Trièdre de Frenet – Formules de Frenet

En un point P(u) de la courbe, définissons un repère intrinsèque d'origine P, le trièdre de Frenet. Il est constitué d'une base orthonormée directe $\left\{\vec{1}_t(u), \vec{1}_n(u), \vec{1}_b(u)\right\}$

Définition du vecteur tangent $\vec{1}_t(u)$

Pour facilité la compréhension, supposons que u soit le temps t.

En géométrie plane, la longueur d'un arc de courbe plane d'équations paramétriques $x = f(t),\ \ y = g(t)$ est donnée par la formule

$$L = \int \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt = \int \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\,dt$$

La longueur d'une courbe de l'espace est définie exactement de la même façon. On suppose que la courbe représente l'équation vectorielle

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{1}_x + g(t)\vec{1}_y + h(t)\vec{1}_z$$

et on a

$$L = \int \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2 + \left[h'(t)\right]^2}\,dt = \int \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt}\right]^2}\,dt$$

Plutôt de parler de la longueur L, on parlera de **l'abscisse curviligne s.**

D'autre part , on a :

$$\dot{r}(t) = \frac{d\dot{r}}{dt} = f'(t)1_x + g'(t)1_y + h'(t)1_z$$

$$\rightarrow \left|\dot{r}(t)\right| = \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2 + \left[h'(t)\right]^2}$$

Finalement, on peut donc écrire la forme plus compacte.

$$s = \int \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt \qquad ou\ bien \qquad \frac{ds}{dt} = \left|\vec{r}\,'(t)\right|$$

Rappelons que en vertu de la définition de la dérivée d'une fonction vectorielle, le vecteur $\vec{r}\,'(t)$ est **tangent** à la courbe. On peut dés lors définir le **vecteur unitaire tangent** :

$$\boxed{\vec{1}_t = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$

Définition des vecteurs normal et binormal $\vec{1}_n(u), \vec{1}_b(u)$

En un point donné d'une courbe lisse de l'espace $\vec{r}(t)$, il y a beaucoup de vecteurs orthogonaux au vecteur tangent unitaire $\vec{1}_t(t)$.

L'un de ceux-ci est le vecteur $\vec{r}\,''(t) = \dfrac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

En effet, quand le module d'un vecteur est constant (c'est le cas s'il est unitaire), le vecteur dérivé est orthogonal :

Soit par exemple $|\vec{a}(t)| = c$ (constante) $\rightarrow$ $\vec{a}(t).\vec{a}(t) = |\vec{a}(t)|^2 = c^2$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t).\vec{a}(t)\right] = \vec{a}\,'(t).\vec{a}(t) + \vec{a}(t).\vec{a}\,'(t) = 2\,\vec{a}\,'(t).\vec{a}(t) = 0$$

égale 0, puisque la dérivée d'une constante = 0

$\rightarrow$ $\vec{a}\,'(t).\vec{a}(t) = 0$ $\rightarrow$ $\vec{a}\,'(t) \perp \vec{a}(t)$

Attention: le vecteur $\vec{r}\,''(t)$ n'est **pas** unitaire, mais on peut définir un vecteur unitaire, **le vecteur normal :**

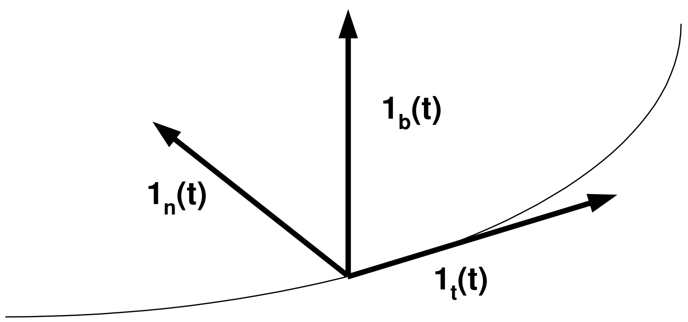
$$\boxed{\vec{1}_n(t) = \frac{\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,''(t)|}}$$

Ce vecteur est orienté dans le sens de la concavité de la courbe.

