

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 17

EXTRI170-EXTRI179

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Dec 05

EXTRI170 – Liège, septembre 2005.

Résoudre l'équation suivante :

$$\tan^3 x - 3 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Posons : $\tan x = y$. L'équation devient

$$y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0 \rightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 6y^2 - 6y = 0$$

$$\rightarrow (y+1)^3 - 6y(y+1) = 0 \rightarrow (y+1)(y^2 + 2y + 1 - 6y) = 0 \rightarrow (y+1)(y^2 - 4y + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{3} \rightarrow \tan x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = 1.31 + k\pi \\ y = 2 - \sqrt{3} \rightarrow \tan x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = 0.26 + k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique

EXTRI171 – Liège, septembre 2005.

Soit un système bielle – manivelle schématisé à la figure 1. On demande de

- Calculer l'angle α en fonction de l'angle θ , les paramètres r , l et e étant connus.
- En déduire les conditions d'existence de l'angle α en fonction des valeurs des paramètres r , l et e
- Calculer la valeur numérique de l'angle α pour $\theta = 30^\circ$, $r = 1$ cm, $l = 5$ cm et $e = 0.1$ cm
- En déduire la valeur correspondante de la position x du point C.

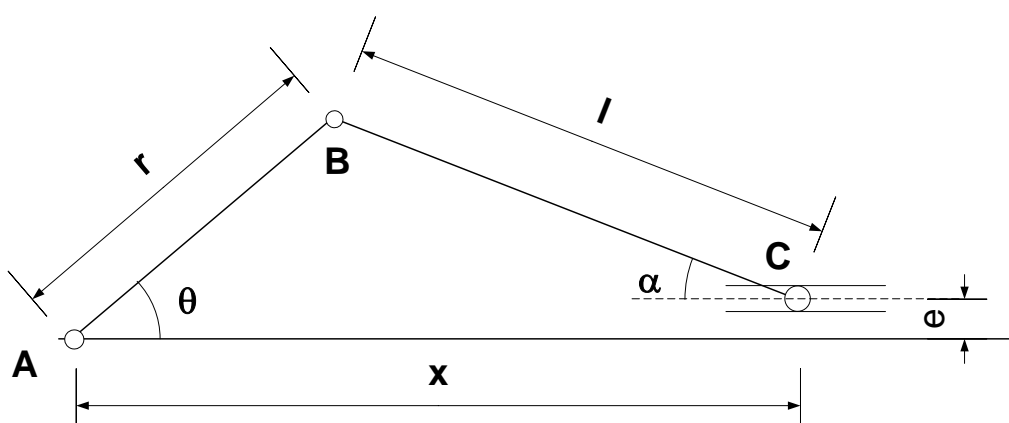


Figure 1

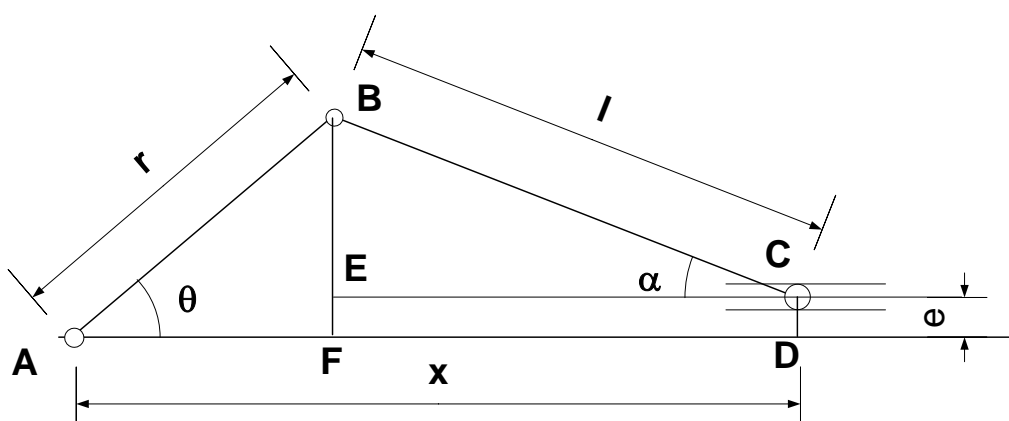


Figure 2

Voir figure 2

$$\text{a) } |BF| = |BE| + |EF| \rightarrow r \sin \theta = l \sin \alpha + e \rightarrow \sin \alpha = \frac{r \sin \theta - e}{l}$$

b) Il faut $\sin \alpha \leq 1 \rightarrow$ et $\sin \theta$ est maximal pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

