Vecteur de Darboux.

Soit une base orthonormée dextrogyre (tourne à droite) fixe $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ et une base orthonormée dextrogyre variable $\left\{\vec{E}_1(u), \vec{E}_2(u), \vec{E}_3(u)\right\}$
u est un paramètre par exemple le temps, ou un angle.

En supposant, les trois fonctions vectorielles $\vec{E}_i(u)$ dérivables, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{E}_1}{du} = \omega_{11}(u)\,\vec{E}_1(u) + \omega_{12}(u)\,\vec{E}_2(u) + \omega_{13}(u)\,\vec{E}_3(u) \\ \dfrac{d\vec{E}_2}{du} = \omega_{21}(u)\,\vec{E}_1(u) + \omega_{22}(u)\,\vec{E}_2(u) + \omega_{23}(u)\,\vec{E}_3(u) \\ \dfrac{d\vec{E}_3}{du} = \omega_{31}(u)\,\vec{E}_1(u) + \omega_{32}(u)\,\vec{E}_2(u) + \omega_{33}(u)\,\vec{E}_3(u) \end{cases}$$

Cela signifie simplement que l'on peut exprimer $\dfrac{d\vec{E}_i}{du}$ en fonction de
$\vec{E}_1(u), \vec{E}_2(u)\ et\ \vec{E}_3(u)$

On montre que les matrices est antisymétrique. Pour rappel une matrice est antisymétrique si les éléments de la colonne principale sont nulles et si les éléments symétriques par rapport à cette colonne sont opposés.

En effet, on démontre (voir trièdre de Frenet) que la dérivée d'un vecteur unitaire est un vecteur perpendiculaire. Par conséquent si $\dfrac{d\vec{E}_1}{du}$ est perpendiculaire à $\vec{E}_1$, cela implique que le vecteur $\dfrac{d\vec{E}_1}{du}$ n'a pas de composante selon $\vec{E}_1$. Les éléments de la colonne principale sont donc nulles.
Pour s'en assurer, il suffit de calculer

$$\vec{E}_1 \frac{d\vec{E}_1}{du} = \vec{0} \ \text{ puisque } \vec{E}_1 \perp \frac{d\vec{E}_1}{du}$$

$$\rightarrow \ \vec{E}_1 \frac{d\vec{E}_1}{du} = \vec{E}_1\left(\omega_{11}\,\vec{E}_1 + \omega_{12}\,\vec{E}_2 + \omega_{13}\,\vec{E}_3\right) = \omega_{11}$$

$$\rightarrow \ \omega_{11} = 0$$

Même raisonnement pour les deux autres éléments de la diagonale principale.

Le système devient donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{E_1}}{du} = & \omega_{12}(u)\,\overrightarrow{E_2}(u) + \omega_{13}(u)\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_2}}{du} = \omega_{21}(u)\,\overrightarrow{E_1}(u) & + \omega_{23}(u)\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_3}}{du} = \omega_{31}(u)\,\overrightarrow{E_1}(u) + \omega_{32}(u)\,\overrightarrow{E_2}(u) & \end{cases}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{E_1} \times \overrightarrow{E_2} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{E_3}}{du} &= \frac{d\left(\overrightarrow{E_1} \times \overrightarrow{E_2}\right)}{du} = \frac{d\overrightarrow{E_1}}{du} \times \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_1} \times \frac{d\overrightarrow{E_2}}{du} \\ &= \left(\omega_{12}\overrightarrow{E_2} + \omega_{13}\overrightarrow{E_3}\right) \times \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_1} \times \left(\omega_{21}\overrightarrow{E_1} + \omega_{23}\overrightarrow{E_3}\right) \\ &= -\omega_{13}\overrightarrow{E_1} - \omega_{23}\overrightarrow{E_2} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\omega_{31} = -\omega_{23}$ et $\omega_{32} = -\omega_{23}$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{E_2}}{du} &= \frac{d\left(\overrightarrow{E_3} \times \overrightarrow{E_1}\right)}{du} = \frac{d\overrightarrow{E_3}}{du} \times \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_3} \times \frac{d\overrightarrow{E_1}}{du} \\ &= \left(\omega_{31}\overrightarrow{E_1} + \omega_{32}\overrightarrow{E_2}\right) \times \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_3} \times \left(\omega_{12}\overrightarrow{E_2} + \omega_{13}\overrightarrow{E_3}\right) \\ &= -\omega_{32}\overrightarrow{E_3} - \omega_{12}\overrightarrow{E_1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\omega_{12} = -\omega_{21}$ et $\omega_{32} = -\omega_{23}$

Le système est donc bien antisymétrique :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{E_1}}{du} = & \omega_{12}(u)\,\overrightarrow{E_2}(u) + \omega_{13}(u)\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_2}}{du} = -\omega_{12}(u)\,\overrightarrow{E_1}(u) & + \omega_{23}(u)\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_3}}{du} = -\omega_{13}(u)\,\overrightarrow{E_1}(u) - \omega_{23}(u)\,\overrightarrow{E_2}(u) & \end{cases}$$