Il reste à définir le **vecteur binormal**

$$\boxed{\vec{1}_b(t) = \vec{1}_t(t) \times \vec{1}_n(t)}$$

Ces trois vecteurs forment un ensemble de vecteurs orthogonaux, appelé **trièdre de Frenet**, qui se déplace le long de la courbe quand t varie.



On retiendra :

$$\boxed{\vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n \qquad \vec{1}_t = \vec{1}_n \times \vec{1}_b \qquad \vec{1}_n = \vec{1}_b \times \vec{1}_t}$$

Plan osculateur, plan normal, plan rectifiant.

Le plan déterminé par les vecteurs normal et binormal est le **plan normal** en un point P de la courbe.

Le plan déterminé par les vecteurs tangents et normal est le **plan osculateur** de la courbe en P. C'est le plan qui vient le plus près pour contenir la partie de la courbe proche de P. C'est le plan qui « colle » le plus à la courbe dans le voisinage de P. Dans le cas d'une courbe plane, le plan osculateur est tout simplement le plan qui contient la courbe. Si la courbe est une droite, il n'y a pas de plan osculateur.

En cinématique, on montrera que $\vec{r}\,'(t)$ est le vecteur vitesse, et que $\vec{r}\,''(t)$ est le vecteur accélération. Pour cette raison, le plan osculateur est parfois appelé **le plan des accélérations.**

Le plan déterminé par les vecteurs tangent et binormal est le **plan rectifiant.** Quand la courbe est plane, le plan rectifiant est perpendiculaire au plan de la courbe.

Plan	**Définition mathématique.**
Osculateur	$\vec{1}_n \quad et \quad \vec{1}_t$
Normal	$\vec{1}_n \quad et \quad \vec{1}_b$
Rectifiant	$\vec{1}_b \quad et \quad \vec{1}_t$

Calcul des vecteurs de base du trièdre de Frenet.

Soit une fonction vectorielle : $\vec{r} = \vec{r}(u)$

On calcule : $\vec{r}\,' = \dfrac{d\vec{r}}{du} \qquad et \qquad \vec{r}\,'' = \dfrac{d^2\vec{r}}{du^2}$

Ensuite, il suffit d'appliquer les définitions :

$$\vec{1}_t = \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{du}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|}$$

$$\vec{1}_b = \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right|} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{du} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{du^2}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{du} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{du^2}\right|} \qquad ou\ bien \quad \vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n$$

$$\vec{1}_n = \vec{1}_b \times \vec{1}_t \qquad ou\ bien \quad \vec{1}_n = \frac{\vec{r}\,''}{\left|\vec{r}\,''\right|}$$

Exemple :

Déterminer les vecteurs du trièdre de Frenet de l'hélice circulaire

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{1_x} + \sin t\,\vec{1_y} + t\,\vec{1_z}$$

On calcule successivement :

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{1_x} + \cos t\,\vec{1_y} + \vec{1_z} \qquad \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{2}$$

$$\vec{1_t} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin t\,\vec{1_x} + \cos t\,\vec{1_y} + \vec{1_z}\right)$$

$$\vec{1_t}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos t\,\vec{1_x} - \sin t\,\vec{1_y}\right) \qquad \left|\vec{1_t}\,'\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{1_n} = \frac{\vec{1_t}\,'}{\left|\vec{1_t}\,'\right|} = -\cos t\,\vec{1_x} - \sin t\,\vec{1_y}$$

Ceci montre que le vecteur normal en un point d'une hélice est horizontal et dirigé vers l'axe Oz

Le vecteur binormale :

$$\vec{1_b} = \vec{1_t} \times \vec{1_n} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin t\,\vec{1_x} - \cos t\,\vec{1_y} + \vec{1_z}\right)$$

Exemple :

Déterminer les équations du plan normal et du plan osculateur de l'hélice de l'exemple précédent au point P(0, 1, $\pi/2$).

