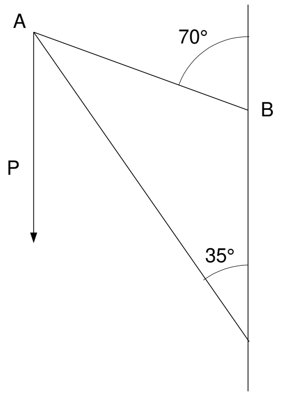
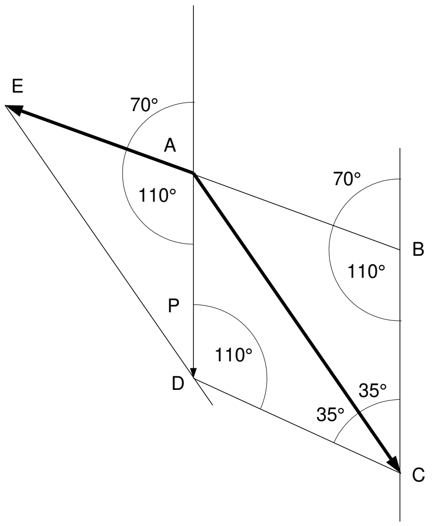
Exercices de mécanique 1
Vecteurs et forces

Exercice 1
Une force P d’intensité 100 kN est appliquée au point A. Décomposer P en deux forces parallèles AB et AC.



Solution



Par simple construction géométrique, il est facile de déterminer les angles indiqués sur la figure.

Formule des sinus.
On sait que dans tout triangle ABC, on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

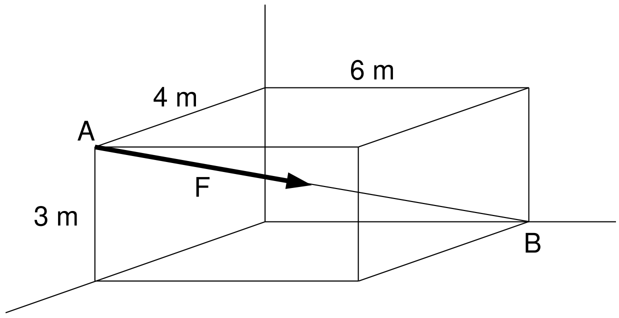
Appliquons cette formule au triangle ADC :

$$\begin{aligned} &\frac{\sin 35}{DC} = \frac{\sin 110}{AC} = \frac{\sin 35}{AD} \\ &\rightarrow \quad AC = \frac{\sin 110}{\sin 35}.100 = 163.83\ N \end{aligned} \tag{0.1}$$

Il est clair que le triangle AED est isocèle, donc AE = AD = 100 N

Exercice 2

L'intensité de la force F est de 500 kN. Quelles sont les intensités des forces F_1, F_2, F_3 dont la résultante est F et parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz ?



Solution

Coordonnées des points A et B.

$$\begin{aligned} A &: (4, 0, 3) \\ B &: (0, 6, 0) \end{aligned} \tag{0.2}$$

Ce qui permet de définir le vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} : (0-4, 6-0, 0-3) = (-4, 6, -3) \tag{0.3}$$

Et donc le module de $\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2} = 7.81\, m \tag{0.4}$$

Et dès lors les composantes, selon les trois axes sont :

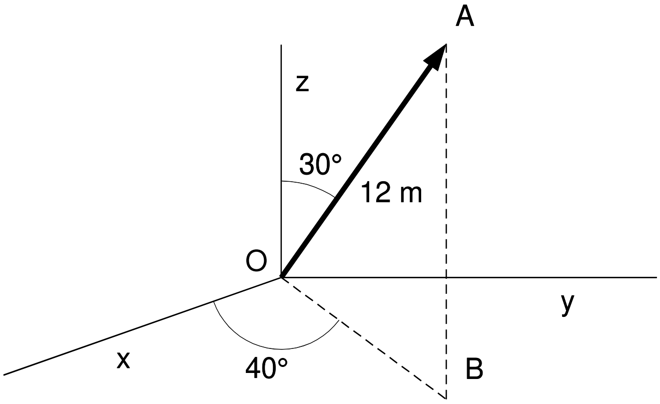
$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{F_x}\right| &= \frac{-4}{7.81} . 500\,000 = -256\,080\, N \\ \left|\overrightarrow{F_y}\right| &= \frac{6}{7.81} . 500\,000 = 384\,110\, N \\ \left|\overrightarrow{F_z}\right| &= \frac{-3}{7.81} . 500\,000 = -192\,060\, N \end{aligned} \tag{0.5}$$

Note :
On vérifie que

$$\left|\dot{F}\right| = \sqrt{(-256080)^2 + (384110)^2 + (-192060)^2} = 500\, kN \tag{0.6}$$

Exercice 3

Déterminer A_x, A_y et A_z ainsi que les angles entre A et les axes Ox, Oy et Oz.



