Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 12

EXTRI120-EXTRI129

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 04

EXTRI120 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1 - \sin x)$$

$$\text{CE} : \begin{cases} \sin x \neq 0 & \Rightarrow \quad x \neq 0° + k180° \\ \cot x + \cos x \neq 0 & \Rightarrow \quad \cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 90° + k180° \end{cases}$$

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\cos x \frac{1 - \sin x}{\sin x}}{\cos x \frac{1 + \sin x}{\sin x}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$\Rightarrow$ L'équation devient : $\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 2(1 - \sin x)$

Or $\sin x \neq 1$ en vertu des CE.

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \Rightarrow \ 2 \sin x = -1 \ \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

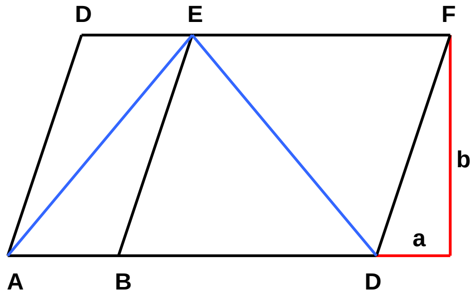
$$\Rightarrow \boxed{x = -30° + k360° \quad \text{ou} \quad x = 210° + k360°}$$

Résolu le 8 mars 2004
Modifié le 2 juillet 2004

EXTRI121 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

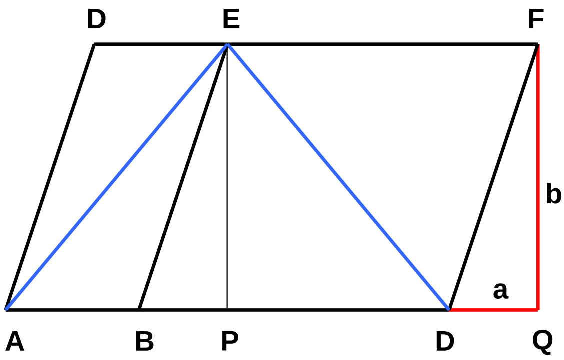
On donne 2 parallélogrammes : *ABED* et *BCFE*. On sait que :

$$AB = 3 \text{ m},\ BC = 7 \text{ m},\ a = 2 \text{ m et } b = 6 \text{ m}$$



Calculer :

a) Les angles *AEB* et *BEC*
b) Les longueurs des segments [*A*, *E*], [*B*, *E*] et [*C*, *E*]
c) Le rapport des longueurs des diagonales [*A*, *E*] et [*C*, *E*]



$\triangle ABC \ : |CF| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{40} = 6.3246\ m$

Soit P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de E et F.

$|PC| = |EF| = 7\ m \ \rightarrow \ |PC| = |PQ| - |CQ| = 5\ m$

$|BP| = |BC| - |PC| = 2\ m$

$\triangle BPE : |BE| = |CF| \ \rightarrow \ \cos BEP = \dfrac{|EP|}{|BE|} = \dfrac{6}{\sqrt{40}} = 0.9487 \ \rightarrow BEP = 18.4349°$

$\triangle APE : |AP| = |AB| + |BP| = 5\ m \ \rightarrow \ |AE| = \sqrt{|AP|^2 + |EP|^2} = \sqrt{61} = 7.8102$

$\rightarrow \cos \widehat{AEP} = \dfrac{|EP|}{|AE|} = \dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{40}} = 0.7882 \ \rightarrow \widehat{AEP} = 39.8056°$

$\triangle PCE : |CE| = \sqrt{|PC|^2 + |EP|^2} = 7..8102\ m$

$\rightarrow \cos \widehat{PEC} = \dfrac{|EC|}{|BE|} = \dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{40}} = 0.7882 \ \rightarrow \widehat{PEC} = 39.8056°$

Le triangle AEC est donc isocèle, bien que cela ne semble pas le cas (illusion d'optique)

<u>Conclusion</u>

$\widehat{AEB} = \widehat{AEP} - \widehat{BEP} = 21.3706°$

$\widehat{BEC} = \widehat{BEP} + \widehat{PEC} = 58.2405°$

$|AE| = |CE| = \sqrt{61} = 7.81102\ m \ \ \rightarrow \dfrac{|AE|}{|CE|} = 1$

$|BE| = \sqrt{40} = 6.3246\ m$

EXTRI122 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Vérifier que, pour tout x, on a l'identité suivante :

$$\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

Utilisons Carnot : $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Le premier membre devient :

