa forme par des pompes. Les distances représentées ont les valeurs suivantes : $L_1 = 90 \text{ cm}$ et $L_2 = 55 \text{ cm}$. L'homme a une masse de 70 kg.



1. Représenter les forces exercées sur le gymnaste.
2. Calculer la composante verticale de la force exercée par le sol sur chacune des deux mains.
3. Calculer la force normale exercée par le sol sur chacun des deux pieds.

Solution



$$F_2(L_2 + L_1) = W \cdot L_1 \Rightarrow F_2 = \frac{L_1}{L_2 + L_1} W = \frac{90}{90 + 55} \times 70 \times 9.81 = 426.2 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_2 = W - F_1 = 70 \times 9.81 - 426.2 = 260.5 \text{ N}$$

Exercice 3.4 La figure 3.3 montre un avant-bras humain soutenant un poids de 12 N. Le poids de l'avant-bras vaut 12 N également. Évaluer la force \vec{T} exercée par le biceps et la force \vec{E} exercée par l'articulation du coude.

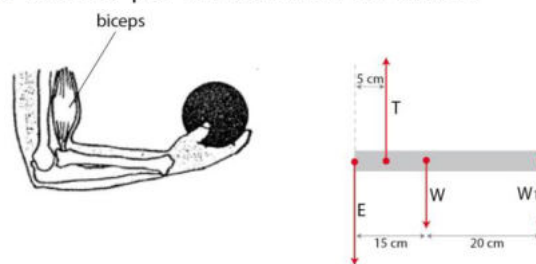


FIGURE 3.3 – Avant-bras (exercice 3.4).

Solution

$$\text{Rot} : 5T = 15W + (15 + 20)W_1 \Rightarrow T = \frac{15 \times 12 + 35 \times 12}{5} = 120 \text{ N}$$

$$\text{Tr} : E = T - W - W_1 = 120 - 12 - 12 = 96 \text{ N}$$

Exercice 3.5 Une personne de 70 kg se tient à l'équilibre sur un pied. Les os du pied sont schématisés à la figure 3.4 par une barre rigide inclinée à 40° par rapport à l'horizontale. La force \vec{T} représente la force exercée par le tendon d'Achille, la force \vec{R} représente la force exercée par le tibia sur les os du pied et \vec{N} est la réaction du sol sur le point de contact du pied (\vec{N} représente l'entière du poids de la personne).

— Déterminez la norme des vecteurs \vec{R} et \vec{T} , ainsi que l'angle θ .

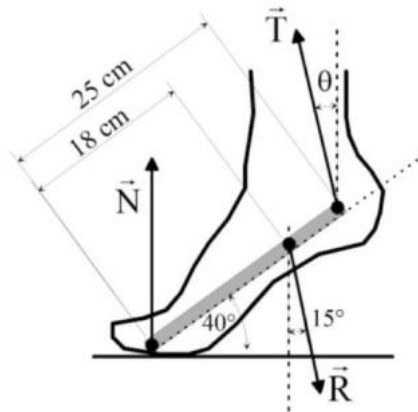


FIGURE 3.4 – Pied (exercice 3.5).

Solution

$$\text{Rot} : 25N \sin(90^\circ - 40^\circ) = (25 - 18) R \sin(90^\circ - 40^\circ + 15^\circ)$$

$$\Rightarrow R = \frac{70 \times 9.81 \times 25 \times \sin 50^\circ}{8 \times \sin 65^\circ} = 2073 \text{ N}$$

$$\text{Tr} : \begin{cases} T \sin \theta = R \sin 15^\circ \\ T \cos \theta + N = R \cos 15^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sin \theta = 2073 \sin 15^\circ = 536.5 \\ T \cos \theta = 2073 \cos 15^\circ - 70 \times 9.81 = 1315.6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{536.5}{1315.6}\right) = 22.2^\circ \Rightarrow T = \frac{1315.6}{\cos 22.2^\circ} = 1420.8 \text{ N}$$

Exercice 3.6 Dans la figure 3.5, une barre rigide modélise le tronc d'un homme normal, incliné de 30° vers l'avant. Le poids de la tête (\vec{T}) est appliqué à l'extrémité S de la barre et vaut 20 % du poids total de l'homme (W). Le poids du tronc (\vec{P}) est appliqué à son centre de gravité, situé au milieu de la barre, et vaut 40 % du poids total de l'homme. Les muscles exercent une force \vec{F} pour retenir le tronc.

— Calculer la norme de \vec{F} .

— Calculer la norme de \vec{R} et sa direction ϕ , et/ou les coordonnées $(R_x; R_y)$.

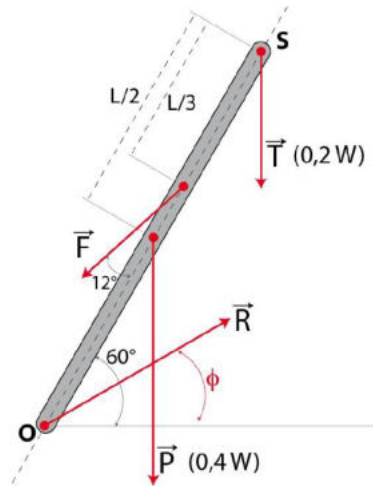


FIGURE 3.5 – Corps incliné (exercice 3.6).