Solution

On a :

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos AOB = 12 \cos 60° = 6\ m \qquad (0.7)$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_x &= \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos 40 = 4.6\ m \\ A_y &= \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos 50 = 3.86\ m \\ A_z &= \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos 30 = 10.39 m \end{aligned} \qquad (0.8)$$

Les angles demandés sont les **angles directeurs** du vecteur A :

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{A}.\vec{1}_x}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{x_A}{\sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2}} \\ &= \frac{4.6}{12} = 0.3833 \ \rightarrow \quad \alpha = 67.46° \end{aligned} \qquad (0.9)$$

De même

$$\cos\beta = \frac{3.86}{12} = 0.3217 \ \rightarrow \ \beta = 71.24°$$

$$\cos\gamma = \frac{10.39}{12} = 0.8658 \ \rightarrow \ \gamma = 30° \ \ (\textit{ce que l'on savait})$$

Note : on vérifie que

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ &0.3833^2 + 0.3217^2 + 0.8658^2 = 1 \end{aligned} \qquad (0.10)$$

Exercice 4

On donne les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 8\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y - 2\,\vec{1}_z \\ \vec{B} &= 2\,\vec{1}_x + 6\,\vec{1}_z \\ \vec{C} &= 3\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_y + 4\,\vec{1}_z\end{aligned} \tag{0.11}$$

On demande :

1) $\vec{A}\,.\,\vec{B}$
2) La longueur de la projection de $\vec{B}$ sur $\vec{C}$
3) $\vec{A}\times\vec{B}$
4) Un vecteur qui est perpendiculaire à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$
5) $\vec{A}\times\vec{B}\,.\,\vec{C}$

Solution

1)

$$\begin{aligned}&\vec{A}:(8, 4, -2)\\ &\vec{B}:(0, 2, 6)\\ &\vec{A}\,.\,\vec{B} = 8\times 0 + 4\times 2 - 2\times 6 = -4\end{aligned}$$

2)

Première méthode : On calcule l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{C}$

$$\begin{aligned}&\vec{B}:(0, 2, 6) \quad et \quad \vec{C}:(3, -2, 4)\\ &\left|\vec{B}\right| = \sqrt{0+2^2+6^2} = 6.32\\ &\left|\vec{C}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2+4^2} = 5.39\\ &\cos\theta = \frac{\vec{B}\,.\,\vec{C}}{\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|} = \frac{0\times 2 - 2\times 2 + 6\times 4}{6.32\times 5.39} = 0.5871\\ &\textit{Et donc la projection p est :}\\ &p = \left|\vec{B}\right|\cos\theta = 6.32\times 0.5871 = 3.71\end{aligned} \tag{0.12}$$

Deuxième méthode :

La projection p est simplement le produit scalaire de $\vec{B}$ par le vecteur unitaire de $\vec{C}$.
En effet :

$$p = \left|\vec{B}\right|\cos\theta = \left|\vec{B}\right|\frac{\vec{B}\,.\,\vec{C}}{\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|} = \frac{\vec{B}\,.\,\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \vec{B}\,\vec{1}_c = \frac{20}{5.39} = 3.71 \tag{0.13}$$

3)

$$\vec{A}:(8,4,-2) \quad et \quad \vec{B}:(0,2,6)$$

$$\vec{D}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 8 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=28\,\vec{e_1}-48\,\vec{e_2}+16\,\vec{e_3} \qquad (0.14)$$

Note : on peut faire la vérification suivante en calculant le module de $\vec{D}$ de deux façons différentes.

La formule (1.14), nous permet d'écrire :

$$\left|\vec{D}\right|=\sqrt{28^2+48^2+16^2}=57.83 \qquad (0.15)$$

D'autre part, on sait que

$$\left|\vec{D}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta \qquad (0.16)$$

par définition du produit vectoriel.