On en déduit la condition : $\frac{r-e}{l} \leq 1 \rightarrow r \leq l+e$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{1 \times \sin 30 - 0.1}{5} = 0.08 \rightarrow \alpha = 4.58^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x &= |AF| + |FD| = r \cos \theta + l \cos \alpha = r \cos \theta + l \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \theta - e}{l}\right)^2} \\ &= r \cos \theta + \sqrt{l^2 - (r \sin \theta - e)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne ici : } x = 1 \times \cos 30 + \sqrt{5^2 - (1 \times \sin 30 - 0.1)^2} = 5.85 \text{ cm}$$

27 Nov 05

EXTRI172 – Bruxelles, juillet 2005.

Calculer $\sin 2x$ sachant que

$$\sin x - \cos x = 0,2$$

Elevons l'équation au carré :

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 = 0.2^2$$

$$\rightarrow 1 - \sin 2x = 0.2^2 \rightarrow \sin 2x = 0.96$$

Vérification

Résolvons l'équation de départ : $\sin x - \cos x = 0.2$

$$\rightarrow \tan \varphi = -1 \rightarrow \varphi = -45^\circ \rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin(x - 45) = 0.2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 45 = 8.13 + 2k180 \rightarrow x = 53.13 + 2k180 \\ x - 45 = 180 - 8.13 + 2k180 \rightarrow x = 216.87 + 2k180 \end{cases}$$

$$\text{On vérifie : } \sin(2 \times 53.13) = \sin(2 \times 216.87) = 0.96$$

15 décembre 05

EXTRI173 – Bruxelles, juillet 2005.

Calculer, en justifiant chaque étape

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

Prenons la tangente de l'expression :

$$\begin{aligned} \tan \left(\left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) + \arctan \frac{1}{8} \right) &= \frac{\tan \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8} \tan \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right)} \\ &= \frac{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}} = \frac{8 \frac{\frac{7}{10}}{9} + 1}{8 - \frac{7}{9}} = \frac{\frac{8 \times 7}{9} + 1}{8 - \frac{7}{9}} = \frac{8 \times 7 + 9}{8 \times 9 - 7} = \frac{65}{65} = 1 \end{aligned}$$

Et par conséquent, l'expression vaut $\frac{\pi}{4}$

15 décembre 05

EXTRI174 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre l'équation :

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \tan^2 2x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

CE

$$1) 1 + \sin x \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2) \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \rightarrow \cos 2x \neq 0 \rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \tan^2 2x \rightarrow \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}$$

$$\rightarrow (1 - \sin x) \cos^2 2x = (1 + \sin x) \sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos^2 2x - \sin x \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x \sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin x \cos^2 2x + \sin x \sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos 4x = \sin x (\cos^2 2x + \sin^2 2x)$$

$$\rightarrow \cos 4x = \sin x$$

$$\rightarrow \cos 4x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ 4x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

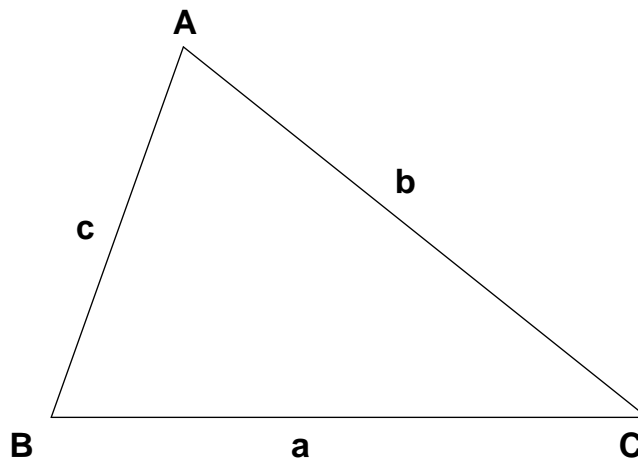
15 décembre 05

EXTRI175 – Bruxelles, septembre 2005.