Posons : $p = \omega_{23}$ $q = \omega_{31}$ $r = \omega_{12}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{E_1}}{du} = & r\,\overrightarrow{E_2}(u) - q\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_2}}{du} = -r\,\overrightarrow{E_1}(u) & + p\,\overrightarrow{E_3}(u) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_3}}{du} = q\,\overrightarrow{E_1}(u) - p\,\overrightarrow{E_2}(u) & \end{cases}$$

et définissons le vecteur : $\vec{\omega} = p\overrightarrow{E_1} + q\overrightarrow{E_2} + r\overrightarrow{E_3}$ appelé **vecteur de Darboux** de la base $\left\{\vec{E_i}\right\}$ par rapport à la base fixe $\left\{\vec{e_i}\right\}$. On a

$$\frac{d\overrightarrow{E_2}}{du}.\overrightarrow{E_3} = -r\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_3} + p\overrightarrow{E_3}\overrightarrow{E_3} = p$$

puisque $\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_3} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{E_3}\overrightarrow{E_3} = 1$

de même $\frac{d\overrightarrow{E_3}}{du}.\overrightarrow{E_1} = q$ et $\frac{d\overrightarrow{E_1}}{du}.\overrightarrow{E_3} = r$

Donc le vecteur de Darboux s'écrit implicitement :

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\overrightarrow{E_2}}{du}\overrightarrow{E_3}\right)\overrightarrow{E_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{E_3}}{du}\overrightarrow{E_1}\right)\overrightarrow{E_2} + \left(\frac{d\overrightarrow{E_1}}{du}\overrightarrow{E_2}\right)\overrightarrow{E_3}$$

On montre facilement que :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{E_i}}{du} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{E_i}}$$

En effet, soit par exemple

$$\frac{d\overrightarrow{E_1}}{du} = r\,\overrightarrow{E_2} - q\,\overrightarrow{E_3}$$

$$\text{or } \vec{\omega}\times\overrightarrow{E_1} = p\overrightarrow{E_1}\times\overrightarrow{E_1} + q\overrightarrow{E_2}\times\overrightarrow{E_1} + r\overrightarrow{E_3}\times\overrightarrow{E_1}$$

$$= -q\overrightarrow{E_3} + r\overrightarrow{E_2}$$

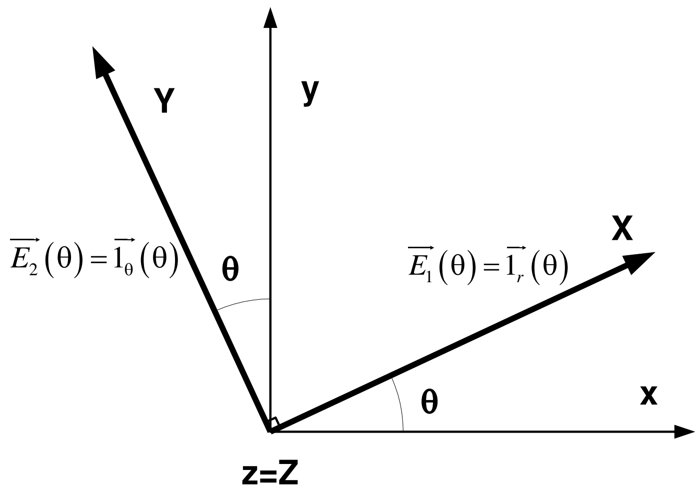
$$\rightarrow \frac{d\overrightarrow{E_1}}{du} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{E_1}$$

Le vecteur ω porte aussi le nom de **vecteur vitesse instantanée de rotation** du repère $\left\{\vec{E_i}\right\}$ par rapport au repère $\left\{\vec{e_i}\right\}$. Le vecteur de Darboux est un vecteur caractérisant à chaque instant le mouvement de la base $\left\{\vec{E_i}\right\}$. Ce vecteur est a priori un vecteur libre. Le repère $\left\{\vec{E_i}\right\}$ est souvent le trièdre de Frenet (voir plus loin). Le vecteur de Darboux est alors la vitesse angulaire instantanée du trièdre de Frenet lorsque le point courant se déplace avec une vitesse unité.

Application

Vecteur de Darboux d'un repère en rotation autour d'un axe fixe (base de coordonnées polaires ou cylindriques)

On souhaite étudier un trièdre dextrogyre Oxyz en rotation autour de l'axe Oz d'un trièdre dextrogyre fixe.



On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_1}(\theta)=\overrightarrow{1_r}(\theta) \\ \overrightarrow{E_2}(\theta)=\overrightarrow{1_\theta}(\theta) \\ \overrightarrow{E_3}(\theta)=\overrightarrow{1_z} \end{cases}$$

On a deux bases : $\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{E_1}(\theta),\overrightarrow{E_2}(\theta),\overrightarrow{E_3}(\theta)=\overrightarrow{e_3}\right\}$

Note : $\overrightarrow{E_3}(\theta)=\overrightarrow{e_3}$ parce que les axes z et Z sont confondus.

