Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 11

EXTRI110-EXTRI119

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Mars 04

EXTRI110 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) $\tan A > \sin A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) $\tan A$ a le même signe que $(\sin A \cos A)$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $\sin 2A > \sin A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) Dans un triangle ABC : $\sin(B+C) > \sin A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

5) Dans un triangle ABC : $\sin A > \sin B$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

---

1. $\tan A > \sin A$

   Vrai si $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$

2. Toujours vrai

3. Vrai si : $0 < A < \frac{\pi}{3}$

4. $\sin(B+C) > \sin A \Rightarrow \sin(\pi - A) > \sin A$

   Toujours faux car $\sin(\pi - A) = \sin A$

5. $\sin A > \sin B$

   Dans un triangle : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{a}\sin A$

   Donc : $\sin A > \frac{b}{a}\sin A \Rightarrow 1 > \frac{b}{a}$ $(\text{car } \sin A > 0) \Rightarrow$ Vrai si $a > b$

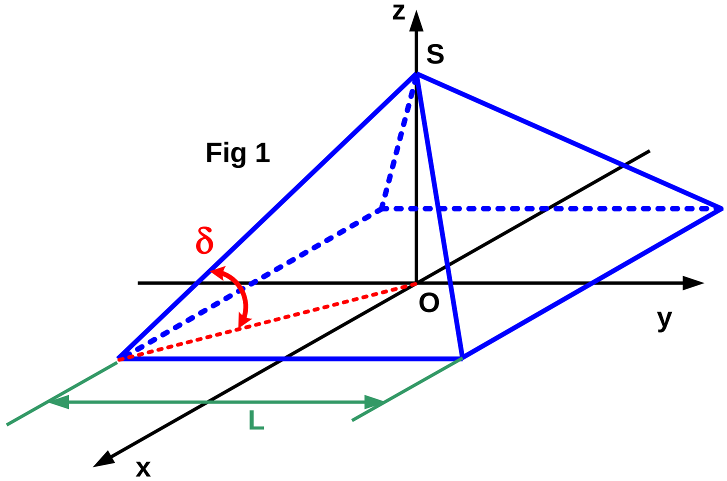
EXTRI111 – Louvain, juillet 2001.

Emilie visite le sud de l'Egypte, et arrive sur un plateau (plan et horizontale) sur lequel s'élèvent trois pyramides à base carrée. Celles-ci sont homothétiques, de taille différente, mais avec leurs arêtes correspondantes parallèles.
La base de la plus grande pyramide à un côté de longueur L . Emilie l'escalade en suivant l'arête, qui fait un angle δ avec le sol, et arrive au sommet S. De ce point, elle observe les sommets A et B des deux autres pyramides, respectivement sous les angles α et β par rapport au plan horizontal passant par S.

Sachant que l'angle $ASB = \gamma$, que la plus petite pyramide de sommet B, qui est la plus éloignée, a une base dont le côté est $L/2$, et que la distance $BA = SB/2$, déterminer la hauteur de ces trois pyramides.

Faites le calcul pour les valeurs suivantes, au cm près :
L = 25 cm , δ = 50° , γ = 25° , α = 5° , β = 7°.

Emilie est très curieuse, et s'intéresse beaucoup à la façon dont vous allez aborder ce problème, aussi, expliquez-lui clairement comment vous faites ce calcul : un dessin clair et explicite, avec les notations qui correspondent à vos équations, ainsi que ces équations sur base des symboles correspondants, lui seront précieux pour comprendre comment ensuite vous établissez les valeurs numériques.



La hauteur de la pyramide de sommet S est donnée par :

$$h_S = \frac{\sqrt{2}L}{2\tan\delta} = \frac{\sqrt{2}\,.\,25}{2\tan 50} = 14.833\,m \qquad (\text{Figure 1})$$

Soit A' la projection de A dans le plan horizontal passsant par S,

et B' la projection de B (Figure 2)

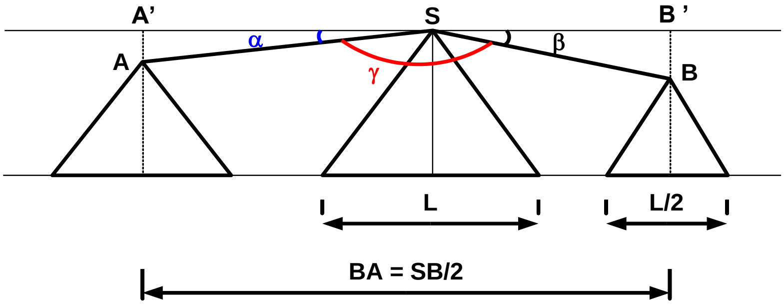
Traitons la pyramide de sommet *B*. Comme les pyramides sont homothétiques, si la base est deux fois plus petite, la hauteur est aussi deux fois plus petite.