Soient

- le triangle de sommets A, B et C
- M le milieu du segment BC
- les angles $\theta = AMB$; $\beta = BAM$ et $\gamma = CAM$

Calculer $\cotg \theta$ $\cotg \beta$ et $\cotg \gamma$ en fonction de $\cotg A$; $\cotg B$ et $\cotg C$.



Commençons par établir une formule générale qui nous servira par après.

Soit un triangle ABC quelconque

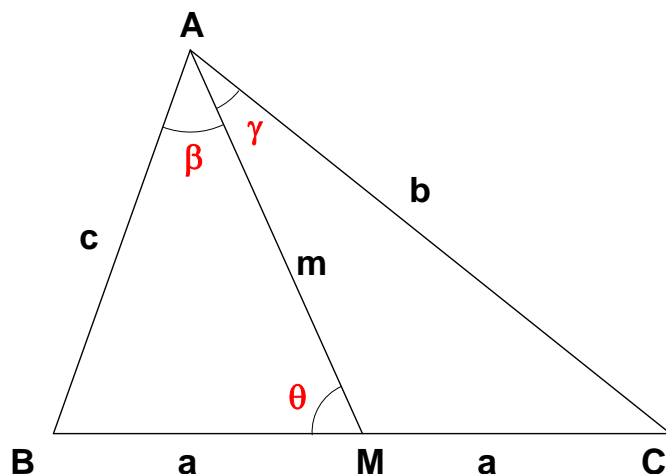
$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow \frac{\cos A}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{1}{2bc} \quad (1) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \rightarrow \frac{\cos C}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{2ab} \quad (2) \\ \sin C = \frac{c}{a} \sin A \quad (3) \end{array} \right.$$

Divisons (2) par (3) $\rightarrow \frac{\cot C}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{2bc \sin A}$

Remplaçons avec (1) $\rightarrow \frac{\cot C}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{\cot A}{b^2 + c^2 - a^2}$

Et par symétrie, on peut écrire :

$$\frac{\cot A}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\cot B}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\cot C}{a^2 + b^2 - c^2} \quad (4)$$



Appliquons la formule (4) à notre cas particulier :

$$\Delta AMB \rightarrow \frac{\cot \theta}{a^2 + m^2 - c^2} = \frac{\cot B}{a^2 + b^2 - m^2} \quad (5)$$

Grâce au théorème de la médiane (voir EXGSP044), on a : $c^2 + b^2 = 2(m^2 + a^2)$

$$(5) \text{ devient } \frac{\cot \theta}{\frac{c^2 + b^2}{2} - c^2} = \frac{\cot B}{a^2 + b^2 - \frac{c^2 + b^2}{2} + a^2}$$

$$\rightarrow \frac{\cot \theta}{b^2 - c^2} = \frac{\cot B}{4a^2 + c^2 - b^2} \rightarrow (c^2 + b^2) \cot \theta + a^2 \cot \theta = (b^2 - c^2) \cot B$$

$$\rightarrow \frac{\cot \theta}{\cot \theta + \cot B} = \frac{b^2 - c^2}{4a^2} \quad (6)$$

$$\text{Considérons maintenant } ABC \rightarrow \frac{\cot B}{4a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\cot C}{4a^2 + b^2 - c^2}$$

$$\rightarrow 4a^2 \cot B + (b^2 - c^2) \cot B = 4a^2 \cot C + (c^2 - b^2) \cot C$$

$$\rightarrow \frac{\cot C - \cot B}{\cot B + \cot C} = \frac{b^2 - c^2}{4a^2} \quad (7)$$

$$\text{De (6) et (7)} \rightarrow \frac{\cot \theta}{\cot \theta + \cot B} = \frac{\cot C - \cot B}{\cot B + \cot C}$$

$$\rightarrow \cot \theta = \frac{\cot C - \cot B}{\cot B + \cot C} (\cot \theta + \cot B)$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{\cot C - \cot B}{\cot B + \cot C}\right) \cot \theta = \frac{\cot C - \cot B}{\cot B + \cot C} \cot B$$

