Exercices de mécanique 3
Courbure et torsion

Exercice 0

Exprimer le vecteur $\vec{a} = 5\,\overrightarrow{1_x} - 3\,\overrightarrow{1_y} + 4\,\overrightarrow{1_z}$ en coordonnées cylindriques.

Solution

Les formules de correspondance des coordonnées cylindriques aux cartésiennes sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{1_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{1_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{1_y} \\ \overrightarrow{1_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{1_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{1_y} \\ \overrightarrow{1_z} = \overrightarrow{1_z} \end{cases}$$

Et les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux cylindriques sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{1_x} = \cos\theta\,\overrightarrow{1_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{1_\theta} \\ \overrightarrow{1_y} = \sin\theta\,\overrightarrow{1_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{1_\theta} \\ \overrightarrow{1_z} = \overrightarrow{1_z} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\vec{a} = 5\left(\cos\theta\,\overrightarrow{1_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{1_\theta}\right) - 3\left(\sin\theta\,\overrightarrow{1_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{1_\theta}\right) + 4\,\overrightarrow{1_z}$$

$$= \left(5\cos\theta - 3\sin\theta\right)\overrightarrow{1_r} + \left(-5\sin\theta - 3\cos\theta\right)\overrightarrow{1_\theta} + 4\,\overrightarrow{1_z}$$

$$\text{or} \quad \tan\theta = -\frac{3}{5} \;\rightarrow\; \theta = -30.9638°$$

$$\rightarrow \vec{a} = 5.8310\,\overrightarrow{1_r} + 4\,\overrightarrow{1_z}$$

Exercice 1

Soit la courbe définie par $x = t;\ y = t^2;\ z = \frac{2}{3}t^3$.

Calculer en fonction de t : a) sa courbure b) sa torsion.
Note : cette courbe est une cubique gauche.

Solution

Méthode 1

$$\vec{r} = t\,\overrightarrow{1_x} + t^2\,\overrightarrow{1_y} + \frac{2}{3}t^3\,\overrightarrow{1_z}$$

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{1_x} + 2t\,\overrightarrow{1_y} + 2\,t^2\,\overrightarrow{1_z} \;\rightarrow\; \left|\vec{r}\,'\right| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 2t^2+1$$

$$\vec{r}\,'' = 2\,\overrightarrow{1_y} + 4\,t\,\overrightarrow{1_z}$$

$$\vec{r}\,''' = 4\,\overrightarrow{1_z}$$

$$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix} = 4t^2\,\overrightarrow{1_x} - 4t\,\overrightarrow{1_y} + 2\,\overrightarrow{1_z} \;\rightarrow\; \left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right| = \sqrt{16t^4+16t^2+4} = 2\left(2t^2+1\right)$$

La courbure est donc $\rho = \dfrac{\left|\vec{r}\,'\right|^3}{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|} = \dfrac{\left(2t^2+1\right)^3}{2\left(2t^2+1\right)} = \dfrac{2t^2+1}{2}$

$$\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right).\vec{r}\,''' = 8$$

La torsion est donc $\tau = \dfrac{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|^2}{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right).\vec{r}\,'''} = \dfrac{4\left(2t^2+1\right)^2}{8} = \dfrac{2t^2+1}{2}$

Conclusion : $\rho = \tau$

Méthode 2

$$\vec{r} = t\,\vec{1_x} + t^2\,\vec{1_y} + \frac{2}{3}t^3\,\vec{1_z}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{1_x} + 2t\,\vec{1_y} + 2\,t^2\,\vec{1_z} \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\vec{r}\,'\right| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 1+2t^2$$

Le vecteur unitaire tangent est donc : $\vec{1_t} = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{ds} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = \dfrac{\vec{1_x} + 2t\,\vec{1_y} + 2\,t^2\,\vec{1_z}}{1+2t^2}$

$$\frac{d\vec{1_t}}{dt} = \frac{\left(\vec{1_x} + 2t\,\vec{1_y} + 2\,t^2\,\vec{1_z}\right)'\left(1+2t^2\right)^2 - \left(\vec{1_x} + 2t\,\vec{1_y} + 2\,t^2\,\vec{1_z}\right).\left[\left(1+2t^2\right)^2\right]'}{\left(1+2t^2\right)^2}$$

$$= \frac{-4\,\vec{1_x} + \left(2-4t^2\right)\vec{1_y} + 4t\,\vec{1_z}}{\left(1+2t^2\right)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{1_t}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{1_t}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-4\,\vec{1_x} + \left(2-4t^2\right)\vec{1_y} + 4t\,\vec{1_z}}{\left(1+2t^2\right)^3}$$

