Chap 4 – Electrophysiologie et défibrillateur cardiaque

Les énoncés sont extraits de :
Physique médicale - 2016-2017 P. Louette, M. Dontaine, M. da Silva Pires, M. Lobet Travaux dirigés. Université de Namur.

Rappels

Le module de la **force électrique** entre deux charges ponctuelles q et Q séparées par une distance r est donnée par la loi de Coulomb :

$$\boxed{F = k\frac{qQ}{r^2} \qquad k = 9\times10^9 \text{ N.m}^2/C^2}$$

Si $F > 0$, la force est répulsive et si $F < 0$, la force est attractive.
Le **champ électrique** généré par une charge ponctuelle Q est donné :

$$\boxed{E = k\frac{Q}{r^2} \qquad \text{V/m ou N/C}}$$

Une charge q placée dans un dans un champ électrique $\vec{E}$ subit une force $\boxed{\vec{F} = q.\vec{E}}$

Lorsqu'on est en présence de plusieurs charges, le champ électrique total est donné par le principe de superposition : $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$

Le **potentiel électrique** en un point donné est égal à l'énergie potentielle électrique que possède un objet placé en ce point divisée par la charge de l'objet :

$$\boxed{V_E = \frac{U_E}{q}}$$

Dans un champ électrique uniforme, la variation de potentiel s'écrit : $\boxed{\Delta V = \pm E.d}$ où $\pm d$ est la composante parallèle à $\vec{E}$ entre le point initial et le pont final. (Signe + si déplacement dans le sens contraire du champ).
Le potentiel à la distance r d'une charge ponctuelle Q est donné par :

$$\boxed{V = \frac{kQ}{r}}$$

L'énergie potentielle d'un système de charges est donnée par :

$$\boxed{U = \sum_{i<j} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Ne pas compter deux fois les contributions des charges.
Un **condensateur** est un dispositif qui emmagasine la charge et l'énergie électrique.
Pour un condensateur dont les armatures portent les charges $\pm Q$ et ont entre elles une différence de potentielle ΔV, la **capacité** du condensateur est :

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}}$$

En fonction de ces caractéristiques géométriques, la **capacité d'un condensateur plan** est :

$C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$	C	Capacité (F)
	ε_0	Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m
	A	Aire d'une armature (m^2)
	d	Distance entre armature (m)

Pour N capacités, la **capacité équivalente** est

En série : $$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N}$$

En parallèle : $$C_{éq} = C_1 + C_2 + ... + C_N$$

L'énergie emmagasinée sous forme d'**énergie potentielle** dans un condensateur est :

$$U_E = \frac{1}{2}Q.\Delta V = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C.\Delta V^2$$

Un **diélectrique** est un corps non conducteur introduit entre les armatures d'un condensateur.

Champ électrique	$E_D = \dfrac{E_0}{\kappa}$	$\kappa =$ constante diélectrique
Capacité	$C_D = \kappa C_0$	

L'**intensité** d'un courant électrique est la quantité de charge qui traverse la section d'un conducteur par unité de temps.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La **loi d'Ohm** exprime la relation entre tension et courant :

$\Delta V = R.I$	ΔV	Tension (V)
	R	Résistance (Ω)
	I	Intensité du courant (A)

La **puissance** fournie est donnée par :

$P = I.\Delta V = RI^2 = \dfrac{\Delta V^2}{R}$	P	Puissance (W)
	I	Intensité (A)
	ΔV	Tension (V)
	R	Résistance (Ω)

Exercice 4.1 Deux charges ponctuelles de $-4\mu C$ et $+8\mu C$ sont placées respectivement aux points A et B distants de $1m$.

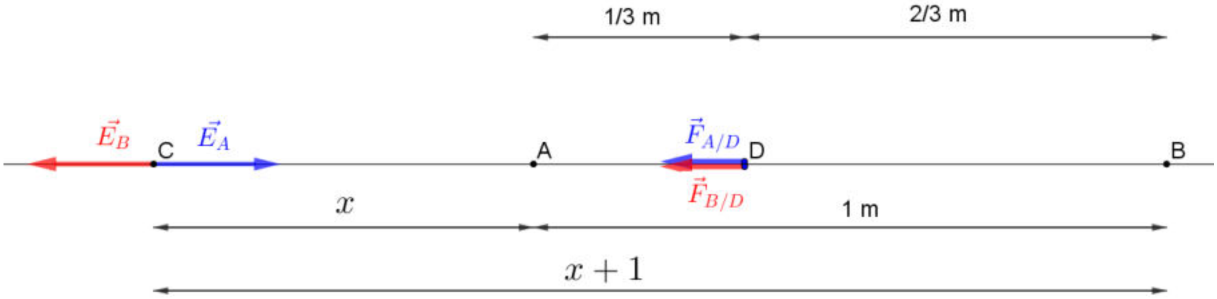
a) En quel point C, situé sur la droite AB, le champ électrique total est-il nul ?

