

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Trigonométrie**

# **Calcul numérique**

**TRI 16**

**EXTRI160-EXTRI169**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Aout 05

## EXTRI160 – Liège, juillet 2005

Montrer que si les angles  $x$  et  $y$  vérifient

$$\tan^2 x = 2 \tan^2 y + 1$$

alors on a l'égalité

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0$$

---

$$\begin{aligned}\tan^2 x = 2 \tan^2 y + 1 &\rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 \\ \rightarrow \sin^2 x \cos^2 y &= 2 \sin^2 y \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y \\ \rightarrow \sin^2 x \cos^2 y &= \cos^2 x (2 \sin^2 y + \cos^2 y) \\ \rightarrow \sin^2 x \cos^2 y &= \cos^2 x (1 + \sin^2 y) \\ \rightarrow \sin^2 x (1 - \sin^2 y) &= (1 - \sin^2 x) (1 + \sin^2 y) \\ \rightarrow \sin^2 x &= \sin^2 y + 1 - \sin^2 x \\ \rightarrow \sin^2 y + 1 - 2 \sin^2 x &= 0 \\ \rightarrow \sin^2 y + \cos 2x &= 0\end{aligned}$$

---

7 août 2005

## EXTRI161 – Mons, juillet 2005

Démontrer que la relation suivante est vérifiée

$$\cos 2x = \frac{1}{1 + \tan x \tan 2x}$$

---

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \tan x \tan 2x} &= \frac{1}{1 + \tan x \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = -\cos 2x = \cos 2x \end{aligned}$$

---

15 août 2005

## EXTRI162 – Mons, juillet 2005

Résoudre l'équation trigonométrique suivante

$$\sin 3x + \sin 4x - 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

---

$$\sin 3x + \sin 4x - 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \sin 3x + \sin 4x - \sin x = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos 2x \sin x + 2 \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$1) \cos 2x = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Il reste : } \sin x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin x(1 + 2 \cos x) = 0$$

$$2) \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

$$3) 1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

---

15 août 2005

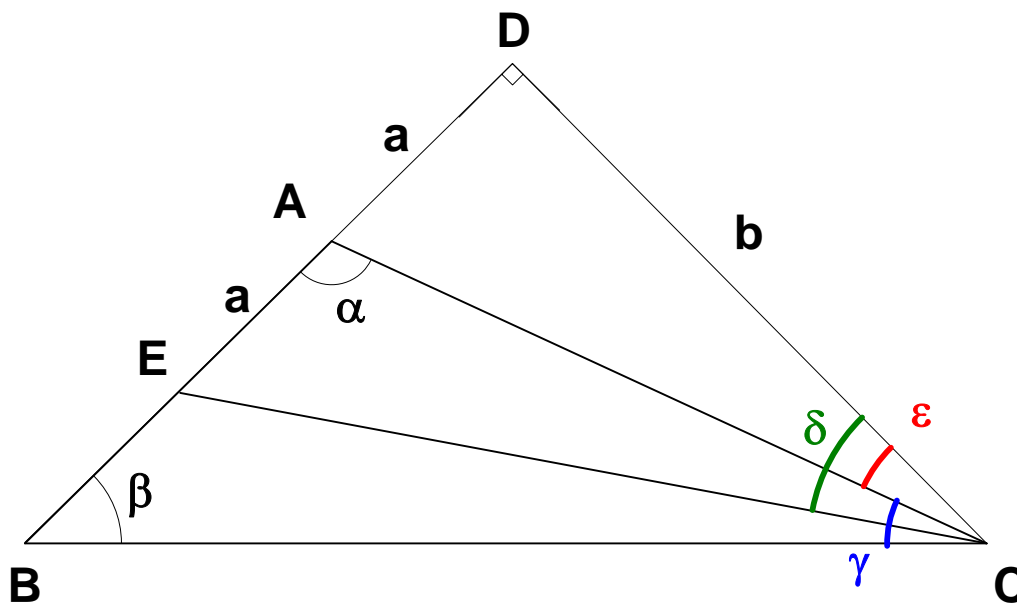
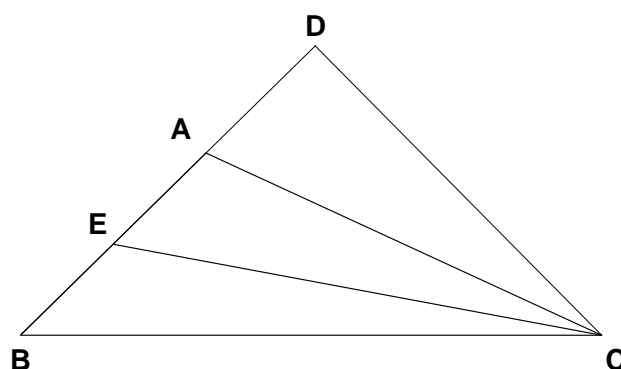
## EXTRI163 – ERM, 2004