$$\rightarrow \boxed{\cot \theta = \frac{\cot c - \cot B}{2}}$$

$\cot \beta$ s'obtient facilement si on remarque que : $\beta = \pi - B - \theta$

$$\rightarrow \cot \beta = \cot(\pi - B - \theta) = -\cot(B + \theta) = \frac{1 - \cot B \cot \theta}{\cot B + \cot \theta}$$

$$\rightarrow \cot \beta = \frac{1 - \cot B \frac{\cot C - \cot B}{2}}{\cot B + \frac{\cot C - \cot B}{2}} = \frac{2 - \cot B \cot C + \cot^2 B}{\cot B + \cot C} \quad (8)$$

Comme $\cot A = -\cot(B + C) = \frac{1 - \cot B \cot C}{\cot B + \cot C}$

(8) peut s'écrire $\cot \beta = \frac{1 - \cot B \cot C}{\cot B + \cot C} + \frac{1 + \cot^2 B}{\cot B + \cot C}$

$$\rightarrow \boxed{\cot \beta = \cot A + \frac{1 + \cot^2 B}{\cot B + \cot C}}$$

De même $\gamma = \theta - C \rightarrow \cot \gamma = \cot(\theta - C) = \frac{\cot \theta \cot C + 1}{\cot \theta - \cot C}$

$$\rightarrow \cot \gamma = \frac{\frac{\cot C - \cot B}{2} \cot C + 1}{\frac{\cot C - \cot B}{2} - \cot C} = -\frac{\cot^2 C - \cot B \cot C + 2}{\cot B + \cot C}$$

$$= \frac{\cot B \cot C - 1}{\cot B + \cot C} - \frac{\cot^2 C + 1}{\cot B + \cot C}$$

$$\rightarrow \boxed{\cot \gamma = \cot A - \frac{\cot^2 C + 1}{\cot B + \cot C}}$$

EXTRI176 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005.

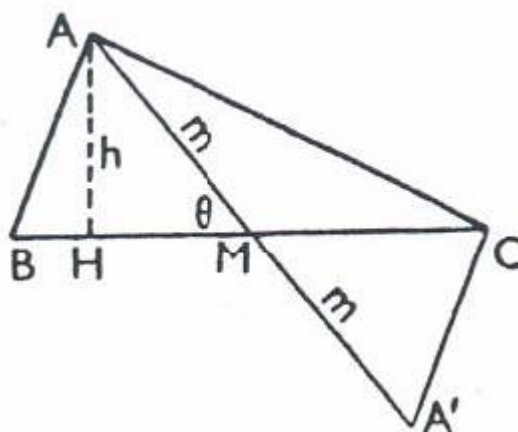
FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

Énoncé de EPL

Dans un triangle ABC de surface S , AM est la médiane de longueur m et θ est l'angle AMB .

Démontrer les relations suivantes :

- $4m^2 - a^2 = 4bc \cos A$
- $S = \frac{4m^2 - a^2}{8} \tan A$



Énoncé de FACSA

Soit le triangle ABC . on désigne par α , β et γ la mesure des angles respectivement aux sommets A , B et C et par a , b et c , la mesure des longueurs des côtés opposés. On appelle m la mesure de la médiane AM , θ la mesure de l'angle AMB et S la mesure de la surface du triangle ABC .

- Dessiner une esquisse de la situation.
- Démontrer les relations

$$4m^2 - a^2 = 4bc \cos \alpha \quad \text{et} \quad S = \frac{am}{2} \sin \theta$$

- Si on donne les valeurs numériques suivantes :

$$c = 3.45 \text{ m} \quad \alpha = 48^\circ \quad \text{et} \quad \beta = 73^\circ$$

que valent a , b , m et S ?

Donner les résultats numériques avec 4 chiffres après la virgule.