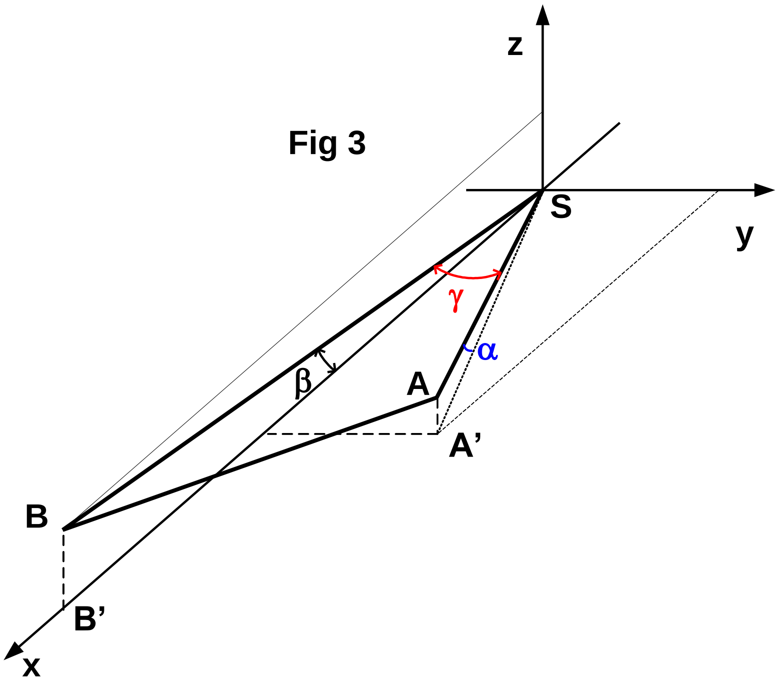
On a : $h_B = BB' = \frac{h_S}{2} \;\rightarrow\; h_B = 7.4165\,m \quad \text{or} \quad BB' = SB.\sin\beta$

$$\rightarrow\; SB = \frac{BB'}{\sin\beta} = \frac{h_s}{2\sin\beta} = \frac{14.833}{2\sin 7} = 60.857\,m$$

Et $SB' = \frac{BB'}{\tan\beta} = \frac{h_S}{2\tan\beta} = \frac{14.833}{2\tan 7} = 60.404\,m$

Fig 2





Le cas de la pyramide A est un peu plus compliqué.
Pour faire simple, définissons un système d'axes, SB étant l'axe Ox, et l'axe Oz étant dirigé vers le centre de la terre. $\left(\text{Figure } 3\right)$. Ce faisant on évite les calculs avec des nombres négatifs.
Dans ce système, les coordonnées de B et A sont :

$$B:\left(SB';0;h_S-h_B=\frac{h_S}{2}\right)=\left(60.404;\,0;\,7.417\right)$$

$$A:\left(x;\,y;\,\tan\alpha\,\sqrt{x^2+y^2}\right)=\left(x;\,y;\,0.08749\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\rightarrow\ \overrightarrow{SB}:\left(60.404;\,0;\,7.417\right)\ \text{ et }\ \overrightarrow{SA}:\left(x;\,y;\,0.08749\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Or nous connaissons l'angle $\widehat{ASB}=\gamma=25°$

$$\rightarrow\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SB}\right\|.\left\|\overrightarrow{SA}\right\|}=\frac{60.404x+7.417\times0.08749\sqrt{x^2+y^2}}{60.857\sqrt{x^2+y^2+0.08749^2\left(x^2+y^2\right)}}=0.90631$$

Tous calculs faits, on trouve : $y=\pm0.4682x$
Les deux solutions sont acceptables selon que l'on place A à droite ou à gauche de l'axe Ox. Retenons la solution positive :$y=0.4682x$