Dans le triangle  $ABC$ , on a angle  $A = \alpha > 90^\circ$ . La hauteur issue de  $C$  coupe le prolongement du côté  $[AB]$  en  $D$  et la bissectrice de l'angle  $C$  coupe  $[AB]$  en  $E$  (voir figure). De plus, on pose angle  $B = \beta$ .

On demande :

- Exprimer l'angle  $ECD$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$
- De démontrer que si  $|AD| = |AE|$ , on a

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$$



Les angles et les longueurs sont définis à la figure 2. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \delta + \frac{\gamma}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \beta \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi \rightarrow \gamma = \pi - \beta - \alpha \quad (1) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (2)$$

b) Dans le triangle rectangle  $ADC \rightarrow \tan \varepsilon = \frac{a}{b}$

or  $\varepsilon = \delta - \frac{\gamma}{2} \rightarrow$  avec (1) et (2) :  $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\pi}{2}$

Donc  $\tan \varepsilon = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{a}{b} \quad (3)$

Dans le triangle rectangle  $EDC \rightarrow \tan \delta = \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{2a}{b} \quad (4)$

$$\text{De (3) et (4)} \rightarrow \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{2}{\tan \alpha} \rightarrow \frac{\tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\beta}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} = -\frac{2}{\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$\rightarrow \left( \tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\beta}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} = -\left( 1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = -1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1}$$

## EXTRI164 – ERM, 2004

Dans le triangle  $ABC$ , on donne  $A = \frac{\pi}{3}$  et le rapport  $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$  où  $b = |AC|$  et  $c = |AB|$ .

On demande de calculer la tangente de l'angle  $\frac{B-C}{2}$  puis les angles  $B$  et  $C$ .

---

Comme on demande uniquement les angles, posons  $c = 1 \rightarrow b = 2\sqrt{3}$

a) Observons que :  $A + B + C = \pi \rightarrow B - C = \pi - A - 2C = \frac{2\pi}{3} - 2C \rightarrow \frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{3} - C$

$$\rightarrow \tan \frac{B-C}{2} = \tan \left( \frac{\pi}{3} - C \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan C}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan C} = \frac{\sqrt{3} - \tan C}{1 + \sqrt{3} \tan C} \quad (1)$$

b) Calculons  $C$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (2 + \sqrt{3})^2 + 1 - (2 + \sqrt{3}) = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \rightarrow 1 = 6 + 3\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2(2 + \sqrt{3})\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \cos \widehat{C}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \cos \widehat{C} &= \frac{12 + 7\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{(12 + 7\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{(2\sqrt{3} + 3)\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}}{2(6 + 3\sqrt{3})} \\ &= \frac{(2\sqrt{3} + 3)(6 - 3\sqrt{3})\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}}{2(36 - 27)} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{36} + \frac{9\sqrt{3}}{36}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Et par conséquent : } \widehat{C} = 15^\circ = \frac{\pi}{12} \rightarrow \widehat{B} = 105^\circ = \frac{7\pi}{12}$$