Voir le théorème de la médiane : EXGSP044

- D'une part on a dans le triangle ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$

D'autre part le théorème de la médiane permet d'écrire : $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2$

On en déduit : $2m^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 + 2bc \cos A \rightarrow \boxed{4m^2 - a^2 = 4bc \cos A}$

- On a : $S = \frac{1}{2}bc \cos A = \frac{4bc \cos A}{8} \frac{\sin A}{\cos A} \rightarrow \boxed{S = \frac{4m^2 - a^2}{8} \tan A}$

- Les triangles AMB et AMC ont la même surface puisqu'ils ont une base égale $\overline{BM} = \overline{MC}$

et qu'ils ont la même hauteur : $S = 2S_{AMB} = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{BM} . m . \sin \theta \Rightarrow \boxed{S = \frac{am}{2} \sin \theta}$

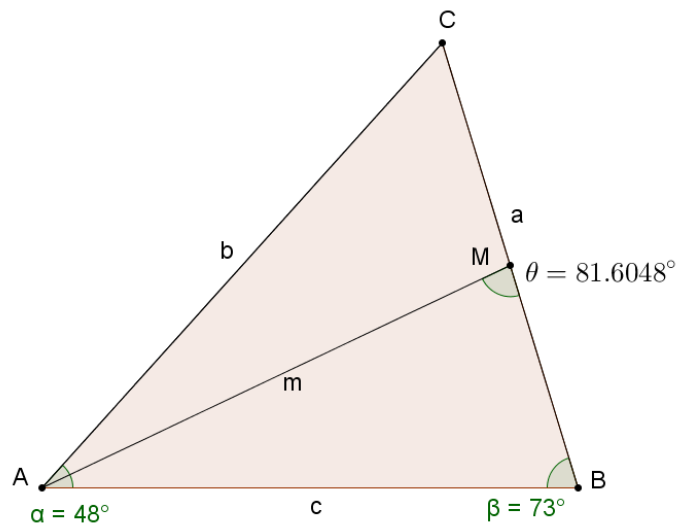
- $\gamma = 180 - 48 - 73 = 59^\circ$; $a = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} c = \frac{\sin 48}{\sin 59} \times 3.45 = 2.9911 \text{ m}$;

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} c = \frac{\sin 73}{\sin 59} \times 3.45 = 3.8490 \text{ m};$$

$$m = \sqrt{bc \cos \alpha + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3.8490 \times 3.45 \times \cos 48 + \frac{2.9911^2}{4}} = 3.3350 \text{ m}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{m^2 + a^2/4 - c^2}{ma} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{3.335^2 + 2.9911^2/4 - 3.45^2}{3.335 \times 2.9911} \right) = 81.6048^\circ$$

$$S = \frac{am}{2} \sin \theta = \frac{2.9911 \times 3.335}{2} \sin 81.6048 = 4.9342 \text{ m}^2$$



Variante proposée par Pierre Bernimont

Dans le triangle ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$$2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$4bc \cdot \cos A = 2b^2 + 2c^2 - 2a^2 \quad (1)$$

Dans le triangle AMB : $c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2m \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \theta = m^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot m \cdot \cos \theta$

Dans le triangle AMC : $b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2m \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos (\pi - \theta) = m^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot m \cdot \cos \theta$

En additionnant membre à membre : $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

$$2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - 2a^2 = 4m^2 - a^2 \quad (2)$$

En identifiant (1) et (2), nous avons : $\boxed{4m^2 - a^2 = 4bc \cdot \cos A}$

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

Sachant par la première relation que $bc = \frac{4m^2 - a^2}{4 \cos A}$,

$$\text{nous avons : } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4m^2 - a^2}{4 \cos A} \cdot \sin A$$

$$\boxed{S = \frac{4m^2 - a^2}{8} \tan A}$$

EXTRI177 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fautive, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Le plus petit angle d'un triangle est inférieur ou égal à 60°

Toujours vrai : Toujours faux :

Vrai si :

2) Pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\tan 2x > \tan x$

Toujours vrai : Toujours faux :

Vrai si :

3) Pour $x \neq \frac{k\pi}{2}$, on a, $\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} > 0$

Toujours vrai : Toujours faux :

Vrai si :

4) Dans un triangle rectangle en A , l'aire S du triangle est égal à $S = \frac{1}{2}a^2 \sin B \cos B$

Toujours vrai : Toujours faux :

Vrai si :

1) Vrai.

