Exercices de mécanique 6
Champs de forces. Plan incliné

Exercice 1

On considère une particule qui se déplace dans un champ de force :

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{1_x} + (3y - 2x)\vec{1_y}$$

1) calculer le travail reçu par la particule, en fonction de a :
   a. si elle se déplace en ligne droite du point O (0, 0) au point A (2, 4).
   b. si elle se déplace de O en A suivant le trajet OA'A (A' étant la projection de A sur Ox)
   c. si elle se déplace de O en A suivant OA''A (A'' étant la projection de A sur Oy)

   Conclusions ?
2) Calculer en fonction de *a* le travail reçu par la particule qui effectue un tour le long d'un cercle de rayon 2 centré sur O (dans le sens trigonométrique)
3) Pour quelle valeur de *a* le champ de forces dérive-t-il d'un potentiel V. Déterminer *V* (*x*, *y*) (Méthode devinette). Conclusions ?

Rappel : *Un E en sous ensemble de R^3. Un **champ vectoriel** défini sur R^3 est une fonction $\vec{F}$ qui fait correspondre à chaque point (x, y, z) de E un vecteur de dimension trois $\vec{F}(x, y, z)$*

Si f est une fonction scalaire de trois variables, son gradient est un champ vectoriel défini sur R^3 par :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = f_x^{'}(x, y, z)\vec{1_x} + f_y^{'}(x, y, z)\vec{1_y} + f_z^{'}(x, y, z)\vec{1_z}$$

*Un champ vectoriel est dit **champ vectoriel conservatif** s'il est le gradient d'une certaine fonction scalaire, c'est-à-dire s'il existe une fonction f telle que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.*
*Dans cette situation, f est appelée **fonction potentiel** $\vec{F}$*

*Dans ce cas, on montre que l'intégrale $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ selon le chemin C est **indépendante** du chemin et ne dépend que des extrémités A et B du chemin et on a :*

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = V(B) - V(A)$$

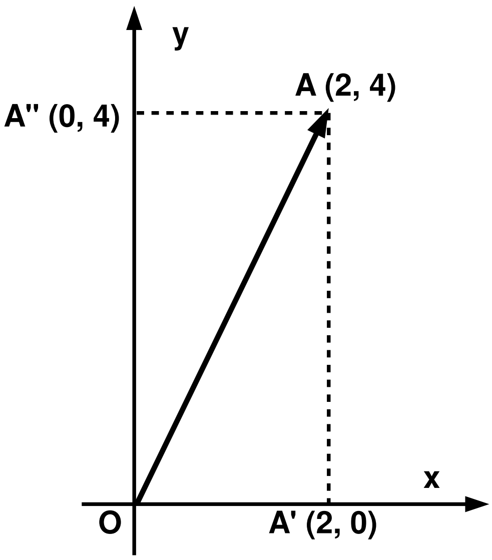
*La différence $V(B) - V(A)$ est la **différence de potentiel** entre A et B.*
Le moyen le plus simple de vérifier qu'un champ vectoriel est conservatif est de vérifier que $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

*Le **travail** de la force F le long du chemin C est l'intégrale curviligne :*

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_C \vec{F}.\vec{T} ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent et s l'abscisse curviligne.

Solution



1-Travail reçu par la particule.

a- Déplacement en ligne droite OA.

PREMIERE METHODE

La particule se déplace sur la droite OA d'équation $y = 2x$.
Le travail élémentaire de la force $\vec{F}\left(x - ay, 3y - 2x\right)$ est

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = \left(x - ay\right).dx + \left(3y - 2x\right).dy$$

or $y = 2x \rightarrow \quad dy = 2dx \rightarrow$

$$dW = \left(x - 2ax\right).dx + \left(6x - 2x\right).2dx$$

$$= \left(9 - 2a\right) dx$$

Par conséquent : $W_{OA} = \int_{x=0}^{x=2} \left(9 - 2a\right) x\, dx = \left[\left(9 - 2a\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 18 - 4a$

DEUXIEME METHODE

On utilise les équations paramétriques. Cette méthode est souvent plus simple et plus rapide.
Il est utile de connaître l'expression qui permet d'obtenir simplement l'équation vectorielle en fonction du paramètre t d'un segment de droite AB.