De plus, nous connaissons la distance $BA=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{60.858}{2}=30.429\ m$

$$\rightarrow\left\|BA\right\|^2=30.429^2=\left(x-60.404\right)^2+y^2+\left(0.8749\sqrt{x^2+y^2}-7.4167\right)^2$$

$$=\left(x-60.404\right)^2+0.2192x^2+\left(0.08749\sqrt{1.2192x^2}-7.4167\right)^2$$

Après simplification, on trouve une équation du second dégré :

$$1.228532\,x^2-122.24056\,x+2777.7204=0$$

qui admet pour solutions: $\begin{cases}x=64.3835\\x=35.1178\end{cases}$

On retient la deuxième solution puisque la pyramide B est plus éloignée.
Il nous reste à conclure :

$$y=35.1178\times0.4682=16.4422\quad\text{et}\quad z=0.08749\sqrt{35.1178^2+16.4422^2}=3.3925$$

$$\rightarrow\ h_A=14.8333-3.3925=11.4408\ m$$

<u>Conclusions</u> :

$\boxed{h_S=14.833\,m}$ $\boxed{h_B=7.417\,m}$ $\boxed{h_A=11.4408\,m}$

EXTRI112 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

Trouver les valeurs de x et y qui satisfont au système suivant :

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ \cot x-\cot y=2 \end{cases}$$

et présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$CE:\begin{cases} \cot x\neq\pm\infty \ \Rightarrow x\neq k\pi \\ \cot y\neq\pm\infty \ \Rightarrow y\neq k\pi \end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{4}-y$$

$$\cot x=\cot\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot y+1}{\cot y-\cot\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{\cot y+1}{\cot y-1}=2+\cot y$$

$$\Rightarrow \cot^2 y=3 \quad \Rightarrow \cot y=\pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{12} \\ y=-\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Résolu le 2 janvier 2004. Modifié le 16 août 2004

EXTRI113 – EPL, UCL, LLN, juillet 2004.

Les angles d'un triangle ABC vérifient la relation suivante

$$\sin C = \cos A + \cos B$$

Démontrer que le triangle est rectangle.

$C = \pi - A - B \Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \sin C = \cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{\pi - C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

On peut simplifier par $\sin\frac{C}{2}$, puisque $\sin\frac{C}{2}$ implique $C = 2\pi$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = A - B \quad \Rightarrow \pi - A - B = A - B \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\ C = -A + B \Rightarrow \pi - A + B = -A - B \Rightarrow B = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le 24 mars 05

EXTRI114 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) $\cot A > \cos A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) $\cos(90° + A) = -\sin A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) $\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} = 0$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) $\tan(A - B) = \tan A - \tan B$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

5) $\cos(A - B)\cos(A + B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

---

1. $\cot A > \cos A$

   Vrai si $\quad 0 < A < \frac{\pi}{2} \quad$ ou $\quad \pi > A > \frac{3\pi}{2}$

2. Toujours vrai.

3. $\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{3\pi+4\pi}{14}\cos\frac{3\pi-4\pi}{14} = 2\sin\frac{7\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$

$$= 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{\pi}{14} \neq 0$$

   $\Rightarrow$ Toujours faux.

4. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$

   Donc la relation proposée sera vraie si $\quad \tan A\tan B + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \tan A \tan B = 0$

   $\Rightarrow \quad A = k\pi \;$ ou $\; B = k\pi$

5. $\cos(A-B)\cos(A+B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

   or $\; 2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$$\Rightarrow \cos(A-B)\cos(A+B) = \frac{1}{2}\left(\cos 2A + \cos(-2B)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 A - 1 + 1 - \sin^2 B\right)$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 B$$

Donc, la relation est toujours vraie.