On vérifie que le point P est détermine par $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{1_x} + \sin t\,\vec{1_y} + \vec{1_z} \quad \rightarrow \quad P \equiv \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\,\vec{1_x} + \sin\frac{\pi}{2}\,\vec{1_y} + \vec{1_z}$$

$$\rightarrow \quad P : \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$$

Le plan normal en P est orthogonal au vecteur $\vec{r}\,'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 1)$

Son équation s'écrit donc :

$$-1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -x + z = \frac{\pi}{2}$$

Le plan osculateur en P contient les vecteurs $\vec{1_t}$ et $\vec{1_n}$

Le vecteur $\vec{1_b} = \vec{1_t} \times \vec{1_n}$ lui est donc orthogonal.

Or $\vec{1_b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1) \rightarrow \vec{1_b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Le vecteur (1, 0, 1), plus simple, est donc aussi orthogonal au plan osculateur dont une équation est alors :

$1(x-0)+0(y-1)+1\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \rightarrow \quad x+z=\frac{\pi}{2}$

Courbure

Si C est une courbe définie par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, alors $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$.

Rappelez-vous que le vecteur tangent unitaire est donné par : $\vec{1_t} = \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$ et rend compte de la direction de la courbe. On observe que $\vec{1_t}$ change très peu de direction là où la courbe est assez droite et très fortement là où la courbe s'infléchit ou se tord de façon plus aiguë.

La courbure de C en un point donné est une mesure de la vitesse à laquelle la courbe change de direction on ce point. Précisément, on la définit comme le taux de variation du vecteur tangent unitaire par rapport à l'abscisse curviligne. (On utilise l'abscisse curviligne de manière à ce que la courbure ne dépende pas de la paramétrisation)

La courbure d'une courbe est :

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho^{-1} = \left|\frac{d\vec{1_t}}{ds}\right| \\ \rho^{-1} = \text{courbure de la courbe en P} \\ \rho = \text{Rayon de courbure en P} \end{array}}$$

Vu que la courbe est plus facile à calculer lorsqu'elle est exprimée par rapport au paramètre t plutôt que s, on fait appel à la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{d\vec{1_t}}{dt} = \frac{d\vec{1_t}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad et \qquad \rho^{-1} = \left|\frac{d\vec{1_t}}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\vec{1_t}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right|$$

$$\text{or} \quad \frac{ds}{dt} = \left|\vec{r}'(t)\right| \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho^{-1} = \frac{\left|\frac{d\vec{1_t}}{dt}\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}}$$

On a vu plus haut que le vecteur dérivé d'un vecteur unitaire est un vecteur orthogonale. De plus, si on considère un petit voisinage du point P, la courbe peut être assimilée dans ce petit voisinage à une courbe plane. En d'autres termes, la variation est indépendante du vecteur binormal (qui dans une courbe plane n'a pas de raison d'être). $\frac{d\vec{1_b}}{ds}$ se trouve donc dans le plan osculateur et on peut donc écrire :

$$\boxed{\frac{d\vec{1_t}}{ds} = \frac{1}{\rho(s)}\vec{1_n}(s)}$$

Ce qui signifie, que pour toute courbe C, l'extrémité du segment obtenue en portant à partir de P sur le normale principale orientée selon $\vec{1_n}$ une longueur égale à ρ est le centre de courbure de C en P et le cercle centre entre en ce point de rayon ρ est le **cercle osculateur**.

Le cercle osculateur admet la même tangent en P que la courbe. C'est la cercle qui décrit le mieux comment la courbe se comporte au voisinage de P.

Exemple

Calculer le rayon de courbure d'un cercle de rayon a.