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\, \vec{r}_A + t\, \vec{r}_B$$

Ici : $\vec{r}(t) = (1 - t)(0, 0) + t\,(2, 4) = (2t, 4t)$

$\rightarrow \quad x = 2t \quad$ et $\quad y = 4t \quad$ et aussi $\quad \vec{r}\,'(t) = (2, 4)$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \left(2t - 4at\right)\vec{1_x} + \left(12t - 4t\right)\vec{1_y} = 2t\left(1 - 2a\right)\vec{1_x} + 8t\,\vec{1_y}$$

$$W_{OA} = \int_{t=0}^{t=1} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right).\vec{r}\,'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=1} \left(4t\left(1 - 2a\right) + 32t\right) dt$$

$$= \left(36 - 8a\right)\int_{t=0}^{t=1} t\, dt = \left(36 - 8a\right)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 18 - 4a$$

b- déplacement OA'A

On décompose le déplacement selon OA' et A'A

Le long de OA' : $y = 0 \rightarrow dy = 0$

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = (x - ay).dx + (3y - 2x).dy$

$$dW_{OA'} = x\,dx \rightarrow W_{OA'} = \int_{x=0}^{x=2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

Le long de A'A : $x = 2 \rightarrow dx = 0$

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = (x - ay).dx + (3y - 2x).dy$

$$dW_{A'A} = (3y - 4)\,dy \rightarrow W_{A'A} = \int_{y=0}^{y=4} (3y - 4)\,dy = \left[3\frac{y^2}{2} - 4y\right]_0^4 = 8$$

Le long de OA'A : $W_{OA'A} = W_{OA'} + W_{A'A} = 2 + 8 = 10$ J

c- déplacement OA''A

Même raisonnement :

On décompose le déplacement selon OA'' et A''A

Le long de OA'' : $x = 0 \rightarrow dx = 0$

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = (x - ay).dx + (3y - 2x).dy$

$$dW_{OA''} = 3y\,dy \rightarrow W_{OA''} = 3\int_{y=0}^{y=4} y\,dy = 3\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 24$$

Le long de A''A : $y = 4 \rightarrow dy = 0$

$dW = \vec{F}.d\vec{r} = (x - ay).dx + (3y - 2x).dy$

$$dW_{A''A} = (x - 4a)\,dx \rightarrow W_{A'A} = \int_{x=0}^{x=2} (x - 4a)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4ax\right]_0^2 = 2 - 8a$$

Le long de OA''A : $W_{OA''A} = W_{OA''} + W_{A''A} = 24 + 2 - 8a = 26 - 8a$ J

CONCLUSION : Le travail reçu dépend du chemin parcouru, par conséquent le champ de force n'est **pas conservatif.**

Note : il était facile de déterminer que le champ n'est pas conservatif.
En effet :

Le champ est : $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{1_x} + Q(x,y)\,\vec{1_y} = (x-ay).\vec{1_x} + (3y-2x).\vec{1_y}$

Il suffit de calculer

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2$$

Par conséquent, si $a \neq 2$ le champ n'est pas conservatif

2- Travail reçu par la particule (trajectoire circulaire).

La trajectoire $x^2 + y^2 = 2^2$ est définie par les équations paramétriques $x = 2\cos t$ et $y = 2\sin t$. Et donc les déplacements élémentaires sont $dx = -2\sin t\, dt$ et $y = 2\cos t\, dt$

Dés lors, on a la force qui agit sur la particule est :

$\vec{F} = (x-ay).\vec{1_x} + (3y-2x).\vec{1_y} = 2(\cos t - a\sin t)\,\vec{1_x} + 2(3\sin t - 2\cos t)\,\vec{1_y}$

Et le travail est :

$$\begin{aligned} W &= \int_{cercle} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{cercle} \left|\vec{F}_x\right| dx + \int_{cercle} \left|\vec{F}_y\right| dy \\ &= 4\int_0^{2\pi} \left[(a\sin t - \cos t)\sin t + (3\sin t - 2\cos t)\cos t\right] dt \\ &= 4a\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt - 8\int_0^{2\pi} \cos^2 dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt \\ &= 4\pi(a-2) \end{aligned}$$

3- Potentiel

Le champ dérive d'un potentiel si , par définition, $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

On vérifie facilement que le champ est conservatif (donc dérive d'un potentiel) si $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

Par conséquent :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = x - 2y & (1) \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 3y - 2x & (2) \end{cases}$$

De $(1) \rightarrow \quad -V = \dfrac{x^2}{2} - 2xy + g(y) \rightarrow \quad -\dfrac{\partial V}{\partial y} = -2x + g'(y) \quad (3)$

En comparant (2) et (3), $\quad g'(y) = 3y \quad \rightarrow \quad g(y) = \dfrac{3y^2}{2}$

Conclusion : $-V = \dfrac{x^2}{2} - 2xy + \dfrac{3y^2}{2} + cste.$

Exercice 2

Une particule se déplace dans le champ de forces

$$\vec{F} = \frac{25}{6} y \, \vec{1_x} + (z-x)\vec{1_y} + \left(2z^2 - x\right)\vec{1_z}$$

suivant la trajectoire :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

1)
   a. Calculer la puissance reçue par la particule à l'instant t.
   b. Quelle est la position de la particule lorsque cette puissance est minimale.