Résolu 2 janvier 2004. Modifié le 16 août 2004

EXTRI115 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

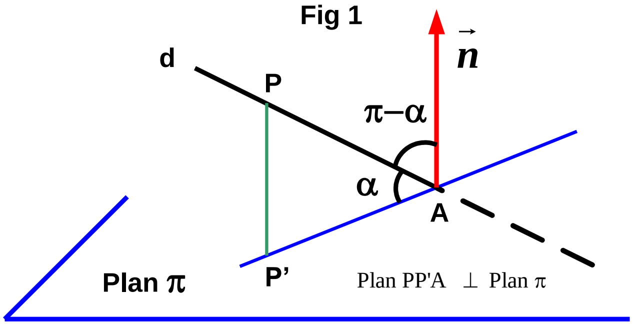
Emile Kandid est en voyage en Italie, où il a observé plus d'une tour penchée. Celle qu'il observe ce jour-là est située sur une esplanade horizontale. Il décide de l'approximer par un segment de droite dont il voudrait déterminer la longueur L. Pour ce faire, il fait les observations suivantes :

- la tour est penchée exactement vers le Nord, d'un angle $\delta = 5°$ par rapport à la verticale.
- L'ombre au sol à une longueur $D = 85$ m
- A l'heure de cette observation, les rayons solaires font un angle $\alpha = 43°$ avec le sol, et un angle $\beta = 45°$ vers l'Ouest avec le plan vertical orienté Nord-Sud (*)

Pour aider Emile, expliquez-lui clairement comment vous faites ce calcul : un dessin bien clair et explicite, avec les notations qui correspondent à vos équations, ainsi que ces équations sur base des symboles correspondants, lui seront très précieux pour comprendre comment ensuite vous établissez les valeurs numériques. N'oubliez pas également que des calculs de valeurs intermédiaires peuvent servir à contrôler une valeur finale. Merci pour lui.

(*) Vous savez, aussi bien qu'Emile, qu'un angle entre une droite d et un plan P se mesure toujours dans le plan Q en passant par d et perpendiculaire à P.

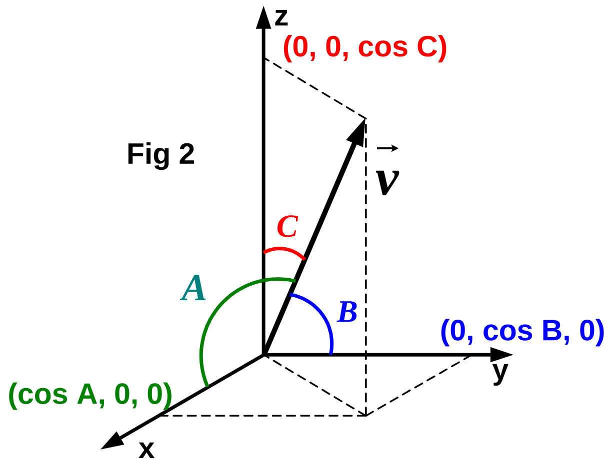
Fig 1



Rappel 1

La figure 1 montre que si α est l'angle entre une droite d et un plan π est définit dans le plan $PP'A$ perpendiculaire au plan π.

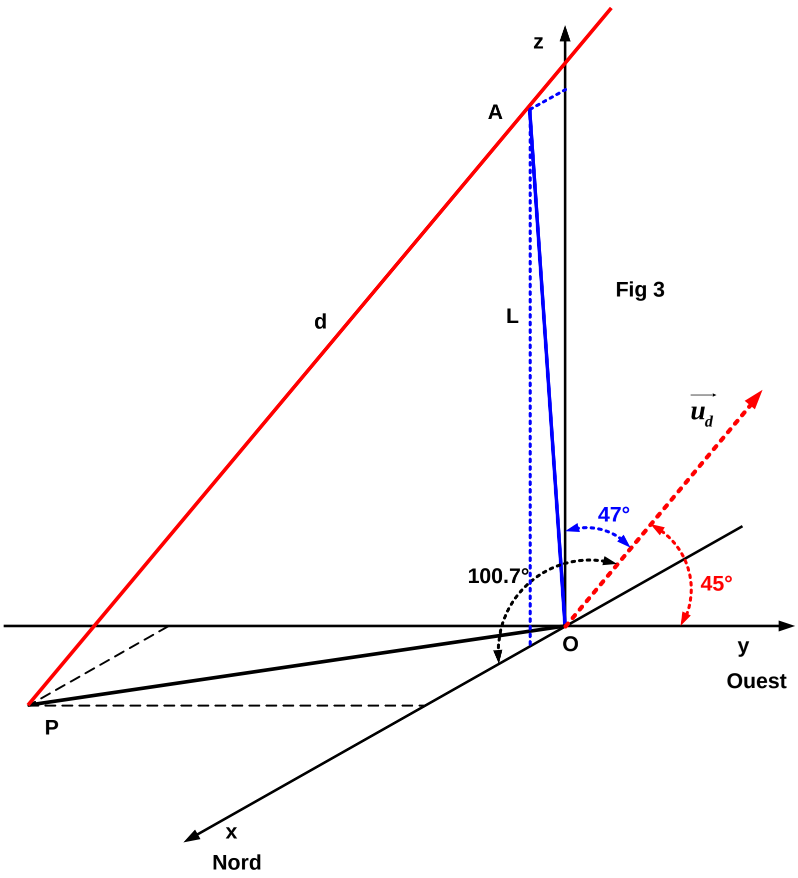
On voit immédiatement qu'alors l'angle entre le vecteur normal $\vec{n}$ et la droite est $\pi - \alpha$.