On peut centrer le cercle à l'origine de manière à ce qu'il ait comme réprésentation paramètrique :

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{1_x} + a\sin t\,\vec{1_y}$$

$$\rightarrow \vec{r}\,'(t) = -a\sin t\,\vec{1_x} + a\cos t\,\vec{1_y} \qquad \left|\vec{r}\,'(t)\right| = a$$

$$\rightarrow \vec{1_t} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} = -\sin t\,\vec{1_x} + \cos t\,\vec{1_y}$$

$$\rightarrow \vec{1_t}\,' = -\cos t\,\vec{1_x} - \sin t\,\vec{1_y} \qquad \rightarrow \left|\vec{1_t}\,'\right| = 1$$

Et finalement, $\rho = \frac{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}{\left|\vec{1_t}\,'\right|} = a$

Calcul du rayon de courbure.

On peut bien entendu utiliser la définition.

$$\boxed{\rho^{-1} = \left|\frac{d\vec{1_t}}{ds}\right|}$$

Il est souvent plus intéressant d'utiliser la formule suivante :

$$\boxed{\rho = \frac{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|} = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{du}\times\frac{d^2\vec{r}}{du^2}\right|}}$$

Démonstration :

Comme $\vec{1}_t = \frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|}$ avec $\left|\vec{r}'\right| = \frac{d\vec{s}}{du} \rightarrow \vec{r}' = \left|\vec{r}'\right|\vec{1}_t = \frac{d\vec{s}}{du}\vec{1}_t$

La dérivée de $\vec{r}'$ est : $\vec{r}'' = \frac{d^2\vec{s}}{du^2}\vec{1}_t + \frac{d\vec{s}}{du}\vec{1}_t'$

Appliquons la formule $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

On obtient :

$$\vec{r}'\times\vec{r}'' = \frac{d\vec{s}}{du}\frac{d^2\vec{s}}{du^2}\vec{1}_t\times\vec{1}_t + \left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2\vec{1}_t\times\vec{1}_t' = \left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2\vec{1}_t\times\vec{1}_t'$$

car $\vec{1}_t\times\vec{1}_t = 0$ (vecteurs parallèles)

D'autre par, $\vec{1}_t$ est un vecteur unitaire, donc $\vec{1}_t$ et $\vec{1}_t'$ sont orthogonaux.

Par conséquent en appliquant, la définition du produit vectoriel :

$$\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right| = \left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2\left|\vec{1}_t\times\vec{1}_t'\right| = \left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2\left|\vec{1}_t\right|\left|\vec{1}_t'\right| = \left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2\left|\vec{1}_t'\right|$$

$$\rightarrow \left|\vec{1}_t'\right| = \frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|}{\left(\frac{d\vec{s}}{du}\right)^2} = \frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^2}$$

et finalement, $\rho = \frac{\left|\vec{1}_t'\right|}{\left|\vec{r}'\right|} = \frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3}$

Cas d'une courbe plane.

1) Exprimée par son équation cartésienne : y = y(x)

$$\vec{r}(x) = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y \rightarrow \vec{r}'(x) = \vec{1}_x + y'\vec{1}_y \rightarrow \left|\vec{r}'(x)\right| = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\vec{r}''(x) = y''\vec{1}_y \rightarrow \vec{r}'(x)\times\vec{r}''(x) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 1 & y' & 0 \\ 0 & y'' & 0 \end{vmatrix} = y''\vec{1}_z$$

$$\left|\vec{r}'(x)\times\vec{r}''(x)\right| = |y''| \qquad \boxed{\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}}$$

Les dérivées sont des dérivées par rapport à x

2) Donnée par son équation polaire : $r = r(\theta)$

$$\vec{r}(\theta) = r(\theta)\,\vec{1_r}(\theta) \;\rightarrow\; \boxed{\rho = \frac{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}}$$

Les dérivées sont des dérivées par rapport à θ

Exemple

Calculer la courbure de la cubique gauche $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ en un point quelconque et à l'origine.

$$\vec{r}'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right) \qquad \vec{r}''(t) = (0, 2, 6t)$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\vec{1_x} - 6t\,\vec{1_y} + 2\,\vec{1_z}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right| = \sqrt{36t^4+36t^2+4} = 2\sqrt{9t^4+9t^2+1}$$

Reste à appliquer la formule.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^{\frac{3}{}}} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\left(1+4t^2+9t^4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

A l'origine, la courbure vaut 2

Torsion

La torsion d'un courbe représente la variation de l'inclinaison du plan osculateur en fonction de l'abscisse curviligne. Comme le plan osculateur est perpendiculaire au vecteur binormal, la torsion sera donc représentée par $\frac{d\vec{1_b}}{ds}$ qui est un vecteur perpendiculaire à $\vec{1_b}$.