Calculons l'angle θ entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$\vec{A}:(8,4,-2) \quad et \quad \vec{B}:(0,2,6)$$

$$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{64+16+4}=9.17 \quad et \quad \left|\vec{B}\right|=\sqrt{4+36}=6.32 \qquad (0.17)$$

$$\rightarrow \cos\theta=\frac{8\times0+4\times2-2\times6}{9.17\times6.32}=-0.069 \rightarrow \theta=93.96°$$

Et donc :

$$\left|\vec{D}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta=9.17\times6.32\times\sin 93.96°=57.83$$

d)

Un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est tout simplement donné par $\dot{A}\times\dot{B}$

C'est donc le vecteur $\vec{D}$ donné par (1.14)

Le vecteur unitaire est donc :

$$\dot{1_D}=\frac{\dot{D}}{\left|\dot{D}\right|}=\frac{(28,-48,16)}{57.83}=0.4843\,\dot{e_1}-0.8302\,\dot{e_2}+0.2767\,\dot{e_3} \qquad (0.18)$$

Vérifions que $\vec{1_D}$ est bien un vecteur unitaire.

$$\left|\vec{1_D}\right|=\sqrt{0.4843^2+0.8302^2+0.2767^2}=1$$

e)

Il suffit d'appliquer la formule :

$$\vec{A}:(8,4,-2) \ \vec{B}:(0,2,6) \ \vec{C}:(3,-2,4)$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\vec{C}=\begin{vmatrix}8 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 6\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=244 \qquad (0.19)$$

Exercice 5

Soit $\vec{R}$ le résultante des forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$.

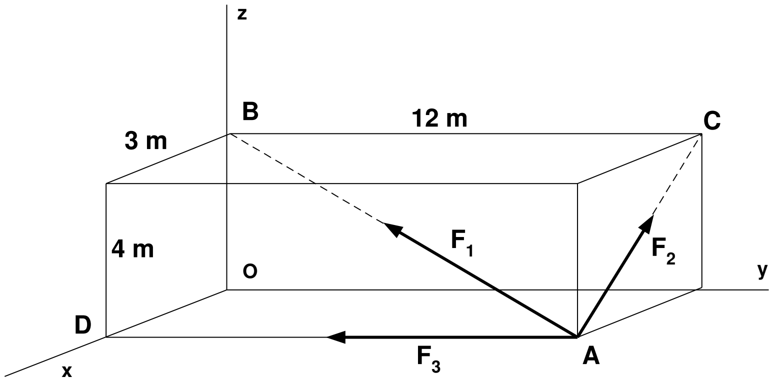
$F_1 = 260$ N ; $F_2 = 260$ N ; $F_3 = 260$ N

Déterminer :

a) L'intensité de $\vec{R}$

b) Les angles de $\vec{R}$ avec les trois axes

c) Les coordonnées du point d'intersections de $\vec{R}$ avec le plan Oyz



Solution

a) On détermine d'abord les trois forces :

$$\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \vec{1}_{AB} = |\vec{F_1}| \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 260 \frac{(-3,-12,4)}{13} = (-60,-240,80) \tag{0.20}$$

$$car \quad A:(3,12,0) \;\; B:(0,0,4) \; \overrightarrow{AB}:(-3,-12,4) \;\; |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+144+16} = 13$$

De même,

$$\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \vec{1}_{AC} = |\vec{F_2}| \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = 75 \frac{(-3,0,4)}{5} = (-45,0,60)$$

$$car \quad A:(3,12,0) \;\; C:(0,12,4) \; \overrightarrow{AC}:(-3,0,4) \;\; |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+16} = 5$$

et

$$\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \vec{1}_{AD} = |\vec{F_3}| \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = 60 \frac{(0,-12,0)}{12} = (0,-60,0)$$

$$car \quad A:(3,12,0) \;\; D:(3,0,0) \; \overrightarrow{AD}:(0,-12,0) \;\; |\overrightarrow{AD}| = 12$$

Et finalement

$$\begin{aligned} &\vec{R} = \sum_i \vec{F_i} = (-60-45,-240-60,80+60) = (-105,-300,140) \\ &\rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{105^2+300^2+140^2} = 347.3\ N \end{aligned} \tag{0.21}$$

b) Les angles sont obtenus facilement en appliquant les formules :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{x_R}{|\vec{R}|} = \frac{-105}{347.1} = -0.3023 \;\rightarrow\; \alpha = 107.6^\circ \\
\cos\beta &= \frac{x_R}{|\vec{R}|} = \frac{-300}{347.1} = -0.8638 \;\rightarrow\; \beta = 149.7^\circ \\
\cos\gamma &= \frac{x_R}{|\vec{R}|} = \frac{140}{347.1} = 0.4031 \;\rightarrow\; \gamma = 66.23^\circ
\end{aligned} \tag{0.22}$$

c)

On va établir les équations paramétriques de la droite support de $\vec{R}$

On calcule d'abord un vecteur directeur de cette droite. Connaissant le point, les équations paramétriques sont immédiates.