b) Quel est le potentiel au point C ?

c) Que vaut la force de Coulomb, sur une charge de $1nC$, au point D situé à $1/3m$ de A entre A et B ?

d) Déterminez le potentiel au point D.

Solution



1) Le point C se trouve obligatoirement à gauche du point A (Voir figure)

Placons l'origine en C, sens positif vers A. On a

$$\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_B} \Rightarrow k\frac{|Q_A|}{x^2} = k\frac{|Q_B|}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{|Q_A|}}{x} = \pm\frac{\sqrt{|Q_B|}}{x+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{|Q_A|}(x+1) = \sqrt{|Q_B|}x \\ \sqrt{|Q_A|}(x+1) = -\sqrt{|Q_B|}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{|Q_A|}}{\sqrt{|Q_B|}-\sqrt{|Q_A|}} \\ x = -\dfrac{\sqrt{|Q_A|}}{\sqrt{|Q_B|}+\sqrt{|Q_A|}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}-\sqrt{4}} = 1+\sqrt{2} \simeq 2.41 \text{ m} \\ x = -\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}+\sqrt{4}} = 1-\sqrt{2} \simeq -0.41 \text{ m} \end{cases}$$

La valeur de 0.41 m correspond à un point situé entre A et B et donc à rejeter.

$\Rightarrow x = 2.41$ m

2) $$V_C = V_{C/A} + V_{C/B} = +\frac{kQ_A}{x} + \frac{kQ_B}{x+1} = 9\times10^9\left(\frac{-4\times10^{-6}}{2.41} + \frac{8\times10^{-6}}{3.41}\right) = 6.18 \text{ kV}$$

3) $\overrightarrow{F_D} = \vec{F}_{D/A} + \vec{F}_{D/B}$. Les forces sont de même direction et de même sens.

$$\Rightarrow F_D = F_{D/A} + F_{D/B} = \frac{kQ_DQ_A}{(1/3)^2} + \frac{kQ_DQ_B}{(2/3)^2} = kQ_D\left(9Q_A + \frac{9}{4}Q_B\right)$$

$$= 9\times10^9 \times 1\times10^9\left(9\times4\times10^{-6} + \frac{9}{4}\times8\times10^{-6}\right) = 0.486 \text{ mN}$$

4) $$V_D = V_{D/A} + V_{D/B} = +\frac{kQ_A}{1/3} + \frac{kQ_B}{2/3} = k\left(-3Q_A + \frac{3}{2}Q_B\right)$$

$$= k\left(-3\times4\times10^{-6} + \frac{3}{2}\times8\times10^{-6}\right) = 0 \text{ kV}$$

Exercice 4.2 Une charge de $1nC$ passe d'un point A qui est au potentiel de $+5V$ au point B dont le potentiel est de $+1,5V$. Que vaut la variation d'énergie ?

Solution

Il suffit d'utiliser la définition du potentiel = énergie par unité de charge.

$$\Rightarrow \Delta E = Q.\Delta V = 1\times10^{-9}\times(5-1.5) = 3.5\times10^{-9} = 3.5 \text{ nJ}$$

Exercice 4.3 La membrane d'un neurone non-myélinisé a une capacité surfacique $c = 1\mu F/cm^2$. Lors d'un stimulus, des charges traversent cette membrane vers l'intérieur de la cellule. On estime qu'à chaque milliseconde, $80nC$ traversent chaque centimètre carré de membrane.

a) Après combien de temps le potentiel interne de la cellule aura-t-il augmenté de $100mV$?

b) Quelle charge totale a dû traverser un centimètre carré de membrane pour arriver à ce potentiel ?

c) Répondez aux deux mêmes questions dans le cas d'un neurone myélinisé, dont la membrane a une épaisseur effective 100 fois plus grande.