Revenons à la formule (1):

$$\cos \widehat{C} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \rightarrow \sin^2 \widehat{C} = 1 - \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3}) \rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \tan \widehat{C} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Finalement, (1)} \rightarrow \tan \frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{-2 + 2\sqrt{3}} = 1$$

## Solution proposée par Hugues Vermeiren

On a immédiatement  $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 120^\circ$

Si on trouve une autre équation liant  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$ , on disposera d'un système  $2 \times 2$  dont on tirera  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$ .

De  $b + c = 3 + \sqrt{3}$ , on tire, en utilisant la loi des sinus

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} + a \cdot \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}} &= 3 + \sqrt{3} \\ \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} &= \frac{1}{a} \sin \widehat{A} (3 + \sqrt{3}) \\ 2 \sin \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} &= \frac{3 + \sqrt{3}}{a} \cdot 2 \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{A}}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Comme  $\sin \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \sin \frac{\pi - \widehat{A}}{2} = \cos \frac{\widehat{A}}{2}$ , (1) s'écrit :

$$\cos \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{a} \cdot \sin \frac{\widehat{A}}{2} \quad (2)$$

$\sin \frac{\widehat{A}}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  et par le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = 1 + (2 + \sqrt{3})^2 - 2(2 + \sqrt{3}) \cos 30^\circ = 6 + 3\sqrt{3}.$$

$\sin \frac{\widehat{A}}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  et par le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = 1 + (2 + \sqrt{3})^2 - 2(2 + \sqrt{3}) \cos 30^\circ = 6 + 3\sqrt{3}.$$

Et donc (2) devient :  $\cos \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6 + \sqrt{3}}}$

On obtient  $\tan \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$  grâce à la relation  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .

$$\tan^2 \left( \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \right) = 4 \cdot \frac{6 + \sqrt{3}}{(3 + \sqrt{3})^2} - 1 = \text{Petit calculs} = 1$$

L'angle  $\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$  est donc égal à  $45^\circ$  ou  $135^\circ$ .

Le système  $\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 120 \\ (\widehat{B} - \widehat{C})/2 = 45 \end{cases}$  conduit à  $\widehat{B} = 105^\circ$  et  $\widehat{C} = 15^\circ$ .

Le système  $\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 120 \\ (\widehat{B} - \widehat{C})/2 = 135 \end{cases}$  fournit  $\widehat{B} = 195^\circ$ , un peu grand pour un triangle!

Remarque : On aurait pu calculer les angles  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$  (plus ou moins) directement puisqu'on connaît les trois côtés mais la consigne de l'énoncé est de d'abord calculer  $\tan \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$ .



## EXTRI165 – Pol, ERM, Bruxelles 2003.

1) Démontrer que

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin x$$

---

### Solution proposée par Hugues Vermeiren

a) Puisque  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \rightarrow \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^2 \frac{\pi}{12} + 2 \tan \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12} - 1 = 0$$
$$\rightarrow \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin x$

CE :  $x \neq k\pi$

$$\rightarrow \sqrt{3} = -\cos x \sin x + \sqrt{3} \sin^2 x = -\cos x \sin x + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos^2 x$$

$$\rightarrow \cos^2 x + \cos x \sin x = 0$$

1)  $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi$  A rejeter

2)  $\cos x + \sin x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

1. Puisque  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ ,

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}} \quad (E_1)$$

En posant,  $x = \tan \frac{\pi}{12}$ ,  $(E_1)$  s'écrit:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{1-x^2} \iff \sqrt{3} \cdot (1-x^2) = 6x \iff x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Comme  $\tan \frac{\pi}{12} > 0$ ,  $\boxed{\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}}$ .