La courbure est donc : $\dfrac{d\vec{1_t}}{ds} = \dfrac{\vec{1_n}}{\rho} \rightarrow \dfrac{1}{\rho} = \left|\dfrac{d\vec{1_t}}{ds}\right| = \dfrac{\sqrt{16t^2 + \left(2-4t^2\right)^2 + 16t^2}}{\left(1+2t^2\right)^3}$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{16t^2+4-16t^2+16t^4+16t^2}}{\left(1+2t^2\right)^3} = \frac{2\sqrt{1+4t^2+4t^4}}{\left(1+2t^2\right)^3} = \frac{2\left(1+2t^2\right)}{\left(1+2t^2\right)^3} = \frac{2}{\left(1+2t^2\right)^2}$$

$$\vec{1_n} = \rho\,\frac{d\vec{1_t}}{ds} = \frac{\left(1+2t^2\right)^2}{2}\cdot\frac{-4\,\vec{1_x} + \left(2-4t^2\right)\vec{1_y} + 4t\,\vec{1_z}}{\left(1+2t^2\right)^3} = \frac{-2\,\vec{1_x} + \left(1-2t^2\right)\vec{1_y} + 2t\,\vec{1_z}}{1+2t^2}$$

$$\vec{1_b} = \vec{1_t} \times \vec{1_n} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ \frac{1}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} & \frac{2t^2}{1+2t^2} \\ \frac{-2t}{1+2t^2} & \frac{1-2t^2}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} \end{vmatrix} = \frac{2t^2\,\vec{1_x} - 2t\,\vec{1_y} + \vec{1_z}}{1+2t^2}$$

$$\frac{d\vec{1_b}}{dt} = \frac{4t\,\vec{1_x} + \left(4t^2-2\right)\vec{1_y} + 2t\,\vec{1_z}}{\left(1+2t^2\right)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{1_b}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{1_b}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{4t\,\vec{1_x} + \left(4t^2-2\right)\vec{1_y} + 2t\,\vec{1_z}}{\left(1+2t^2\right)^3}$$

La torsion est donc : $\dfrac{1}{\tau} = \left|\dfrac{d\vec{1_b}}{ds}\right| = \dfrac{2}{\left(1+2t^2\right)^2}$

Pour ceux qui en doutaient encore, il est clair que la méthode 1 est nettement plus simple.

Exercice 2

Pour la même courbe, donner les équations cartésiennes de la tangente, la normale et la binormale en t = 1.

Solution

Soit $t = 1$

$$\vec{1}_t = \frac{\vec{1}_x + 2t\,\vec{1}_y + 2\,t^2\,\vec{1}_z}{1+2t^2} \quad \rightarrow \quad \vec{1}_t = \frac{\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y + 2\,\vec{1}_z}{3}$$

$$\vec{1}_n = \frac{-2\,\vec{1}_x + \left(1-2t^2\right)\vec{1}_y + 2t\,\vec{1}_z}{1+2t^2} \quad \rightarrow \quad \vec{1}_n = \frac{-2\,\vec{1}_x - \vec{1}_y + 2\,\vec{1}_z}{3}$$

$$\vec{1}_b = \frac{2t^2\,\vec{1}_x - 2t\,\vec{1}_y + \vec{1}_z}{1+2t^2} \quad \rightarrow \quad \vec{1}_b = \frac{2\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_y + \vec{1}_z}{3}$$

On peut facilement vérifier que ces vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Par exemple : $\vec{1}_t \,.\, \vec{1}_n = \frac{-2-2+4}{9} = 0$

Exercice 3

On donne la courbe définie par $x = \cos t; \quad y = 3\sin t; \; z = 4t$
Calculer sa courbure et sa torsion.

Note : cette courbe est une hélice.

Solution.