Solution

a et b) $\Delta Q = C.\Delta V = 1\times10^{-6}\times100\times10^{-3} = 100\times10^{-9} = 100 \text{ nC}$

La vitesse est donnée en milliseconde $\Rightarrow t = \dfrac{100\times10^{-9}}{\dfrac{80\times10^{-9}}{10^{-3}}} = 1.25\times10^{-3} = 1.25 \text{ ms}$

c) Si l'épaisseur est 100 fois plus grande, alors la capacité diminue d'un facteur 100.

$\Rightarrow Q$ est divisé par $100 \Rightarrow Q = 1$ ns $\Rightarrow$ le temps est aussi divisé par 100 $\Rightarrow t = 0.0125$ s

Exercice 4.4 Un axone peut être assimilé à un cylindre de $10^{-4}m$ de diamètre et de $0,1m$ de long. L'intérieur de l'axone possède un potentiel de $90mV$ plus faible que celui du fluide environnant dont il est séparé par une fine membrane. Des ions Na^+ sont transportés par une réaction chimique hors de l'axone à un taux de 3.10^{-11} mole par seconde et par cm^2 de membrane.

a) Quelle charge est transportée par heure hors de l'axone ?

b) Quel est le travail qui doit-être effectué, par heure, contre les forces électriques ?

Solution

La charge par heure est donnée par

$$Q = \underset{\substack{\text{Surface externe de} \\ \text{l'axone en cm}^2}}{S} \;.\; \underset{\substack{\text{Débit d'ions} \\ \text{à travers l'axone} \\ \text{en mole.s}^{-1}\text{cm}^{-2}}}{D} \;.\; \underset{\substack{\text{Nombre d'Avogadro} \\ =6.022\times10^{-23}\text{ molécules/mole}}}{N_A} \;.\; \underset{\substack{\text{Charge d'un électron} \\ =1.0602\times10^{-19}\text{ C}}}{e} \;.\; \underbrace{t}_{\substack{\text{Nombre de seconde} \\ \text{par heure = 3600 s}}}$$

La surface externe de l'axone étant :

$$S = \underbrace{2\times\frac{\pi.d^2}{4}}_{\text{Les fonds du cylindre}} + \underset{\substack{\text{Surface latérale} \\ \text{du cylindre}}}{\pi.d.h} = \underbrace{2\times\frac{\pi\times\left(10^{-2}\right)^2}{4}}_{\text{négligeable}} + \pi.10^{-2}\times10 = 0.3143 \text{ cm}^2$$

Il suffit alors de remplacer :

$$Q = 0.3143\times 3\times 10^{-11}\times 6.022\times 10^{23}\times 1.602\times 10^{-19}\times 3.6\times 10^{3}$$
$$= 0.3143\times 3\times 6.022\times 1.602\times 3.6\times 10^{-11+23-19+3} = 3.2759\times 10^{-3} = 3.27 \text{ mC}$$

En fait ici Q est un courant (car c'est une charge pour une durée de 1h), le travail, par heure, est alors simplement

$$W = I.U = Q.U = 3.2759\times 10^{-3}\times 90\times 10^{-3} = 2.943\times 10^{-4} = 0.3 \text{ mJ}$$

Exercice 4.5 La portion centrale d'une membrane cellulaire peut être considérée comme un diélectrique (constante diélectrique $k = 5$) d'épaisseur $4.5nm$, inséré entre deux milieux aqueux conducteurs où se trouvent des ions en solution. Quelle est la capacité surfacique de la membrane (capacité par unité de surface) ?

Solution

$$C = \kappa\frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{\kappa\varepsilon_0}{d} = \frac{5\times 8.85\times 10^{-12}}{4.5\times 10^{-9}} = 9.8 \text{ mF/m}^2$$

Exercice 4.6 Un segment d'axone non-myélinisé de $1cm$ de long a un rayon de $5.10^{-6}m$ et une capacité de $3.10^{-9}F$.

a) Si le potentiel de l'axoplasme varie de $+40mV$ à $-96mV$, que vaut la variation de la charge de chaque côté de la membrane ?

b) Si cette variation est due à un flux d'ions potassium sortant, combien d'ions quittent l'intérieur du segment d'axone considéré ?

c) Dans le cas où la concentration initiale de potassium à l'intérieur de l'axone est de $155moles/m^3$, quel pourcentage d'ions potassium sort de l'axone ?