Solution

$$T = 0.2W, \quad P = 0.4W$$

$$\text{Rot} : F \cdot \frac{2L}{3} \cdot \sin 12^\circ = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin 30^\circ + T \cdot L \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow F = \frac{0.4W \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0.2W \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \sin 12^\circ} = 1.44W$$

$$\text{Tr} : \begin{cases} R_x = R \cos \phi = F \cos (60^\circ - 12^\circ) = 1.44W \cos 48^\circ = 0.964W \text{ N} \\ R_y = R \sin \phi = P + T + T \sin 48^\circ = 0.2W + 0.4W + 1.44W \sin 48^\circ = 1.67W \text{ N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan \frac{1.67W}{0.964W} = 60^\circ \Rightarrow R = \frac{1.67W}{\sin 60^\circ} = 1.93W \text{ N}$$

Exercice 3.7 La figure 3.6 représente une mâchoire humaine. Le mandibule (l'os inférieur de la mâchoire) pivote autour du point O, situé à côté de l'oreille. Lorsque l'on mâche, trois forces s'exercent sur le mandibule : \vec{F}_{ext} est la force exercée par les aliments, \vec{T} est la force exercée par les muscles, et \vec{R} est la force exercée par le crâne sur le mandibule au point de pivotement.

Le mandibule est schématisé par deux tiges soudées (donc, formant un seul solide rigide) formant un angle de 110° l'une par rapport à l'autre; on donne les longueurs $L_1 = 9 \text{ cm}$ et $L_2 = 5 \text{ cm}$. On fait l'hypothèse simplificatrice que toutes ces forces sont parallèles.

On demande de calculer, lorsqu'en mâchant la personne exerce une force de 40 N sur les aliments :

1. la grandeur de la force \vec{T} ,
2. la grandeur de la force \vec{R} ,
3. recalculer, en utilisant cette fois la formule des leviers.

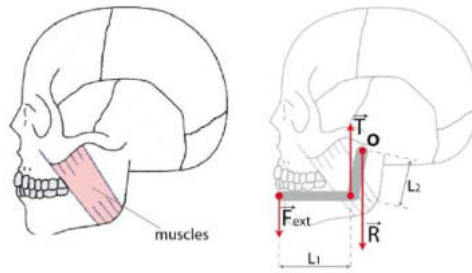
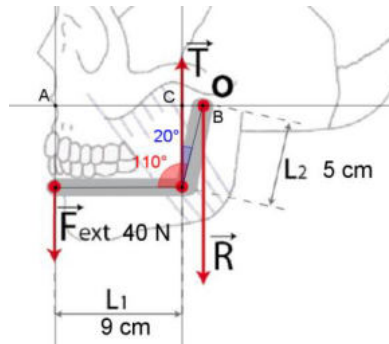


FIGURE 3.6 – Mâchoire (exercice 3.7).

Solution



$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} = L_1 + L_2 \sin(110^\circ - 90^\circ) = 9 + 5 \sin 20 = 10.71 \text{ cm}$$

$$\text{Rot : } F \cdot \overline{AB} = T \cdot \overline{CD} \Rightarrow T = 40 \times \frac{10.71}{5 \sin 20^\circ} = 250.5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow R = T - F = 250.5 - 40 = 210.5 \text{ N}$$

Exercice 3.8 Suite à une fracture, un patient doit se faire immobiliser la jambe (voir schéma ci-dessous). Si le poids de la jambe est de 150 N, déterminez l'angle θ ainsi que la norme de la tension dans le câble 1.

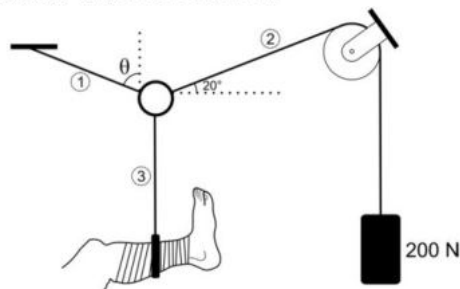
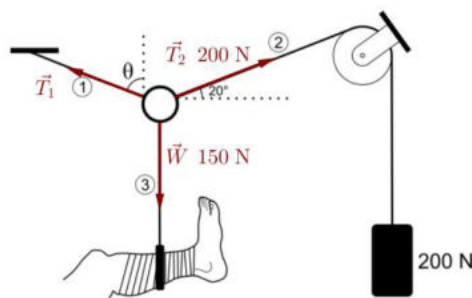


FIGURE 3.7 – Illustration de la jambe immobilisée (exercice 3.8).

Solution



$$\text{Tr: } \begin{cases} T_1 \sin \theta = T_2 \cos 20^\circ \\ T_1 \cos \theta + T_2 \sin 20^\circ = W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 \sin \theta = 200 \cos \theta = 187.9 \text{ N} \\ T_1 \cos \theta = 150 - 200 \sin 20^\circ = 81.6 \text{ N} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \theta = \arctan \frac{187.94}{81.6} = 66.5^\circ \Rightarrow T_1 = \frac{187.9}{\sin 66.5^\circ} = 204.9 \text{ N}$$