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2x\cos\frac{4\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{4\pi}{3}+\cos 2x\cos\frac{4\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\frac{3}{2}$$

EXTRI123 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

$$\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°\sin 90° = \frac{1}{16}$$

On a : $\sin 2a = 2\sin a\cos a \;\Rightarrow\; \sin a = \dfrac{\sin 2a}{2\cos a}$

Légalité devient, en tenant compte que $\sin 90° = 1$ et $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$$\sin 10\sin 50\sin 70 = \frac{1}{2}\frac{\sin 20}{\cos 10}\frac{1}{2}\frac{\sin 100}{\cos 50}\frac{1}{2}\frac{\sin 140}{\cos 70} = \frac{1}{8}$$

Or $\begin{cases} \sin 20 = \cos 70 \\ \sin 100 = \sin 80 = \cos 10 \\ \sin 140 = \sin 40 = \cos 40 \end{cases}$ ce qui démontre l'égalité.

Modifié le 29 juin 2009 (Carmelo DI NOLFO)

EXTRI124 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Résoudre l'équation suivante :

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x \quad \Rightarrow 2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x$

$\Rightarrow 2\cos 4x\left(\cos 2x - \cos 4x\right) = 0$

1) $\cos 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}}$

2) $\cos 2x = \cos 4x \quad \Rightarrow \quad 4x = \pm 2x + 2k\pi$

$\quad a)\ 4x = 2x + 2k\pi \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$

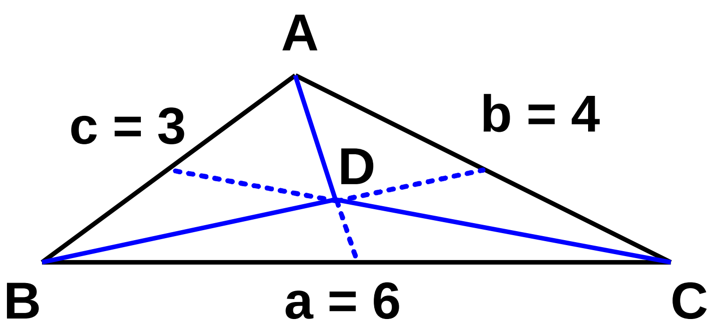
$\quad b)\ 4x = -2x + 2k\pi \rightarrow 6x = 2k\pi \qquad v\,\boxed{x = \dfrac{k\pi}{3}}$

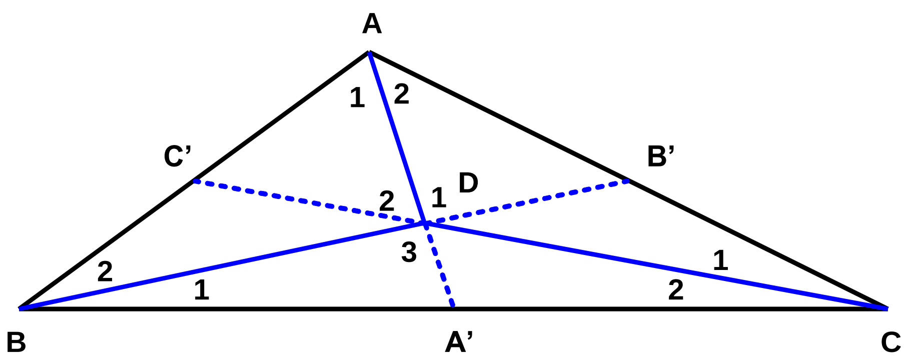
EXTRI125 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Soit un triangle dont les côtés mesurent respectivement a = 6 cm, b =4 cm et c = 3 cm (voir figure)

a) On demande d'abord de calculer les valeurs des trois angles intérieurs du triangle *A*, *B*, et *C*.

b) On divise le triangle en trois sous-triangles dont le sommet est *D*, point d'intersection des médianes. On demande de calculer les aires, les angles et les cotés des trois sous-triangles *ABD*, *BCD* et *ADC* (en utilisant uniquement la trigonométrie)





$$a)\ A=\arccos\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}=\arccos\frac{6^2-4^2-3^2}{-2\times4\times3}=117.2896°$$
$$B=\arccos\frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}=\arccos\frac{4^2-6^2-3^2}{-2\times6\times3}=36.3361°$$
$$C=\arccos\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}=\arccos\frac{3^2-6^2-4^2}{-2\times6\times4}=26.3843°$$