Solution

a) $\Delta Q = C.\Delta V = 3\times 10^{-9}\times\left(40-(-96)\right)\times 10^{-3} = 0.408 \text{ nC}$

b) La charge élémentaire est $e = 1.6\times 10^{-19}$ C

$$\Rightarrow \Delta N_{K^+} = \frac{\Delta Q}{e} = \frac{0.409\times 10^{-9}}{1.6\times 10^{-19}} = 2.55\times 10^{9} \text{ ions}$$

c) Le segment d'axone contient :

$$n_{K^+} = V.C = \pi.R^2.L.C = \pi\times\left(5\times 10^{-6}\right)^2\times 10^{-2}\times 155 = 1.217\times 10^{-10} \text{ mol de } K^+$$

La quantité d'ions sortant représente donc un pourcentage égale à :

$$\frac{\Delta N_{K^+}}{N_{K^+}} = \frac{\Delta N_{K^+}}{N_A.n_{K^+}} = \frac{2.55\times 10^{9}}{6\times 10^{23}\times 1.217\times 10^{-10}} = 3.5\times 10^{-3}\%$$

Rappels

Une résistance détermine le taux de charge ou de décharge d'un condensateur. Pour des circuits comportant un condensateur *C* et une résistance *R*, les équations correspondant à la décharge et à la charge sont :

Décharge

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R.C$

Q_0, V_0, I_0 étant les valeurs à l'instant $t = 0$

Charge

$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $V(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R.C$

Q_0, V_0, I_0 étant les valeurs à l'instant $t = 0$

Q_0, V_0 étant les valeurs pour $t = \infty, I_0$ étant la valeur à l'instant $t = 0$

Exercice 4.7 *Le défibrillateur cardiaque.*

Le défibrillateur cardiaque est utilisé principalement en médecine d'urgence. Il permet d'appliquer un choc électrique sur le thorax d'un patient en fibrillation. La figure 4.1 représente de façon simplifiée un défibrillateur.

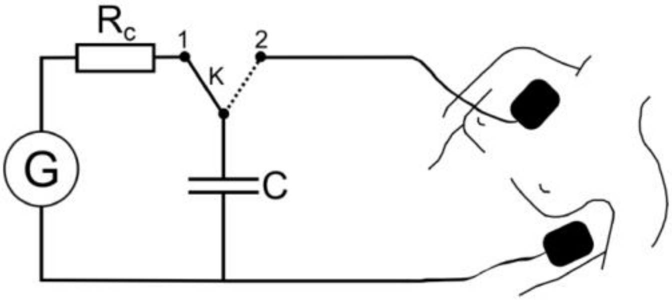


FIGURE *4.1* – Représentation schématique simplifiée d'un défibrillateur cardiaque (exercice 4.7).

Le générateur délivre une tension de $1,5kV$ et la capacité du condensateur est de $470\mu F$. Le thorax du patient sera assimilé à une résistance ohmique R_{thorax} de 50Ω.

Lors la mise en fonction du défibrillateur l'interrupteur K est en position 1. Le condensateur C, initialement déchargé, va se charger à travers la résistance de charge R_C. La figure 4.2 représente l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

a) Déterminez de 2 façons différentes la constante de temps τ du circuit de charge.

b) Déduisez-en la valeur de la résistance R_C.

c) Calculez la valeur maximale de l'énergie stockée dans le condensateur.

d) Calculez la valeur de l'énergie stockée dans le condensateur lorsqu'il est chargé à 95% de sa valeur maximale. Déterminez le temps nécessaire pour passer de 95 à 99% de charge. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer ?

Lorsque le condensateur est chargé, on peut envoyer le choc électrique au patient en connectant le condensateur aux électrodes placées sur son thorax. On choisit le niveau d'énergie du choc devant-être délivré au patient et ensuite l'interrupteur K passe en position 2. La décharge du condensateur est automatiquement arrêtée lorsque celui-ci aura délivré l'énergie choisie.

e) Déterminez la constante de temps de décharge du condensateur.

f) Déterminez après combien de temps $300J$ seront délivrés au patient sachant que la décharge débute quand le condensateur est chargé à 95%.