On a : $\dfrac{d\overrightarrow{E_3}(\theta)}{d\theta}=\vec{0}$ puisque l'axe Z est fixe et est indépendant de θ.

Or : $\dfrac{d\overrightarrow{E_3}(\theta)}{d\theta}=q\overrightarrow{E_1}(\theta)-p\overrightarrow{E_2}(\theta)$ et par conséquent $q=p=0$

En tenant compte du fait que r = 1 (rotation pure), on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{E_1}}{d\theta}=r\,\overrightarrow{E_2}(\theta)-q\,\overrightarrow{E_3}(\theta)=\overrightarrow{E_2}(\theta) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_2}}{d\theta}=-r\,\overrightarrow{E_1}(\theta)+p\,\overrightarrow{E_3}(\theta)=-\overrightarrow{E_1}(\theta) \\ \dfrac{d\overrightarrow{E_3}}{d\theta}=q\,\overrightarrow{E_1}(\theta)-p\,\overrightarrow{E_2}(\theta)=\vec{0} \end{cases}$$

Le vecteur de Darboux de la base $\left\{\vec{E_i}\right\}$ par rapport à la base fixe $\left\{\vec{e_i}\right\}$ est donc

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \left(\frac{d\overrightarrow{E_2}}{du}\,\overrightarrow{E_3}\right)\overrightarrow{E_1}+\left(\frac{d\overrightarrow{E_3}}{du}\,\overrightarrow{E_1}\right)\overrightarrow{E_2}+\left(\frac{d\overrightarrow{E_1}}{du}\,\overrightarrow{E_2}\right)\overrightarrow{E_3} \\ &= \left(-\overrightarrow{E_1}\,\overrightarrow{E_3}\right)\overrightarrow{E_1}+\left(\vec{0}\,\overrightarrow{E_1}\right)\overrightarrow{E_2}+\left(\overrightarrow{E_2}\,\overrightarrow{E_2}\right)\overrightarrow{E_3} \\ &= \vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{E_3} \\ \rightarrow &\ \boxed{\vec{\omega}=\overrightarrow{E_3}=\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{1_z}} \end{aligned}$$

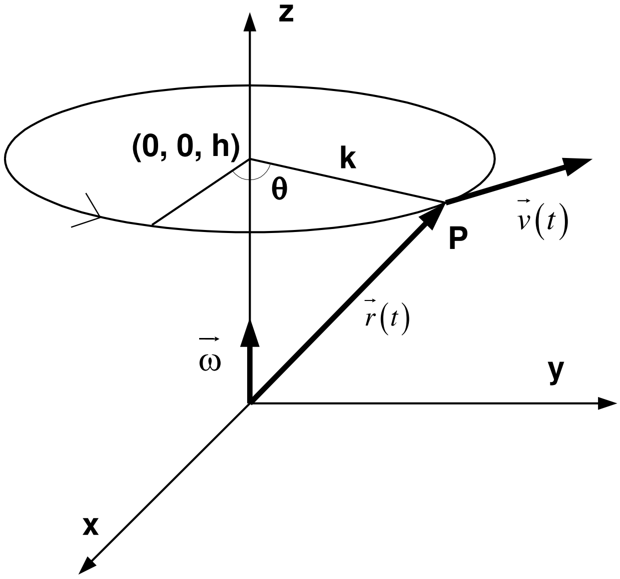
NB : Si on considère que θ est elle-même une fonction scalaire d'une variable scalaire t (le temps par exemple), on a :

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_3 = \frac{d\theta}{dt}\vec{1}_z}$$

En cinématique, le vecteur de Darboux définira **le vecteur vitesse angulaire** d'un trièdre attaché au solide en fonction du temps.

Exemple

Un point P subit un mouvement de rotation autour de l'axe des z sur un cercle de rayon k situé dans le plan z = h. La vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ est une constante. Le vecteur $\vec{\omega} = \omega\vec{1}_z$ de norme ω et dirigé dans le sens positif de l'axe des z est la **vitesse angulaire** de P. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de P est le produit vectoriel de $\vec{\omega}$ et du vecteur position $\vec{r}(t)$ de P



Le vecteur position de P est définit par :

$$\vec{r}(t) = k\cos\omega t\,\vec{1}_x + k\sin\omega t\,\vec{1}_y + h\,\vec{1}_z$$

Prenons le produit vectoriel

$$\vec{\omega}\times\vec{r}(t) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ k\cos\omega t & k\sin\omega t & h \end{vmatrix} = -\omega k\sin\omega t\,\vec{1}_x + \omega k\cos\omega t = \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t)$$

On retrouve bien la relation : $\boxed{\dfrac{d\vec{E}_i}{du} = \vec{\omega}\times\vec{E}_i}$