2. Comme  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ , on obtient en multipliant les deux membres par  $\sin x$  (si  $x \neq k\pi$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin x &\iff \cos x \cdot \sin x + \sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{3} \\ &\iff \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sqrt{3} \\ &\iff \sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- On reconnaît l'équation "linéaire" :  $A \cdot \sin X + B \cdot \cos X = C$  qui se résout habituellement en posant  $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ ,  $A \neq 0$ .
- En passant, on a utilisé la formule de Carnot :  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{3} &\iff \sin 2x - \tan \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \\ &\iff \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\iff \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \end{aligned}$$

Les solutions principales sont donc :  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

Vérifions, par exemple que  $x = \frac{\pi}{3}$  est bien une solution:

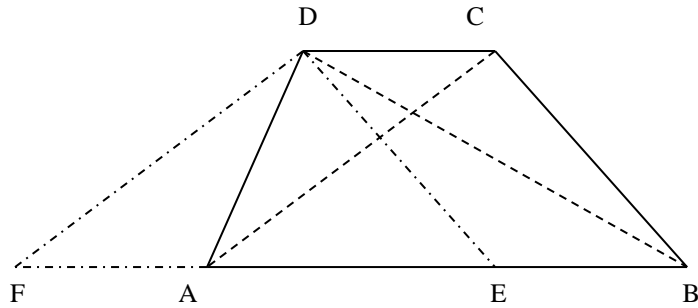
$$\text{Si } x = \frac{\pi}{3}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} : \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \stackrel{\text{ok!}}{=} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

15 août 2005. Modifié le 12 octobre 2015 (Hugues Vermeiren)

## EXTRI166 – LOUVAIN, septembre 2005

Dans le trapèze  $ABCD$ , les bases  $AB = a$  et  $CD = b$  ; les côtés parallèles sont  $BC = c$  et  $DA = d$ , les diagonales sont  $AC = m$  et  $BD = n$

- 1) Connaissant les quatre côtés, calculer les angles.
- 2) Connaissant les bases et les diagonales, calculer les angles et les côtés non parallèles.



a) Soit  $DE$  parallèle à  $CB$ .  $\rightarrow AED = ABC = B$

Nous avons dans le triangle  $AED$

$$\begin{cases} c^2 = d^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)d \cos A \\ d^2 = (a-b)^2 + c^2 - 2(a-b)c \cos B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)d} & (1) \\ \cos B = \frac{c^2 + (a-b)^2 - d^2}{2(a-b)c} & (2) \end{cases}$$

b) Nous avons aussi

$$\begin{cases} \triangle DAC \rightarrow m^2 = d^2 + b^2 - 2bd \cos \widehat{D} & (3) \\ \triangle ABC \rightarrow m^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \widehat{B} & (4) \\ \triangle ABD \rightarrow n^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cos \widehat{A} & (5) \\ \triangle BCD \rightarrow n^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{C} & (6) \end{cases}$$

Notons que  $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{D}$  et  $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$  car ce sont des angles supplémentaires

Nous pouvons donc éliminer  $\cos \widehat{A}$  et  $\cos \widehat{D}$  entre (3) et (5)

$$\rightarrow \frac{m^2 - d^2 - b^2}{2bd} = \frac{n^2 - d^2 - a^2}{-2ad} \rightarrow a(m^2 - d^2 - b^2) = -b(n^2 - d^2 - a^2)$$

$$\rightarrow (a+b)d^2 = am^2 + bn^2 - ab(a+b) \rightarrow d^2 = \frac{am^2 + bn^2}{a+b} - ab \quad (7)$$

En éliminant  $\cos \widehat{B}$  et  $\cos \widehat{C}$  entre (4) et (6), nous obtenons de la même façon

$$c^2 = \frac{bm^2 + an^2}{a+b} - ab \quad (8)$$

Soit (3)-(5)  $\rightarrow m^2 - n^2 = b^2 - a^2 + 2d(a+b)\cos A$

$$\rightarrow \cos A = \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2d(a+b)}$$