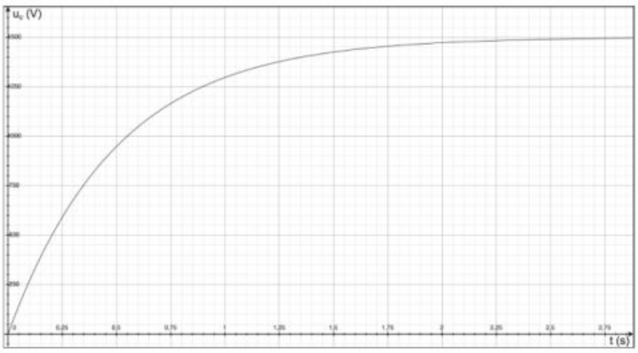
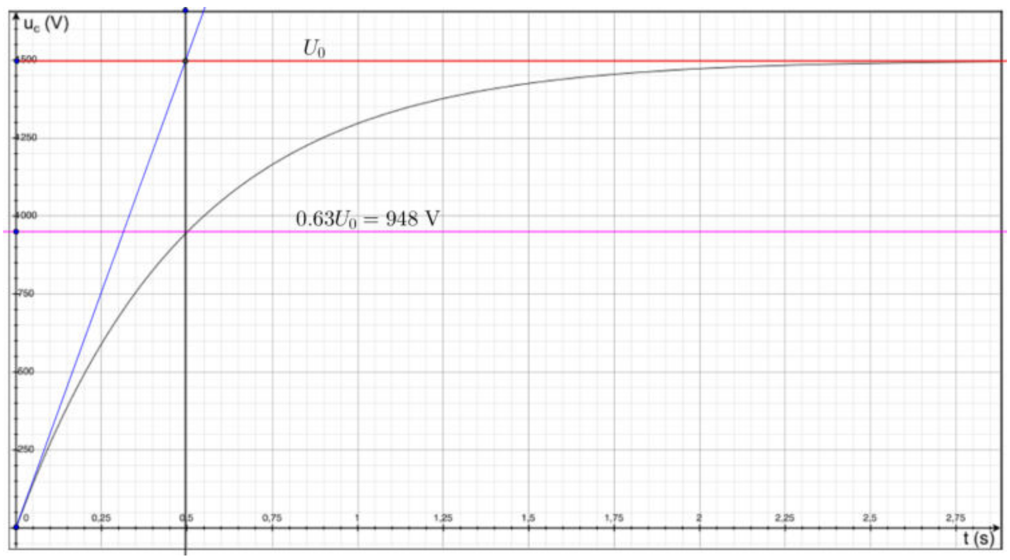


FIGURE 4.2 – Courbe représentant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de la charge (exercice 4.7).

Solution



Charge

$a)$ On peut déterminer graphiquement la constante de temps $\tau = RC$ en traçant la tangente à à l'origine à la courbe ou bien en déterminant pour quelle valeur la tension U vaut $0.63U_0$, U_0 étant la tension maximale obtenue en fin de charge. On trouve $\tau = 0.5$ s.

$b)$ $R = \dfrac{\tau}{C} = \dfrac{0.5}{470\times10^{-6}} = 1064 \simeq 1\ \text{k}\Omega$

$c)$ $E = \dfrac{CU_0^2}{2} = \dfrac{1}{2}\times470\times10^{-6}\times1500^2 \simeq 530\ \text{J}$

$d)$ Le temps pour atteindre 95% de la charge maximale Q_0 est

$$Q = Q_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow 0.95 = 1-e^{-\frac{t_{95}}{0.5}} \Rightarrow t_{95} = 1.5\ \text{s}$$

De même pour atteindre 99% de charge : $0.99 = 1-e^{-\frac{t_{99}}{0.5}} \Rightarrow t_{99} = 2.3$ s

La diffférence de temps est donc de 0.8 s.

Remarquons qu'à 95% l'énergie stockée vaut : $E_{95} = \dfrac{1}{2}\times407\times10^{-6}\times(0.95\times1500)^2 = 477$ J

et à 99% : $E_{99} = \dfrac{1}{2}\times407\times10^{-6}\times(0.99\times1500)^2 = 518$ J.

Autrement dit une augmentation de 53% du temps de charge ne permet de gagner que 8.6% d'énergie en plus. Ce n'est donc pas intéressant.

Décharge J

$e)$ Constante de temps de décharge : $\tau_d = R_{th}C = 50\times470\times10^{-6} = 0.0235 \simeq 24$ ms.

$f)$ Au moment de la décharge, on sait que l'énergie stockée est de 477 J.

Si on délivre 300 J, il restera 177 J, ce qui correspond à une tension aux bornes du condensateur de : $U = \sqrt{\dfrac{2E}{C}} = \sqrt{\dfrac{2\times177}{470\times10^{-6}}} = 867.9$ V

Sachant que au début de la décharge, la tension est $U_0 = 0.95\times1500 = 1425$ V, on obtient facilement le temps nécessaire pour délivrer les 300 J.