De plus, si denouveau, on considère un petit voisinage de P, la torsion est indépendante du vecteur tangent. $\frac{d\vec{1}_b}{ds}$ est donc aussi perpendiculaire à $\vec{1}_t$.

Et finalement, on écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{1}_b}{ds} = \dfrac{1}{\tau(s)}\vec{1}_n(s) \\ \tau = \text{ La torsion de la courbe en P} \\ \dfrac{1}{\tau} = \text{ Le rayon de torsion de la courbe en P} \end{array}}$$

La torsion d'une courbe plane est nulle. La torsion est une mesure de la planéité d'une courbe.

Formules de Frenet

Les formules de Frenet sont fondamentales en géométrie différentielle et donc en cinématique. On en connaît déjà deux. Définissons la troisième.

$$\frac{d\vec{1}_n}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{1}_b \times \vec{1}_t\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\vec{1}_n}{ds} = \frac{d\vec{1}_b}{ds} \times \vec{1}_t + \vec{1}_b \times \frac{d\vec{1}_t}{ds} = \frac{1}{\tau}\vec{1}_n \times \vec{1}_t + \vec{1}_b \times \left(\frac{1}{\rho}\vec{1}_n\right)$$

$$= -\frac{\vec{1}_b}{\tau} - \frac{\vec{1}_t}{\rho}$$

Les trois formules de Frenet sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{1}_t}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\vec{1}_n \\ \dfrac{d\vec{1}_b}{ds} = \dfrac{1}{\tau}\vec{1}_n \\ \dfrac{d\vec{1}_n}{ds} = -\dfrac{\vec{1}_b}{\tau} - \dfrac{\vec{1}_t}{\rho} \end{array}}$$

Les trois formules de Frenet s'écrivent simplement en introduisant le vecteur de Darboux de la base $\left\{\vec{1}_t, \vec{1}_n, \vec{1}_b\right\}$ par rapport à un repère fixe avec s comme variable scalaire.

Posons :

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{\tau(s)}\vec{1}_t(s) + \frac{1}{\rho(s)}\vec{1}_b(s)$$

Les formules de Frenet s'écrivent alors sous une forme très facile à retenir.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{1_t}}{ds} &= \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_t}\\ \frac{d\overrightarrow{1_b}}{ds} &= \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_b}\\ \frac{d\overrightarrow{1_n}}{ds} &= \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_n}\end{aligned}}$$

Démonstration

$$\frac{d\overrightarrow{1_t}}{ds} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_t} = \left(-\frac{1}{\tau}\overrightarrow{1_t}+\frac{1}{\rho}\overrightarrow{1_b}\right)\times\overrightarrow{1_t} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{1_n}$$

$$\frac{d\overrightarrow{1_b}}{ds} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_b} = \left(-\frac{1}{\tau}\overrightarrow{1_t}+\frac{1}{\rho}\overrightarrow{1_b}\right)\times\overrightarrow{1_b} = \frac{1}{\tau}\overrightarrow{1_n}$$

$$\frac{d\overrightarrow{1_n}}{ds} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{1_n} = \left(-\frac{1}{\tau}\overrightarrow{1_t}+\frac{1}{\rho}\overrightarrow{1_b}\right)\times\overrightarrow{1_n} = -\frac{\overrightarrow{1_b}}{\tau}-\frac{\overrightarrow{1_t}}{\rho}$$

Calcul de la torsion.