$b)$ D est le barycentre et ce trouve aux deux tiers de chaque médiane.

$$|AA'|^2=|A'B|^2+c^2-2|A'B|.c.\cos\widehat{B}=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(36.3361)=3.5$$
$$\rightarrow|AA'|=1.8708\ cm$$
$$|BB'|^2=a^2+|B'C|^2-2a|B'C|.\cos\widehat{C}=6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos(26.3843)=18.5$$
$$\rightarrow|BB'|=4.3012\ cm$$
$$|CC'|^2=|C'A|^2+b^2-2|C'A|.b.\cos\widehat{A}=1.5^2+4^2-2\times1.5\times4\times\cos(117.2796)=23.75$$
$$\rightarrow|CC'|=4.8734\ cm$$

$$|A'B|^2=|AA'|^2+c^2-2|AA'|c\cos\widehat{A_1}$$
$$\rightarrow\widehat{A_1}=\arccos\frac{|A'B|^2-|AA'|^2-c^2}{-2|AA'|c}=\arccos\frac{3^2-1.8708^2-3^2}{-2\times1.8708\times3}=71.8320°$$
$$|B'C|^2=|BB'|^2+a^2-2|BB'|a\cos\widehat{B_1}$$
$$\rightarrow\widehat{B_1}=\arccos\frac{|B'C|^2-|BB'|^2-a^2}{-2|BB'|a}=\arccos\frac{2^2-4.3012^2-6^2}{-2\times4.3012\times6}=11.9254°$$
$$|AC'|^2=|CC'|^2+b^2-2|CC'|b\cos\widehat{C_1}$$
$$\rightarrow\widehat{C_1}=\arccos\frac{|AC'|^2-|CC'|^2-b^2}{-2|CC'|b}=\arccos\frac{1.5^2-4.8734^2-4^2}{-2\times4.8734\times4}=15.8763°$$

$$\text{Donc}\ \begin{cases}\widehat{A_2}=117.2796-71.8320=45.4476\\ \widehat{B_2}=36.3361-11.9254=24.4107\\ \widehat{C_2}=26.3843-15.8763=10.5081\end{cases}$$

Et donc $\widehat{D_1}=83.7573$, $\widehat{D_2}=118.6761$, $\widehat{D_3}=157.5666$

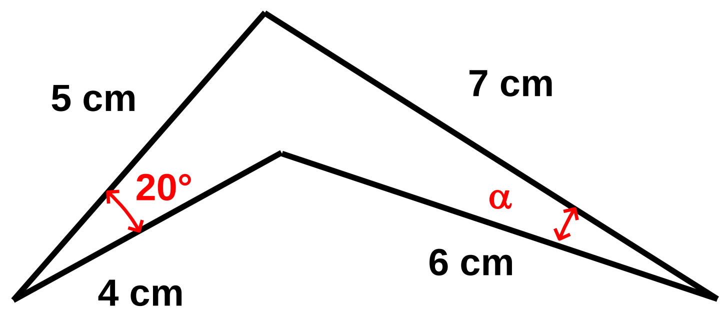
$$|BD|=\frac{c\sin\widehat{A_1}}{\sin\widehat{D_1}}=\frac{3\sin71.8320}{\sin83.7573}=2.8674\ cm$$
$$|AD|=\frac{b\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{D_2}}=\frac{4\sin15.8763}{\sin118.6761}=1.2472\ cm$$
$$|CD|=\frac{a\sin\widehat{B_1}}{\sin\widehat{D_3}}=\frac{6\sin11.9254}{\sin157.5666}=3.2489\ cm$$