En effet, soit A le plus petit angle : $\begin{cases} A \leq B \\ A \leq C \end{cases}$

or $A + B + C = 180^\circ \rightarrow 3A \leq 180^\circ \rightarrow A \leq 60^\circ$

2) Faux. Pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $\tan 2x$ est négatif et $\tan x$ est positif

3)
$$\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Or $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fraction est donc toujours positive, sauf en $x = k\pi$ (alors $1 + \cos x = 0$)

La proposition est donc vraie si $x = k\pi$

4) $S = \frac{1}{2}bc$ or $b = a \cos B$ et $c = a \cos C \rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 \sin B \cos B$

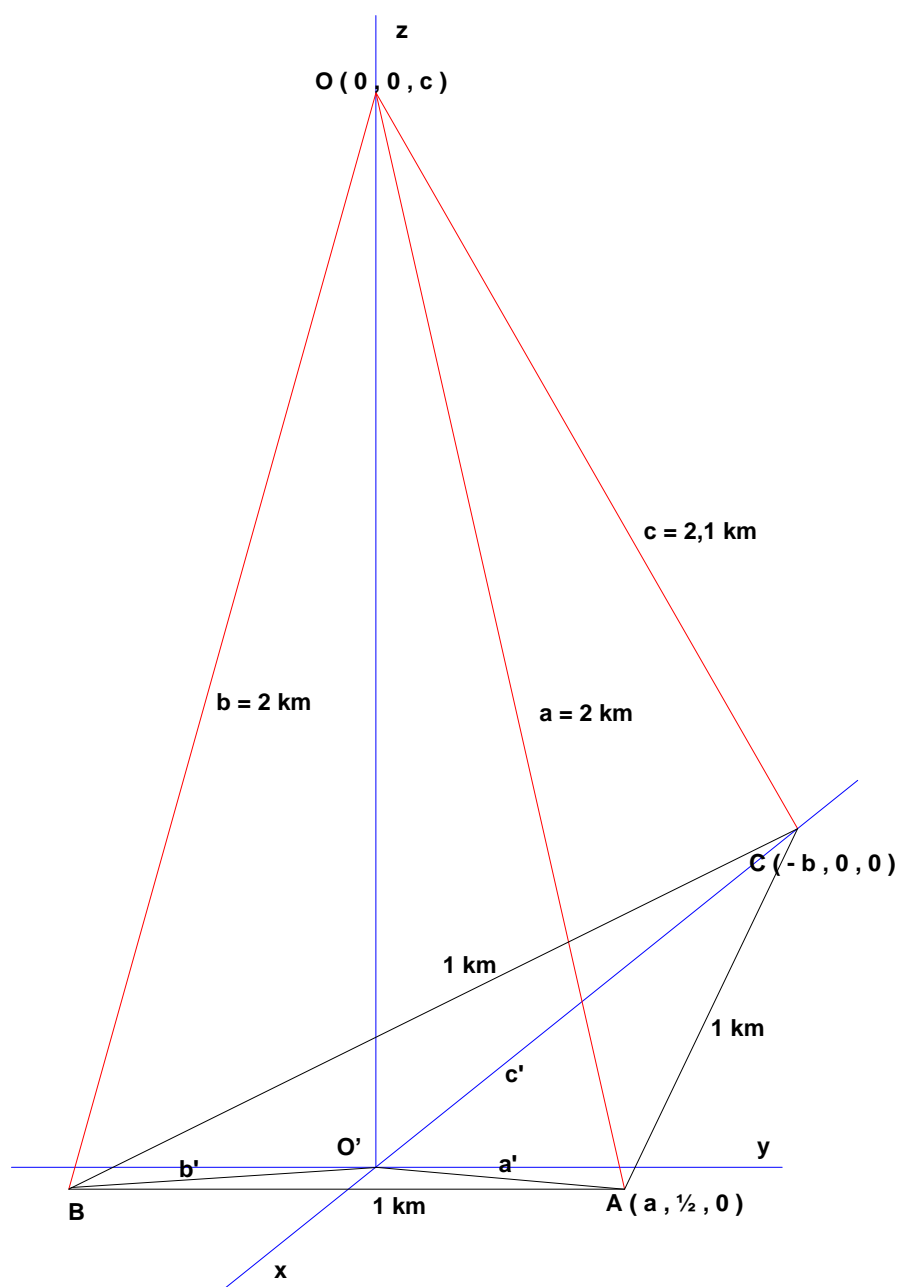
15 avril 06

EXTRI178 – Louvain, juillet 2005.