Rappel 2

La figure 2 définit pour un vecteur unitaire $\vec{v}$ les angles avec A, B et C, avec les axes. Il est immédiat que les composantes du vecteur sont les cosinus des angles. Ce sont les cosinus directeurs du vecteur. De plus, on a la relation :

$$\left\|\vec{v}\right\|^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \qquad (1)$$



La figure 3 définit le système de coordonnées.
Considérons le rayon de soleil qui passe par le sommet A de la tour.
Les coordonnées de A sont : $(L\sin 5,\ 0,\ L\cos 5) = (0.08716\ L,\ 0,\ 9962\ L)$

Ce rayon peut être représente par une droite d.
Nous pouvons facilement trouver les cosinus directeurs de d.

– Angle avec l'axe Oz $(\perp$ au plan $Oxy)$: $90 - 43 = 47° \ \rightarrow\ \cos 47 = 0.682$
– Angle avec l'axe Oy $(\perp$ au plan $Oxz)$: $45° \ \rightarrow\ \cos 45 = 0.7071$
– Angle avec l'axe Ox

De $(1)\ \rightarrow\ \cos^2 A = 1 - 0.682^2 - 0.7071^2 = 0.03489$
$\rightarrow\ \cos A = \pm 0.18678\ \rightarrow\ A = 79.235°$ ou $A = 100.76°$
On retient $A = 100.76°$, car l'Egypte étant dans l'hémisphère Nord, l'ombre est au-dessus de l'axe des y.

La figure 3 montre le vecteur directeur $\overrightarrow{u_d} : (-0.18678;\ 0.70711;\ 0.682)$ de la droite d.

L'équation de la droite d est donc : $\begin{cases} x = 0.08716\ L - 0.18676\ k & (2) \\ y = \qquad\qquad + 0.70711\ k & (3) \\ z = 0.9962\ L\ + 0.682\ k & (4) \end{cases}$

Le point de percée de d dans le plan Oxy est donné par $z = 0$
$\rightarrow (4) : 0 = 0.9962\ L\ + 0.682\ k \rightarrow\ k = -1.4607$
$\rightarrow (2)\ \ x = 0.35996\ L$ et $(3)\ \ y = -1.03288\ L$
$\rightarrow\ P : (0.35996\ L, -1.03288\ L, 0)$

Il reste à déterminer L en exprimant que la distance PO est de 85 m.
$\rightarrow L^2 (0.35996^2 + 1.03288^2) = 85^2\ \rightarrow\ \boxed{L = 77.71\ m}$
On calcul aussi : $P : (27.973, -80.265, 0)$

EXTRI116 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2002.

Vérifier les identités suivantes :

a) $(2\cos a+1)(2\cos a-1)(2\cos 2a-1)=2\cos 4a+1$

b) $\dfrac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\tan a$

$a)$ $(2\cos a+1)(2\cos a-1)(2\cos 2a-1)$

$=(4\cos^2 a-1)(2\cos 2a-1)$

$=\left[2(\cos 2a+1)-1\right](2\cos 2a-1)$

$=(2\cos 2a+1)(2\cos 2a-1)=4\cos^2 a-1$

$b)$ CE : 1) $\cos a\neq 0$ (à cause de $\tan a$) $\rightarrow a\neq 90°+k180$

2) $1+\cos 2a+\sin 2a\neq 0$

or $1+\cos 2a+\sin 2a=\cos^2 a+\sin^2 a+(\cos^2 a-\sin^2 a)+2\sin a\cos a$

$=2\cos a(\sin a+\cos a)$

$\Rightarrow \sin a\neq -\cos a\Rightarrow\ a\neq 135°+k180°$

Donc puisque l'on a déjà traité le dénominateur,regardons le numérateur

$1-\cos 2a+\sin 2a=\cos^2 a+\sin^2 a-(\cos^2 a-\sin^2 a)+2\sin a\cos a$

$=2\sin a(\sin a+\cos a)$

Finalement:

$$\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\frac{2\sin a(\sin a+\cos a)}{2\cos a(\sin a+\cos a)}=\tan a$$