Avec (7), et en rentrant le  $(a+b)$  dans la racine

$$\begin{aligned}\rightarrow \cos A &= \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)(am^2 + bn^2) - (a+b)^2 ab}} \\ &= \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)[a(m^2 - b^2) + b(n^2 - a^2)]}}\end{aligned}$$

On trouve une formule similaire pour  $\cos \widehat{B}$

$$\cos \widehat{B} = \frac{n^2 - m^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)[b(m^2 - a^2) + a(n^2 - b^2)]}}$$

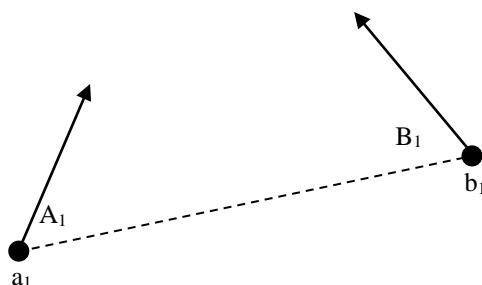
$\widehat{C}$  est le supplément de  $\widehat{B}$ , et  $\widehat{D}$  celui de  $\widehat{A}$

---

15 novembre 2005

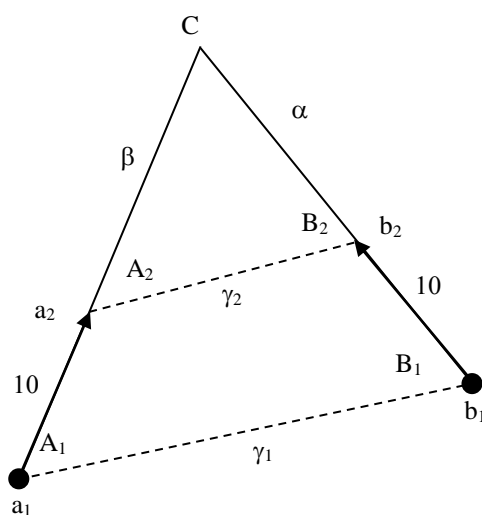
## EXTRI167 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005

Deux bateaux  $a$  et  $b$  naviguent à la même vitesse, mais dans deux directions différentes. Ils s'observent l'un l'autre et mesurent chacun l'angle de sa propre trajectoire et la direction sous laquelle il observe l'autre bateau : au temps  $t_1$  par exemple, les bateaux se trouvent en  $a_1$  et  $b_1$  et les angles  $A_1$  et  $B_1$  mesurés sont indiqués dans le dessin suivant.



Au temps  $t_2$  les bateaux ont parcouru chacun 10 km dans leurs directions initiales et ils se trouvent en  $a_2$  et  $b_2$  et mesurent de la même façon deux nouveaux angles  $A_2$  et  $B_2$ .

1. Démontrez que les angles satisfont  $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$
2. Faites un croquis de la situation pour expliquer ce résultat
3. Trouvez comment calculer les distances  $a_1b_1$  et  $a_2b_2$  à partir des angles  $A_1, B_1, A_2, B_2$
4. Faites le calcul pour des angles  $A_1 = 80^\circ, B_1 = 70^\circ, A_2 = 84^\circ, B_2 = 65^\circ$



1) Nous avons immédiatement :  $A_1 + B_1 + C = \pi = A_2 + B_2 + C \rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2$

2) Appliquons les formules des sinus en tenant compte que

$$\sin C = \sin(\pi - C) = \sin(A_1 + B_1) = \sin(A_2 + B_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta a_2 c b_2 \rightarrow \frac{\sin(A_2 + B_2)}{\gamma_2} = \frac{\sin A_2}{\alpha} = \frac{\sin B_2}{\beta} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \gamma_2 \frac{\sin A_2}{\sin(A_2 + B_2)} \quad (1) \\ \beta = \gamma_2 \frac{\sin B_2}{\sin(A_2 + B_2)} \quad (2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Delta a_1 c b_1 \rightarrow \frac{\sin(A_1 + B_1)}{\gamma_1} = \frac{\sin A_1}{\alpha + 10} = \frac{\sin B_1}{\beta + 10} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + 10) \sin(A_1 + B_1) = \gamma_1 \sin A_1 \quad (3) \\ (\beta + 10) \sin(A_1 + B_1) = \gamma_1 \sin B_1 \quad (4) \end{array} \right.$$