Le plan Oyz, a pour équation x = 0. Cela nous permettra de déterminer la valeur du paramètre k, et ensuite les coordonnées y et z.

$$\vec{R}:(-105,-300,140) \;\rightarrow\; \overrightarrow{v_R}:\left(1,\frac{300}{105},-\frac{140}{105}\right) = (1;\,2.86;\,-1.33)$$

$$A:(3,12,0)$$

$$\textit{Equation de la droite :}\;\begin{cases} x-3 = k \\ y-12 = 2.86\,k \\ z-0 = -1.33\,k \end{cases} \tag{0.23}$$

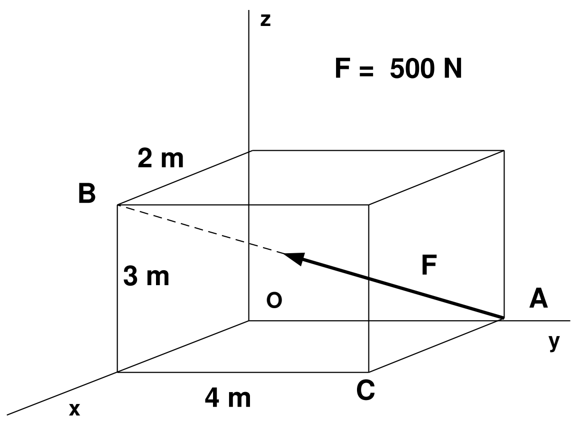
$$\textit{Comme dans le plan Oxy, on a } x = 0 \;\rightarrow\; k = -3$$

$$\rightarrow\; \textit{Point de percée :}\; (0,12-2.86\times(-3),1.33\times 3) = (0,3.43,4)$$

Exercice 6

Calculer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à C.

Quelle est la distance entre C et la droite support de $\vec{F}$



Solution

Calculons le vecteur F

$$A:(0,4,0) \quad B:(2,0,3) \;\; \overrightarrow{AB}:(2,-4,3) \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+16+9} = 5.39$$

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \overrightarrow{1_{AB}} = 500\frac{(2,-4,3)}{5.39} = (186.69,-371.39,278.54)$$

$$A:(0,4,0) \;\; C:(2,4,0) \;\; \overrightarrow{CA}:(-2,0,0) \;\; \left|\overrightarrow{CA}\right| = 2$$

$$\textit{Le moment de } \vec{F} \textit{ par rapport à C est donné par la formule :}$$
$$\vec{\mathcal{M}}_C \vec{F} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{\mathcal{M}}_C \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -2 & 0 & 0 \\ 185.39 & -371,39 & 278,54 \end{vmatrix} = (0,-557.08,742.78) \tag{0.24}$$

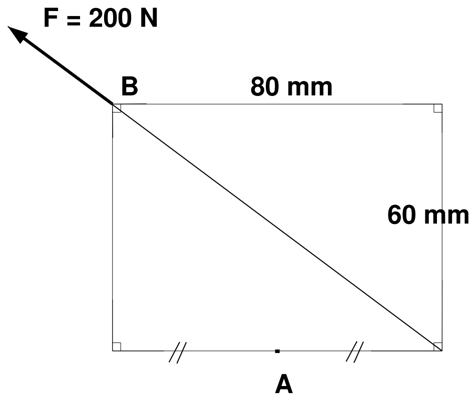
Rappel : le moment d'un vecteur par rapport à un point est un **vecteur.**

La distance entre C et la droite support de F est :

$$\textit{La distance du point C par rapport à une droite AB est}$$
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$
$$\textit{Or } \overrightarrow{AC}:(2,0,0) \;\; \overrightarrow{AB}:(2,-4,3) \;\; \left|\overrightarrow{AB}\right| = 5.39$$
$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (0,6,8) \;\; \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+64} = 10$$
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{10}{5.39} = 1.855\ m \tag{0.25}$$

Exercice 7

Déterminer le moment de F par rapport au point A.



Solution

Calculons la force F

$$
\begin{aligned}
&D:(80,0)\;\; B:(0,60)\;\; \overrightarrow{DB}:(-80,60)\;\; \left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{80^2+60^2} = 100 \\
&\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \overrightarrow{1_{DB}} = 200\frac{(-80,60)}{100} = (-160,120)
\end{aligned} \qquad (0.26)
$$

Et le moment de F par rapport à A est :

$$
\begin{aligned}
&A:(40,0)\;\; D:(80,0)\;\; \overrightarrow{AD}:(40,0) \\
&\vec{\mathcal{M}}_A \vec{F} = \overrightarrow{AD}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 40 & 0 & 0 \\ -160 & 120 & 0 \end{vmatrix} = 4800\,\vec{e_3}
\end{aligned} \qquad (0.27)
$$

$$\left|\vec{\mathcal{M}}_A \vec{F}\right| = 4800\ J$$