EXTRI117 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2002.

a) Déterminer les solutions α et β satisfaisant au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\cos\beta \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = B\sin\beta \end{cases}$$

où A, B, P et Q sont des constantes connues.

b) Donner les conditions sur A, B, P et Q pour assurer l'existence de ces solutions.

Elevons au carré et additionnons les équations :

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\cos\beta \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = B\sin\beta \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} P^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha + 2PQ\cos\alpha\sin\alpha = A^2 + B^2\cos^2\beta + 2AB\cos\beta \\ Q^2\cos^2\alpha + P^2\sin^2 a - 2PQ\cos\alpha\sin\alpha = B^2\sin^2\beta \end{cases}$$

$$\to P^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2 a\right) + Q^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = A^2 + B^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + 2AB\cos\beta$$

$$\to \cos\beta = \frac{P^2 + Q^2 - A^2 - B^2}{2AB}$$

$$\to \boxed{\beta = \pm\arccos\frac{P^2 + Q^2 - A^2 - B^2}{2AB} + 2k\pi}$$

On déduit les conditions sur A, B, P et Q

$$\begin{cases} -1 \le \cos\beta \le 1 \;\to\; -1 \le \dfrac{P^2 + Q^2 - A^2 - B^2}{2AB} \le 1 \to (A-B)^2 \le \left(P^2 + Q^2\right) \le (A+B)^2 \\ A \ne 0 \\ B \ne 0 \end{cases}$$

Calculons $\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta} = \pm\sqrt{\dfrac{4A^2B^2 - \left[\left(P^2 + Q^2\right) - \left(A^2 + B^2\right)\right]^2}{4A^2B^2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{4A^2\left(P^2 + Q^2\right) - \left[P^2 + Q^2 + A^2 - B^2\right]^2}{4A^2B^2}}$$

Remplaçons dans le sytème

$$\begin{cases} P\cos\alpha + Q\sin\alpha = A + B\,\dfrac{P^2+Q^2-A^2-B^2}{2AB} \\ Q\cos\alpha - P\sin\alpha = \pm B\sqrt{\dfrac{4A^2\left(P^2+Q^2\right)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}{4A^2B^2}} \end{cases}$$

On obtient deux équations en α, qui se résolvent de façon classique

Posons $P = K\sin\varphi \quad Q = K\cos\varphi \quad \rightarrow K = \sqrt{P^2+Q^2} \quad \tan\varphi = \dfrac{P}{Q}$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin\left(\alpha+\varphi\right) = \dfrac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{2A\sqrt{P^2+Q^2}} \\ \cos\left(\alpha+\varphi\right) = \pm\sqrt{1-\dfrac{\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}{4A^2\left(P^2+Q^2\right)}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \tan\left(\alpha+\varphi\right) = \pm\frac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{\sqrt{4A^2\left(P^2+Q^2\right)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}}$$

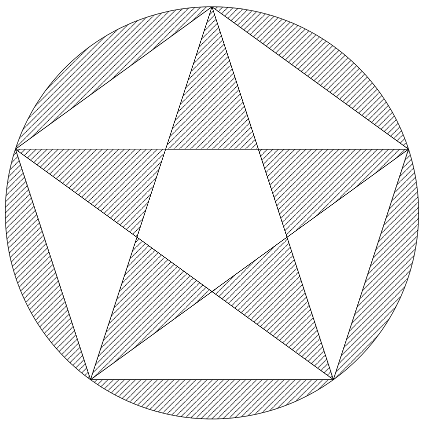
$$\rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\left(\pm\frac{P^2+Q^2+A^2-B^2}{\sqrt{4A^2\left(P^2+Q^2\right)-\left[P^2+Q^2+A^2-B^2\right]^2}}\right) - \arctan\frac{P}{Q} + k\pi}$$