Utilisons (1) et (2) pour remplacer dans (3) et (4)

$$\left( \gamma_2 \frac{\sin A_2}{\sin(A_2 + B_2)} + 10 \right) \sin(A_1 + B_1) = \gamma_1 \sin A_1 \quad (5)$$

$$\left( \gamma_2 \frac{\sin B_2}{\sin(A_2 + B_2)} + 10 \right) \sin(A_1 + B_1) = \gamma_1 \sin B_1 \quad (6)$$

Divisons (5) et (6) membre à membre

$$\rightarrow \frac{\gamma_2 \sin A_2 + 10 \sin(A_2 + B_2)}{\gamma_2 \sin B_2 + 10 \sin(A_2 + B_2)} = \frac{\sin A_1}{\sin B_1}$$

qui est une équation en  $\gamma_2$  et qu'il est facile de résoudre

$$\rightarrow \gamma_2 \sin A_2 + 10 \sin(A_2 + B_2) = \gamma_2 \sin B_2 \frac{\sin A_1}{\sin B_1} + 10 \sin(A_2 + B_2) \frac{\sin A_1}{\sin B_1}$$

$$\rightarrow \left( \sin A_2 - \sin B_2 \frac{\sin A_1}{\sin B_1} \right) \gamma_2 = 10 \sin(A_2 + B_2) \left( \frac{\sin A_1}{\sin B_1} - 1 \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma_2 = \frac{10 \sin(A_2 + B_2) (\sin A_1 - \sin B_1)}{\sin A_2 \sin B_1 - \sin B_2 \sin A_1}}$$

Pour  $\gamma_1$ , repartons de (5) et (6). Eliminons  $\gamma_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 \frac{\sin A_2}{\sin(A_2 + B_2)} = \gamma_1 \frac{\sin A_1}{\sin(A_1 + B_1)} - 10 \quad (7) \\ \gamma_2 \frac{\sin B_2}{\sin(A_2 + B_2)} = \gamma_1 \frac{\sin B_1}{\sin(A_1 + B_1)} - 10 \quad (8) \end{array} \right.$$

Divisons (7) et (8) membre à membre

$$\rightarrow \frac{\gamma_1 \frac{\sin A_1}{\sin(A_1 + B_1)} - 10}{\gamma_1 \frac{\sin B_1}{\sin(A_1 + B_1)} - 10} = \frac{\sin A_2}{\sin B_2}$$

qui est une équation en  $\gamma_1$  et qu'il est facile de résoudre

$$\rightarrow \left( \frac{\sin A_2}{\sin B_2} \frac{\sin B_1}{\sin(A_1 + B_1)} - \frac{\sin A_1}{\sin(A_1 + B_1)} \right) \gamma_1 = 10 \left( \frac{\sin A_2}{\sin B_2} - 1 \right)$$

$$\rightarrow \gamma_1 = \frac{10 \sin(A_1 + B_1) (\sin A_2 - \sin B_2)}{\sin A_2 \sin B_1 - \sin B_2 \sin A_1}$$

Appliquons ces formules :

$$\gamma_1 = \frac{10 \sin(80 + 70) (\sin 85 - \sin 65)}{\sin 85 \sin 70 - \sin 80 \sin 65} = 10.31 \text{ km}$$

$$\gamma_2 = \frac{10 \sin(85 + 65) (\sin 80 - \sin 70)}{\sin 85 \sin 70 - \sin 80 \sin 65} = 5.18 \text{ km}$$

## EXTRI168 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Le plus grand angle d'un triangle est supérieur ou égal à  $60^\circ$

Toujours vrai :       Toujours faux :

Vrai si :

2) Pour  $0 < x < \pi$ ,  $\cos 2x + \sin 2x + 1 > 0$

Toujours vrai :       Toujours faux :

Vrai si :

3) Dans un triangle  $ABC$ , on a  $\tan^2 \frac{A}{2} = \tan^2 \frac{B}{2}$

Toujours vrai :       Toujours faux :

Vrai si :

4) Un triangle est isocèle si une de ses bissectrices est également une médiane.