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_d}} \Rightarrow 867.9 = 1425.e^{-\frac{t}{0.024}} \Rightarrow t = 11.6\ \text{ms}$$

Exercice 4.8 Deux charges électriques de valeur absolue $q = 5,2mC$ séparées de $2,0mm$ forment un dipôle et sont placées dans une zone où le champ électrique est constant et vaut $8,2.10^{15}V/m$ (voir schéma ci-dessous). Que valent F_{tot}, résultante des forces qui s'appliquent sur le dipôle, et Γ_{tot}, moment de force total par rapport au centre du dipôle ?

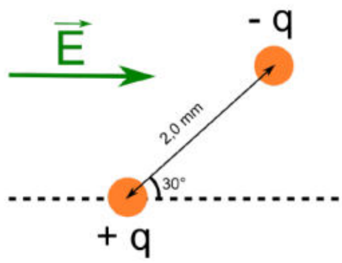
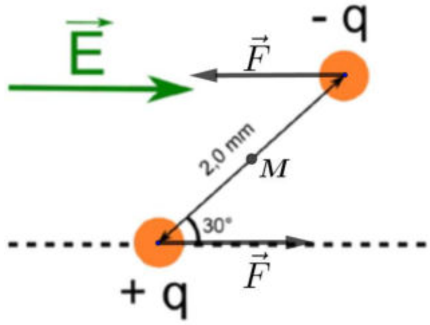


FIGURE 4.3 – Schéma du dipôle électrique formé par les charges +q et -q soumises à un champ électrique (exercice 4.8).

Solution



Le module des forces est : $F = q.E = 5.2\times10^{-3}\times8.2\times10^{15} = 4.264\times10^{13}$ N

La résultante des forces est évidement nulle.

Le couple résultant par rapport au point M est :

$$\Gamma_{tot} = 2F\times\frac{l}{2}\times\sin 30° = 2\times4.264\times10^{13}\times\frac{10^{-3}}{2}\times\sin 30° = 4.264\times10^{10}\text{ Nm}$$

Exercice 4.9 Un condensateur de $500\mu F$ est chargé à travers une résistance R inconnue. Le graphique suivant représente l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur. Quelle est la valeur de cette résistance R ?

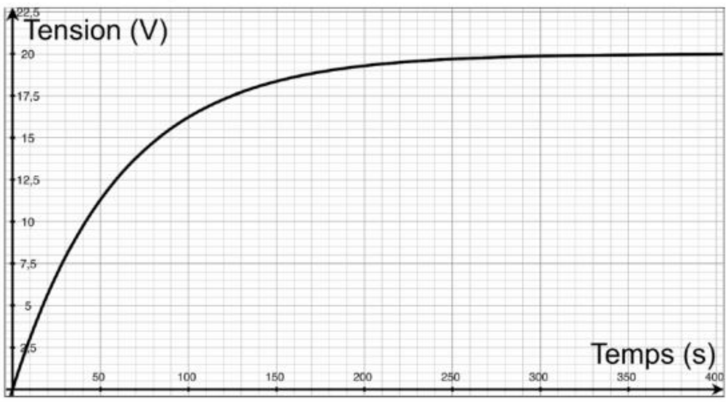
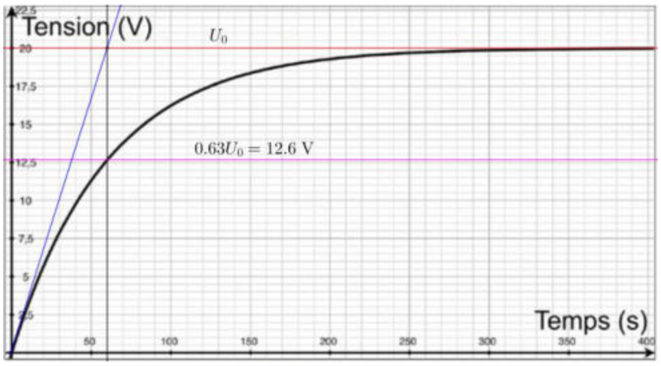


FIGURE 4.4 – Graphe de l'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de la charge de ce dernier (exercice 4.9).

Solution



A partir du graphique il est facile de déterminer la constante de temps $\tau = 60$ s.

$$\Rightarrow R = \frac{\tau}{C} = \frac{60}{500 \times 10^{-6}} = 120\,000\ \Omega$$