$\vec{r} = (\cos t;\, 3\sin t;\, 4t)$

$\vec{r}\,' = (-\sin t;\, 3\cos t;\, 4) \;\rightarrow\; \left|\vec{r}\,'\right|^2 = 8\left(\cos^2 t + 2\right)$

$\vec{r}\,'' = (-\cos t;\, -3\sin t;\, 0)$

$\vec{r}\,''' = (\sin t;\, -3\cos t;\, 0)$

$$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ -\sin t & 3\cos t & 4 \\ -\cos t & -3\sin t & 0 \end{vmatrix} = (12\sin t;\, -4\cos t;\, 3) \rightarrow \left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|^2 = 128\sin^2 t + 9$$

$\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right).\vec{r}\,''' = 12$

Courbure $\quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|}{\left|\vec{r}\,'\right|^3} = \dfrac{128\sin^2 t + 9}{\left[8\left(\cos^2 t + 2\right)\right]^{\frac{2}{3}}}$

Torsion $\quad \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right).\vec{r}\,'''}{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|^2} = \dfrac{12}{\left(128\sin^2 t + 9\right)^2}$

Exercice 4

On donne $\vec{a} = 5t^2\,\vec{1}_x + t\,\vec{1}_y - t^2\,\vec{1}_z$ et $\vec{b} = \sin t\,\vec{1}_x - \cos t\,\vec{1}_y$

Calculer : $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$; $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{a}\right)$

Solution

1) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\,\vec{b}$$
$$= \left(5t^2\,\vec{1}_x + t\,\vec{1}_y - t^3\,\vec{1}_z\right)\left(\cos t\,\vec{1}_x + \sin t\,\vec{1}_y\right) + \left(10t\,\vec{1}_x + \vec{1}_y - 3t^2\,\vec{1}_z\right)\left(\sin t\,\vec{1}_x - \cos t\,\vec{1}_y\right)$$
$$= \left(5t^2 - 1\right)\cos t + 11\,t\sin t$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(5t^2\,\vec{1}_x + t\,\vec{1}_y - t^3\,\vec{1}_z\right)\left(\sin t\,\vec{1}_x - \cos t\,\vec{1}_y\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(5t^2\sin t - t\cos t\right)$$
$$= 10t\sin t + 5t^2\cos t - \cos t + t\sin t = \left(5t^2 - 1\right)\cos t + 11\,t\sin t$$

2) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}$$
$$= \left(5t^2\,\vec{1}_x + t\,\vec{1}_y - t^3\,\vec{1}_z\right)\times\left(\cos t\,\vec{1}_x + \sin t\,\vec{1}_y\right) + \left(10t\,\vec{1}_x + \vec{1}_y - 3t^2\,\vec{1}_z\right)\times\left(\sin t\,\vec{1}_x - \cos t\,\vec{1}_y\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left(t^3\sin t - 3t^2\cos t\right)\vec{1}_x - \left(t^3\cos t + 3t^2\sin t\right)\vec{1}_y + \left(5t^2\sin t - \sin t - 11\cos t\right)\vec{1}_z$$

Ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}\left[-t^3\,\vec{1}_x - t^3\,\vec{1}_y - \left(5t^2\cos t + t\sin t\right)\vec{1}_z\right]$$
$$= \left(-2t^2\cos t + t^3\sin t\right)\vec{1}_x - \left(3t^2\sin t + t^3\cos t\right)\vec{1}_y - \left(10t\cos t - 5t^2\sin t + \sin t + t\cos t\right)\vec{1}_z$$
$$= \left(t^3\sin t - 3t^2\cos t\right)\vec{1}_x - \left(t^3\cos t + 3t^2\sin t\right)\vec{1}_y + \left(5t^2\sin t - \sin t - 11\cos t\right)\vec{1}_z$$

3) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = \frac{d}{dt}\left(25t^4 + t^2 + t^6\right) = 100t^3 + 2t + 6t^5$$

Ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = 2\frac{d\vec{a}}{dt}\,\vec{a} = 2\left(10t^2\,\vec{1}_x + \vec{1}_y - 3t^2\,\vec{1}_z\right)\left(5t^2\,\vec{1}_x + t\,\vec{1}_y - t^3\,\vec{1}_z\right) = 100t^3 + 2t + 6t^5$$