Toujours vrai :       Toujours faux :

Vrai si :



a) Toujours vrai.

En effet, soit  $A$  le plus grand angle. Donc,  $\begin{cases} A \geq B \\ A \geq C \end{cases}$

$$\rightarrow A + B + C = 180^\circ \rightarrow 3A \geq 180^\circ \rightarrow A \geq 60$$

$$\text{b) } \cos 2x + \sin 2x + 1 > 0 \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x > 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x > 0 \rightarrow \cos x (\cos x + \sin x) > 0$$

Tableau de signe

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$			
$\cos x$	1	+	0	-	-	-	0
$\cos x + \sin x$	1	+	1	+	0	-	-1
$\cos x (\cos x + \sin x)$	+	+	0	-	0	+	0

Conclusion :  $\cos 2x + \sin 2x + 1 > 0$  si  $\begin{cases} 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$

$$\text{c) } \tan^2 \frac{A}{2} = \tan^2 \frac{B}{2}$$

• 1)  $\tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \rightarrow A = B$  et le triangle est isocèle

• 2)  $\tan \frac{A}{2} = -\tan \frac{B}{2} = \tan \left( \pi - \frac{B}{2} \right) \rightarrow A + B = 2\pi$  et le triangle est plat

$$\rightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < A < \frac{5\pi}{12} + k\pi \rightarrow \text{La relation est fautive pour } \frac{5\pi}{12} < A < \frac{\pi}{2}$$

d) Toujours vrai

En effet, soit  $M$  le milieu de la base  $BC$  d'un triangle.  $M$  est en même temps équidistant des côtés  $AB$  et  $AC$  (car situé sur la bissectrice) et des sommets  $B$  et  $C$  (car situé sur la médiane). on en déduit que le triangle est isocèle

## EXTRI169 – Liège, septembre 2005.

Sans l'aide de la calculatrice, calculer la valeur numérique de  $E$  :

$$E = \cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{2\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10} - \sin^2 \frac{4\pi}{10}$$

---

### Méthode 1

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{2\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10} - \sin^2 \frac{4\pi}{10} \\ &= \left( \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{10} \right) + \left( \cos \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{4\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{4\pi}{10} \right) \end{aligned}$$

Regardons cela de plus près :

$$\text{1er facteur, 1er terme : } \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10}$$

$$\text{2ème facteur, 1er terme : } \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10} - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10}$$

$$\text{1er facteur, 2ème terme : } \cos \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{10} \right) = \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\text{2ème facteur, 2ème terme : } \cos \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{10} \right) = \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} E &= \left( \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10} \right) + \left( \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10} \right) \\ &= \left( \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10} \right) = 0 \end{aligned}$$

## Méthode 2

Solution proposée par Thibaud Derochette

$$\frac{\pi}{10} \text{ et } \frac{4\pi}{10} \text{ sont complémentaires, donc : } \sin \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10}$$

De même:

$$\frac{3\pi}{10} \text{ et } \frac{2\pi}{10} \text{ sont complémentaires, donc : } \cos \frac{3\pi}{10} = \sin \frac{2\pi}{10}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{2\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10} - \sin^2 \frac{4\pi}{10} \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{10} - \cos^2 \frac{3\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10} - \cos^2 \frac{\pi}{10} \\ &= 0 \end{aligned}$$

---

Le 10 décembre 2005. Modifié le 3 juillet 2006 (Thibaud Derochette)