En général, il est plus facile de calculer le rayon de torsion au moyen de la formule suivante :

$$\boxed{\tau = \frac{\left|r'\times r''\right|^2}{\left(r'\times r''\right).r'''}}$$

Démonstration (pour information).

Pour simplifier l'écriture, définissons :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \qquad \text{La courbure}$$

$$T = \frac{1}{\tau} \qquad \text{La torsion}$$

$$\mathbf{T} = \overrightarrow{1_t} \qquad \mathbf{N} = \overrightarrow{1_n} \qquad \mathbf{B} = \overrightarrow{1_b}$$

Toutes les dérivées (’) sont des dérivées par rapport à u.

On a :

1) $\vec{r}\,' = \frac{ds}{du}\mathbf{T} = s'\mathbf{T}$

2) $\vec{r}\,'' = \frac{d}{du}\left(\vec{r}\,'\right) = \frac{d}{du}\left(s'\mathbf{T}\right) = s''\mathbf{T} + s'\mathbf{T}'$

$= s''\mathbf{T} + \frac{ds}{du}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{du} = s''\mathbf{T} + \kappa s'^2\,\mathbf{N}$

3) Comme $\mathbf{T}\times\mathbf{T}=\vec{0}$, on a

$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = s'\mathbf{T}\times\left(s''\mathbf{T} + \kappa s'^2\,\mathbf{N}\right) = \kappa s'^3\,\mathbf{B}$

4) $\vec{r}\,''' = \frac{d}{du}\left(s''\mathbf{T} + \kappa s'^2\,\mathbf{N}\right)$

$= s'''\mathbf{T} + s''\mathbf{T}' + \kappa' s'^2\,\mathbf{N} + 2\kappa s' s''\mathbf{N} + \kappa s'^2\,\mathbf{N}'$

or

$\mathbf{T}' = \frac{d\mathbf{T}}{du} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{du} = \kappa s'\mathbf{N}$

$\mathbf{N}' = \frac{d\mathbf{N}}{du} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\frac{ds}{du} = \left(-\mathrm{T}\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}\right)s'$

donc

$\vec{r}\,''' = \left(s''' - \kappa^2 s'^3\right)\mathbf{T} + \left(3\kappa s' s'' + \kappa' s'^2\right)\mathbf{N} - \kappa s'^3\,\mathrm{T}\mathbf{B}$

5) Puisque **BT**=0 **BN**=0 **BB**=1

$\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\vec{r}\,''' = -\kappa^2\mathrm{T}s'^6$

6) Finalement

$$\frac{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|}{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\vec{r}\,'''} = \frac{\left|\kappa s'^3\right|^2}{-\kappa^2\mathrm{T}s'^6} = -\frac{1}{\mathrm{T}} = \tau$$

Exemple

Calculer le rayon de torsion de l'hélice circulaire.

Equation de l'hélice circulaire :

$\vec{r}(t) = \left(a\cos t,\, a\sin t,\, bt\right)$

Donc, on a succesivement :

$\vec{r}\,' = -a\sin t\,\overrightarrow{1_x} + a\cos t\,\overrightarrow{1_y} + b\,\overrightarrow{1_z}$

$\vec{r}\,'' = -a\cos t\,\overrightarrow{1_x} - a\sin t\,\overrightarrow{1_y}$

$\vec{r}\,''' = a\sin t\,\overrightarrow{1_x} - a\cos t\,\overrightarrow{1_y}$

$$\vec{r}'\times\vec{r}'' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\,\overrightarrow{1_x} - ab\cos t\,\overrightarrow{1_y} + a^2\,\overrightarrow{1_z}$$

$$\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2 = a^2b^2 + a^4$$

$$\left(\vec{r}'\times\vec{r}''\right)\vec{r}''' = a^2b$$

$$\tau = \frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2}{\left(\vec{r}'\times\vec{r}''\right)\vec{r}'''} = \frac{a^2b^2 + a^4}{a^2b} = \frac{b^2 + a^2}{b}$$

La torsion d'une hélice circulaire est donc constante.