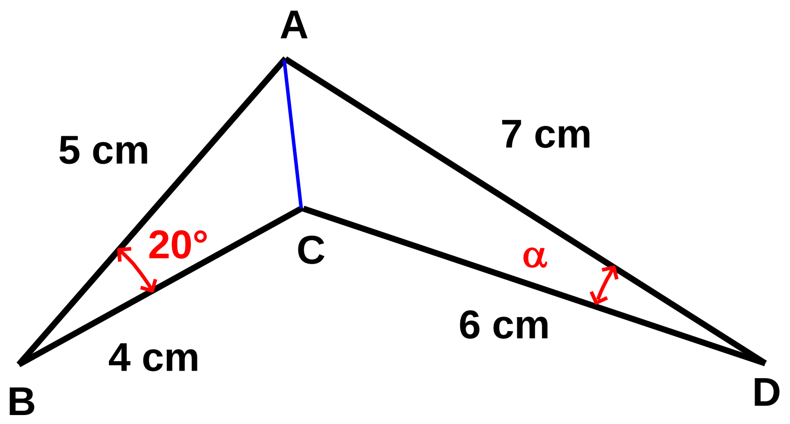
$$S_{\triangle ABD}=\frac{c|AD|\sin\widehat{A_1}}{2}=\frac{3\times1.2472\sin71.8320}{2}=1.7776\ cm^2$$

$$S_{\triangle BCD}=\frac{a|BD|\sin\widehat{B_1}}{2}=\frac{6\times2.8674\sin11.9254}{2}=1.7776\ cm^2$$

EXTRI126 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003.

Pour la figure donnée, calculer l'angle α et l'aire du polygone





Méthode 1

$$a)\ \Delta ABC : |AC|^2 = 5^2 + 4^2 - 2\times 5\times 4\times \cos B$$

$$\Delta ADC : |AC|^2 = 7^2 + 6^2 - 2\times 7\times 6\times \cos \alpha$$

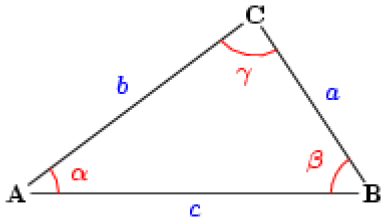
$$\to \alpha = \arccos \frac{5^2 + 4^2 - 2\times 5\times 4\times \cos 20 - 7^2 - 6^2}{-2\times 7\times 6} = 13.7644°$$

$$b)\ S_{polygone} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}4\times 5\times \sin 20 + \frac{1}{2}7\times 6\times \sin 13.7644$$

$$= 8.41674\ cm^2$$

Méthode 2 (Frédéric Baldan)

Rappel : Théorème d'Al-Kashi

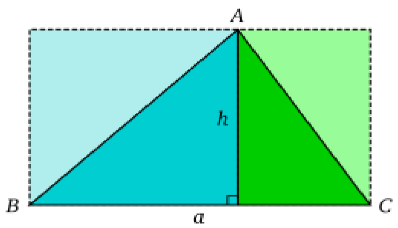


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Par conséquent :

Nous pouvons calculer le coté « a » grâce au triangle de gauche : $a^2 = 5^2 + 4^2 - 2.4.5.\cos(20)$ $a^2 = 41 - 40.\cos(20)$ a = 1.847239878 **Remarque :** le calcul de a n'est pas nécessaire pour trouver α.	Dans le triangle de droite $41 - 40.\cos(20) = 7^2 + 6^2 - 2.7.6.\cos(\alpha)$ $-44 - 40.\cos(20) = -84.\cos(\alpha)$ $\alpha = acros\left(\frac{-44-40.\cos(20)}{-84}\right)$ **α = 13.76442451°**

Rappel : Surface d'un triangle quelconque



On peut aussi utiliser la formule de Héron d'Alexandrie :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ est le *demi-périmètre* du triangle.

Par conséquent :

Dans le triangle de gauche : $p = \frac{1}{2}(5+4+1.847239878)$ $p = 5.423619939$ $S = \sqrt{p.(p-5)(p-4)(p-1.847239878)}$ $S = 3.420201433$	Dans le triangle de droite : $p = \frac{1}{2}(6+7+1.847239878)$ $p = 7.423619939$ $S = \sqrt{p.(p-6)(p-7)(p-1.847239878)}$ $S = 4.996538927$

S=8.41674036

EXTRI127 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003

EPB, ULB, Bruxelles juillet 2004.

On suppose que l'on connaît la valeur de $\cos 2\,a$. Posons $\cos 2a = m$.
On demande alors de calculer la valeur de l'expression :

$$E = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$$

En fonction de lavaleur de m.
Liège : Vérifier le résultat obtenu pour $m = 1/3$
Bruxelles :Vérifier le résultat pour $m = ½$.