Je vole dans un ballon (O) et je mesure les distances $a = OA$, $b = OB$ et $c = OC$ à trois points A , B et C au sol. Le triangle ABC est équilatéral de côté $d = 1\text{ km}$. Les distances sont $a = b = 2\text{ km}$ et $c = 2,1\text{ km}$.

1. Si O' est ma projection orthogonale au sol, calculez les distances a' , b' et c' de O' aux trois points de référence A , B et C .
2. Faites un croquis de la situation pour expliquer vos calculs.

On suppose la terre plate pour simplifier le problème.



Le dessin explicite le problème. Plaçons judicieusement les axes

Soient : $A\left(a, \frac{1}{2}, 0\right); C(-b, 0, 0); O(0, 0, c)$

$$\rightarrow \begin{cases} |AC|^2 = (a+b)^2 + \frac{1}{4} = 1 \\ |OA|^2 = a^2 + \frac{1}{4} + c^2 = 4 \\ |OC|^2 = b^2 + c^2 = 2.1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = \frac{3}{4} \\ a^2 + c^2 = \frac{15}{4} \\ b^2 + c^2 = 2.1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = \frac{3}{4} \\ a = \sqrt{\frac{15}{4} - c^2} \\ b = \sqrt{2.1^2 - c^2} \end{cases}$$

On élimine a et b , la première équation donne :

$$\frac{15}{4} - c^2 + 2.1^2 - c^2 + 2\sqrt{\frac{15}{4} - c^2} \cdot \sqrt{2.1^2 - c^2} = \frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{15}{4} - c^2\right)(2.1^2 - c^2) = (c^2 - 3.705)^2$$

$$\rightarrow -0.75c^2 + 2.810475 = 0 \rightarrow c = 1.9358 \text{ km} \rightarrow \begin{cases} a = 0.0518 \text{ km} \\ b = 0.8141 \text{ km} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a' = b' = |O'A| = \sqrt{0.0518^2 + \frac{1}{4}} = 0.5027 \text{ km} \\ c' = |O'C| = b = 0.8141 \text{ km} \end{cases}$$

15 avril 06

EXTRI179 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2006.
Polytech, Umons, Mons, juillet 2012.

Dans un triangle ABC , on a la relation

$$\sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 B \cos^2 C = \frac{1}{2} \sin 2B \sin 2C$$

Montrer que ce triangle est rectangle.

$$\sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 B \cos^2 C = \frac{1}{2} \sin 2B \sin 2C$$

$$\Rightarrow \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 B \cos^2 C - 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = 0$$

$$\Rightarrow (\sin B \sin C - \cos B \cos C)^2 = 0$$

$$\Rightarrow [\cos(-(B+C))]^2 = 0 \rightarrow \cos(B+C) = 0$$

$$\Rightarrow B+C = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Le triangle est donc rectangle en A

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

$$A + B + C = \pi$$

$$\text{On a : } \sin 2B \sin 2C = 2 \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \cos^2 B \cos^2 C$$

$$\Rightarrow 4 \sin B \cos B \sin C \cos C = 2 \sin^2 B \sin^2 C + 2 \cos^2 B \cos^2 C$$

$$\Rightarrow 2 \sin B \cos B \sin C \cos C - \sin^2 B \sin^2 C - \cos^2 B \cos^2 C = 0$$

$$\Rightarrow \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - \cos B \cos C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = 0$$

$$\Rightarrow \sin B \sin C \cos(B+C) - \cos B \cos C \cos(B+C) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(B+C) (\sin B \sin C - \cos B \cos C) = 0 \Rightarrow \cos(B+C) \cdot [-\cos(B+C)] = 0$$

$$\Rightarrow \cos(B+C) = 0 \Rightarrow B+C = \pi - A = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Or } A \in]0, \pi[\Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{2}}$$

5 juillet 06. Modifié le 21 octobre 2013 (Fabienne Zoetard)