2)
   a. Que vaut le travail fourni par le champ de forces entre t = 0 et t = 2 s ?
   b. Que vaut le travail si la particule est astreinte à se déplacer en ligne droite de sa position à l'instant $t_1 = 0$ à sa position à l'instant $t_2 = 2$s

Conclusions ?

Solution

1)

a) <u>Puissance reçue</u>

Par défintion :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = F_x x' + F_y y' + F_z z'$$

En fonction de t, cela donne :

$$\mathcal{P} = \frac{25}{6} y.3 + (z-x)\,4t + \left(2z^2 - x\right)1$$

Or $x = 3t \qquad y = 2t^2 \qquad z = t - 2$

$$\rightarrow \mathcal{P} = 25t^2 - \left(8t^2 + 8t\right) + \left(2t^2 - 11t + 8\right) = 19t^2 - 19t + 8 \quad \text{(Watts)}$$

b) <u>Puissance minimale</u>

La puissance est minimale si $\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial\left(19t^2 - 19t + 8\right)}{\partial x} = 38t - 19 = 0 \quad \rightarrow t = \frac{1}{2} s$$

ce qui correspond au point :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

2)

a) Travail fourni

Par définition : $\mathscr{P} = \dfrac{dW}{dt} \;\rightarrow\; W = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}\, dt = \int_0^2 \left(19t^2 - 19t + 8\right) dt = 28{,}7 \text{ J}$

b) Déplacement en ligne droite

En $t = 0$, la paticule se trouve $\mathrm{A}_1 : (0, 0, -2)$

En $t = 2$, la paticule se trouve $\mathrm{A}_2 : (6, 8, 0)$

A_1A_2 définit la droite d'équation :

$\vec{a} = (1 - \lambda)(0, 0, -2) + \lambda\,(6, 8, 0) = (6\lambda, 8\lambda, 2\lambda - 2)$

Le travail reçu entre $t = 0$ (ou $\lambda = 0$) et $t = 2$ (ou $\lambda=1$) est :

$W = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} f_x dx + f_y dy + f_z dz$

Avec :

$f_x = \dfrac{25}{6}\, y = \dfrac{100\lambda}{3} \quad f_y = z - x = -4\lambda - 2 \quad f_z = 2z^2 - x = 8\lambda^2 - 22\lambda + 8$

$dx = 6\, d\lambda \qquad dy = 8\, d\lambda \qquad dz = 2\, \lambda d$

$W = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \left(16\lambda^2 + 124\lambda\right) d\lambda = 67{,}3 \text{ J}$

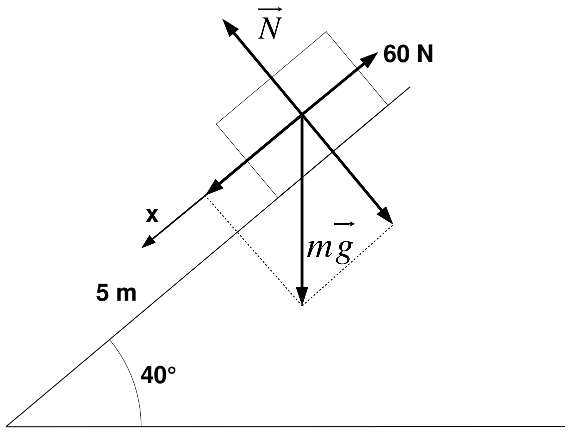
Par conséquent, le champ n’est pas conservatif, puisque le travail fourni dépend du chemin.

Exercice 3

Une caisse de 12 kg est lâchée du sommet d'un plan incliné de 5 m de long qui fait un angle de 40° avec l'horizontale. Une force de frottement de 60 N s'oppose au mouvement.

1) Quelle est l'accélération de la caisse ?
2) Après combien de temps arrive-t-elle à la base du plan incliné ?
3) Que vaut le coefficient de frottement ?

Solution



Prenons l'axe des x parallèle au plan incliné.

On a trois forces

1) La force de frottement de 60 N

2) La force de liaison $\vec{N}$ qui est perpendiculaire au plan incliné.

3) Le poids de la caisse = $m\vec{g}$

Selon l'axe x, on a :

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow mg\sin 40 - f_{fr} = ma_x \rightarrow a_x = 1{,}31\, m/s^2$$

Le temps pour atteindre le bas du plan incliné est

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0 \qquad \text{avec } v_0 = 0 \text{ et } x_0 = 0$$

$$\rightarrow t = 2{,}76 \; s$$

Pour obtenir le coefficient de frottement, on considére l'axe y

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow N - mg\cos 40 = 0 \rightarrow N = 90 \text{ N}$$

Coefficient de frottement : $\mu = \dfrac{f_{fr}}{N} = 0{,}67$