$a)$ $E = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right)$$

Le premier facteur vaut 1. Continuons en uilisant Carnot : $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$$E = \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2$$

$$= \left(1-\cos^2\alpha\right)\left(-\cos 2\alpha\right) + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2$$

$$= -\left(1-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)\cos 2\alpha + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2$$

$$= -\left(1-\frac{1+m}{2}\right)m + \left(\frac{1+m}{2}\right)^2 = \frac{3m^2+1}{4}$$

$b)$ <u>Liège</u> Soit $m = \cos 2\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2\alpha = \pm 70.5288° \to \alpha = 35.2644°$

$$E = \sin^6 35.2644° + \cos^6 35.2644° = 0.33333 \quad \text{et} \quad E = \frac{3m^2+1}{4} = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}{4} = \frac{1}{3} = 0.33333$$

<u>Bruxelles</u> Soit $m = \cos 2\alpha = \dfrac{1}{2} \to 2\alpha = \pm 60° \Rightarrow \alpha = 30°$

$$E = \sin^6 30° + \cos^6 30° = 0.4375 \quad \text{et} \quad E = \frac{3m^2+1}{4} = \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)^2+1}{4} = 0.4375$$

EXTRI128 – FACSA, ULiège, Liège,septembre 2003.

Trouver toutes les solutions x qui satisfont à l'équation suivante.

$$\cos 9x - 2\cos 6x = 2$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique

$\cos 9x - 2\cos 6x = 2 \Rightarrow \cos(6x+3x) - 2\cos^2 3x + 2\sin^2 3x = 2\left(\sin^2 3x + \cos^2 3x\right)$

$\Rightarrow \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x - 4\cos^2 3x = 0$

$\Rightarrow \left(2\cos^2 3x - 1\right)\cos 3x - 2\sin^2 3x \cos 3x - 4\cos^2 3x = 0$

1) $\cos 3x = 0 \;\Rightarrow\; 3x = \pm 90° + k180° \Rightarrow x = 30° + k60°$

2) $2\cos^2 3x - 1 - 2\left(1 - \cos^2 3x\right) - 4\cos 3x = 0$

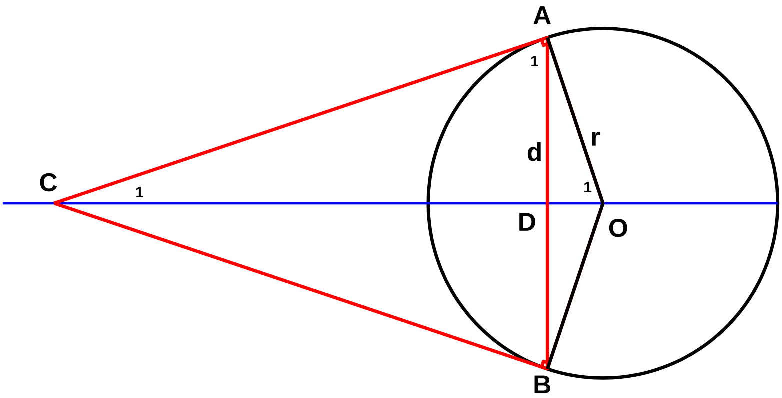
$$4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \cos 3x = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{A rejeter} \\ -\dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x = \pm 120° + k360° \;\Rightarrow\; x = \pm 40° + k120°$

EXTRI129 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Soit A et B deux points distincts $\left(\text{non diamétralement opposés}\right)$ d'un cercle de rayon r et C le point d'intersection des tangentes à ce cercle aux points A et B.

Soit $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2d$. Calculer les angles et l'aire du triangle ABC en fonction de d et r.



$$A_1 = O_1 = \arcsin\frac{d}{r} \quad \Rightarrow \quad C = 2C_1 = \pi - 2\arcsin\frac{d}{r}$$

$$|OD| = r\cos O_1$$

Les triangles CAD et AOD sont semblables

$$|CD| = \frac{d^2}{|OD|} = \frac{d^2}{r\cos O_1} = \frac{d^2}{r\cos\arcsin\frac{d}{r}} = \frac{d^2}{r\frac{\sqrt{r^2-d^2}}{r}} = \frac{d^2}{\sqrt{r^2-d^2}}$$

Et donc l'aire du triangle est

$$A_{CAB} = \frac{d^3}{\sqrt{r^2-d^2}} = \frac{d^2}{\sqrt{\frac{r^2}{d^2}-1}}$$
