Gradient – Rotationnel - Divergence

Gradient

Définition

Le vecteur gradient d'une fonction f de trois variables, noté $\vec{\nabla} f$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \left(f_x^{'}, f_y^{'}, f_z^{'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{1}_z}$$

L'opérateur gradient associe donc un **champ vectoriel** à un ensemble de **scalaires**.

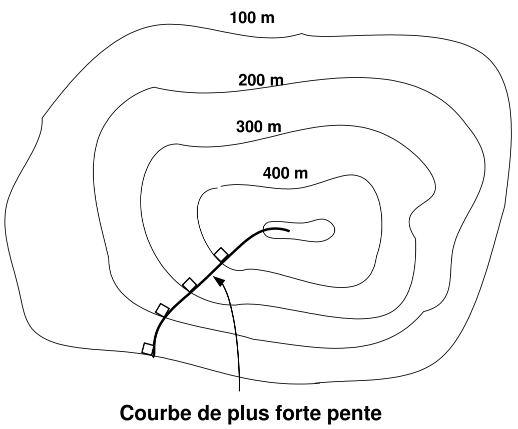
Un champ vectoriel $\vec{F}$ est dit **champ vectoriel conservatif** s'il est le gradient d'une certaine fonction scalaire *f*, c'est-à-dire s'il existe une fonction *f* telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Dans cette situation, *f* est appelée **fonction potentiel** de $\vec{F}$ (Par exemple le champ gravitationnel). On montre aussi que si le champ est conservatif, $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ est **indépendante du chemin C**. et $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f\, d\vec{r} = f\left(\vec{r}(b)\right) - f\left(\vec{r}(a)\right)$ (a et b étant les extrémités du chemin C)

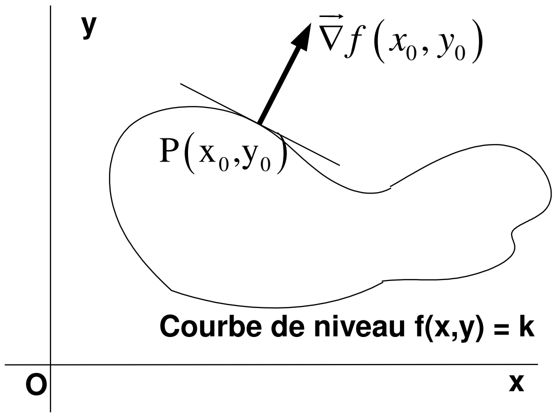
Signification du vecteur gradient

Considérons une fonction *f* de trois variables et un point $P(x_0, y_0, z_0)$ de son domaine de définition.

Le vecteur gradient $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ indique la **direction de la plus forte pente** de *f*. $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ est **orthogonal** à la surface de niveau S de *f* passant par P.

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$$





Dans l'exemple ci dessus, les niveaux sont des altitudes c-à-d des **nombres scalaires.** Grâce à la fonction gradient, on peut définir la direction (donc un **vecteur**) de la plus forte pente.
Le gradient s'utilise très fréquemment en physique. En thermique, les températures (scalaires) vont déterminer le sens (vecteur) de l'écoulement de la chaleur. Dans une solution, les concentrations vont définir le sens de la diffusion. On peut multiplier les exemples à l'infini.

Rotationnel

Définition

Si $\vec{F} = P\,\vec{1_x} + Q\,\vec{1_y} + R\,\vec{1_z}$ est un champ vectoriel et si les dérivées de P, Q et R existent, alors le **rotationnel** de $\vec{F}$ est le champ vectoriel défini par :

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}$$

L'opérateur rotationnel associe donc un **champ vectoriel** à un **autre champ vectoriel**.

Si *f* une fonction de trois variables qui a des dérivées secondes partielles continues alors : $\operatorname{rot}\left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{0}$

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel dont les fonctions composantes ont des dérivées partielles continues et si $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, alors $\vec{F}$ est un **champ vectoriel conservatif.**

Sans faire de démonstration, on peut comprendre intuitivement pourquoi si $\operatorname{rot}\vec{F} \neq \vec{0}$, le champ vectoriel n'est **pas** conservatif. En effet, si $\operatorname{rot}\vec{F} \neq \vec{0}$, les vecteurs champs sont orientés selon un certain mouvement de rotation dans la champ. Par conséquent, il est possible d'imaginer une particule qui partant d'un point A va suivre un chemin qui la ramènera à ce même point. Tout au long de son parcourt, la particule sera « renforcée » par le champ. L'intégrale curviligne ne sera donc pas nulle.

Signification du rotationnel.

Le terme rotationnel du vecteur rotationnel lui vient de ce qu'il est associé au **mouvement de rotation**. Une autre association se présente lorsque $\vec{F}$ représente un champ de vitesse de l'écoulement d'un fluide. Les particules proches de (x, y, z) dans le fluide tendent à tourner autour de l'axe dirigé dans le sens de $\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z)$ et la

norme de vecteur rotationnel rend compte de la vitesse à laquelle les particules tournent autour de l'axe.
Lorsque $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ en un point P, il n'y a pas de rotation ni turbulence en P. On dit que $\vec{F}$ est **irrotationnel.** Lorsque $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$, une petite roue à palettes serait entraînée dans le fluide **sans même tourner** autour de son axe.

Divergence

Si $\vec{F} = P\,\overrightarrow{1_x} + Q\,\overrightarrow{1_y} + R\,\overrightarrow{1_z}$ est un champ vectoriel et si des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ existent, alors la **divergence** de $\vec{F}$ est la fonction **scalaire** de trois variables définie par :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

La divergence associe un **champ vectoriel** à une **fonction scalaire**.

Si $\vec{F} = P\,\overrightarrow{1_x} + Q\,\overrightarrow{1_y} + R\,\overrightarrow{1_z}$ est un champ vectoriel et si P, Q et R ont des dérivées secondes continues : $\text{div rot}\,\vec{F} = 0$

Signification de la divergence

C'est à nouveau le contexte de l'écoulement des fluides qui permet d'expliquer le terme **divergence**. Si $\vec{F}(x, y, z)$ est le champ de vitesse au sein d'un fluide (ou d'un gaz), alors $\text{div}\,\vec{F}(x, y, z)$ représente le **taux de variation net** (par rapport au temps) de la masse de fluide (ou de gaz)passant en ce point par unité de volume.

En d'autres termes, $\text{div}\,\vec{F}(x, y, z)$ mesure la tendance du fluide à quitter le point (x,y,z).

Lorsque que $\text{div}\,\vec{F}(x, y, z) = 0$, on dit que le fluide est **incompressible.**