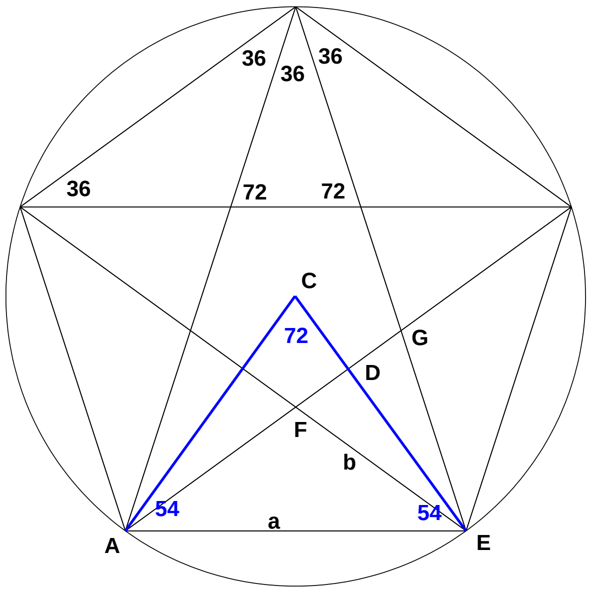
Avec comme conditions : $A \neq 0$ et $P^2+Q^2 \neq 0$

Modifié le 29 juin 2009 (Carmelo DI NOLFO)

EXTRI118 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2002.

La figure ci-dessous représente un pentagone régulier, son cercle circonscrit et ses diagonales. En utilisant uniquement la formule de calcul de l'aire d'un cercle ou d'un de ses secteurs ainsi que les formules relatives aux triangles, calculer le rapport entre l'aire hachurée de la figure et l'aire de sa partie blanche.





Il est facile de déterminer les angles des différents triangles.

La longueur a du côté du pentagone est : $\triangle ACE \to a = 2R\cos 54$

Et l'aire du triangle ACE est : $S_{\triangle ACE} = \frac{R^2}{2}\sin 72$

Dans le triangle $AFE,$ on a détermine $b = |FE| = \frac{a}{2\cos 36} = R\tan 36$

$\to S_{\triangle FGE} = \frac{1}{2}b^2 \sin 36 = \frac{R^2}{2}\tan^2 36 \sin 36$

On constate en regardant la figure que dans le $\triangle ACE$ la zone non-hachurée vaut:

$S_{\triangle ACE} - 2S_{\triangle FDE} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle FGE} = \frac{R^2}{2}\sin 72 - \frac{R^2}{2}\tan^2 36 \sin 36$

On multiplie par 5 pour avoir toute la surface non hachurée.

Le rapport de cette surface par rapport au cercle est :

$\frac{5R^2}{2\pi R^2}\left[\sin 72 - \tan^2 36 \sin 36\right] = 0.5099$

$\to$ La surface hachurée représente 0.4901 du cercle.

Finalement, le rapport entre les deux aires est : $\frac{0.4901}{0.5099} = \boxed{0.9611}$

EXTRI119 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

Démontrer que

$$\operatorname{cosec} a = \cot\frac{a}{2} - \cot a$$

Puis calculer l'expression suivante

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \operatorname{cosec} 8a$$

Rappel : $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\sin a}$

$$\text{CE :}\begin{cases} \sin a \neq 0 \;\;\; \Rightarrow \;\; a \neq 0° + k180° \\ \sin 2a \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; a \neq 90° + k90° \\ \sin 4a \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; a \neq 45° + k45° \\ \sin 8a \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; a \neq 22.5° + k22.5° \\ \sin\dfrac{a}{2} \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; a \neq 0° + k360° \end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; a \neq 0° + k22.5°$$

$$a)\ \cot\frac{a}{2} - \cot a = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} - \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a\cos\frac{a}{2} - \cos a \sin\frac{a}{2}}{\sin a \sin\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(a - \frac{a}{2}\right)}{\sin a \sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin a \sin\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sin a} = \operatorname{cosec} a$$

b) Appliquons ce résultat :

$$\left(\cot\frac{a}{2} - \cot a\right) + (\cot a - \cot 2a) + (\cot 2a - \cot 4a) + (\cot 4a - \cot 8a)$$

$$= \cot\frac{a}{2} - \cot 8a$$