

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 19

EXTRI190-EXTRI199

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI190 – Mons – septembre 2003

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \tan^2 x = \frac{5}{6}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$CE : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

L'équation peut s'écrire :

$$\cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{5}{6} \rightarrow \cos 2x(1 + \cos 2x) + 1 - \cos 2x = \frac{5}{6}(1 + \cos 2x)$$

$$\cancel{\cos 2x} + \cos^2 2x + 1 - \cancel{\cos 2x} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cos 2x$$

$$\cos^2 2x - \frac{5}{6}\cos 2x + \frac{1}{6} = 0 \rightarrow 6\cos^2 2x - 5\cos 2x + 1 = 0$$

$$\rightarrow \cos 2x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6 \times 1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \pm 60^\circ + k360^\circ \rightarrow \boxed{x = \pm 30^\circ + k180^\circ} \\ \cos 2x = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = \pm 70,52^\circ + k360^\circ \rightarrow \boxed{x = \pm 35,26^\circ + k180^\circ} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI191 – Mons – juillet 2004

Résoudre le triangle ABC connaissant son périmètre (p) ainsi que ses angles A et B . Donner la solution numérique pour $p = 58$ cm, $A = 37^\circ$ et $B = 80^\circ$

Rappel sur les proportions :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \rightarrow \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \rightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

Appliquons à la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Or $\sin C = \sin(A+B)$ car ce sont des angles supplémentaires

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin(A+B)} \sin A \\ b = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin(A+B)} \sin B \\ c = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin(A+B)} \sin(A+B) \end{cases}$$

Dans notre cas particulier : $\frac{58}{\sin 37 + \sin 80 + \sin(37+80)} = 23.409$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 23.409 \times \sin 37 & = \boxed{14.09 \text{ cm}} \\ b = 23.409 \times \sin 80 & = \boxed{23.05 \text{ cm}} \\ c = 23.409 \times \sin(37+80) & = \boxed{20.86 \text{ cm}} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI192 – FPMS, UMONS, Mons – juillet 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$$\text{Par Simpson} \rightarrow 2 \sin x \cos 4x = 2 \cos 4x \cos 2x$$

$$1) \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 0 \rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4}}$$

$$2) \sin x = \cos 2x$$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \rightarrow \sin x - 1 + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\bullet \sin x = -1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\bullet \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Le 19 septembre 2006. Modifié le 26 juin 2012.

EXTRI193 – Mons – juillet 2004

Si A, B et C désignent les angles internes d'un triangle et b et c , les côtés opposés aux angles du même nom, démontrer que la relation suivante est vérifiée :

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$$

On a : $\sin A = \sin(B + C)$ car angles supplémentaires

→ Le membre de gauche de la relation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} \sin 2C + \frac{c}{b} \sin 2B &= \frac{\sin B}{\sin C} \sin 2C + \frac{\sin C}{\sin B} \sin 2B \\ &= \frac{\sin B}{\sin C} \cdot 2 \sin C \cos C + \frac{\sin C}{\sin B} \cdot 2 \sin B \cos B \\ &= 2 \sin B \cos C + 2 \sin C \cos B \\ &= 2 \sin(B + C) = 2 \sin A \end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI194 – Mons – juillet 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} = 0$$

Posons $\tan \varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = 60^\circ$

L'équation devient :

$$\sin x + \tan \varphi \cos x = \sqrt{2} \rightarrow \cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \cos 60^\circ \times \sqrt{2}$$

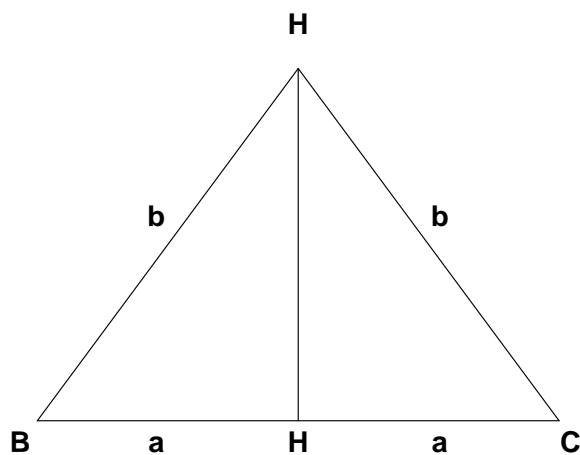
$$\sin(\varphi + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 60 + x = 45 + k360 \rightarrow \boxed{x = -15^\circ + k360^\circ} \\ 60 + x = 135 + k360 \rightarrow \boxed{x = 75^\circ + k360^\circ} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI195 – Mons – septembre 2004

Résoudre le triangle ABC sachant que les angles B et C sont égaux, que le périmètre vaut 24 m et que la hauteur AH est de 4.9 m



Le triangle ABC est isocèle et H est milieu de BC

$$\text{On a : } 2a + 2b = 24 \rightarrow a + b = 12$$

$$\text{Par Pythagore dans le triangle } AHC : b^2 = AH^2 + a^2$$

$$\rightarrow (12 - a)^2 = 4.9^2 + a^2 \rightarrow 144 - 24a + a^2 = 4.9^2 + a^2 \rightarrow \boxed{a = 5m}$$

$$\text{Donc } \boxed{b = 7m}$$

$$\text{Et } \cos B = \cos C = \frac{a}{b} = \frac{5}{7} \rightarrow \boxed{B = C = 44.4^\circ} \rightarrow \boxed{A = 91.2^\circ}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI196 – Mons – septembre 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos x - \sin x = \sin 3x - \cos 3x$$

Et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned}\cos x - \sin x = \sin 3x - \cos 3x &\rightarrow \cos 3x - \cos x = \sin 3x + \sin x \\ &\rightarrow 2 \cos 2x \cos x = 2 \sin 2x \cos x\end{aligned}$$

1) $\cos x = 0$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

2) $\cos 2x = \sin 2x$

$$\cos 2x = \sin 2x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI197 – Mons – septembre 2004

Vérifier l'identité suivante :

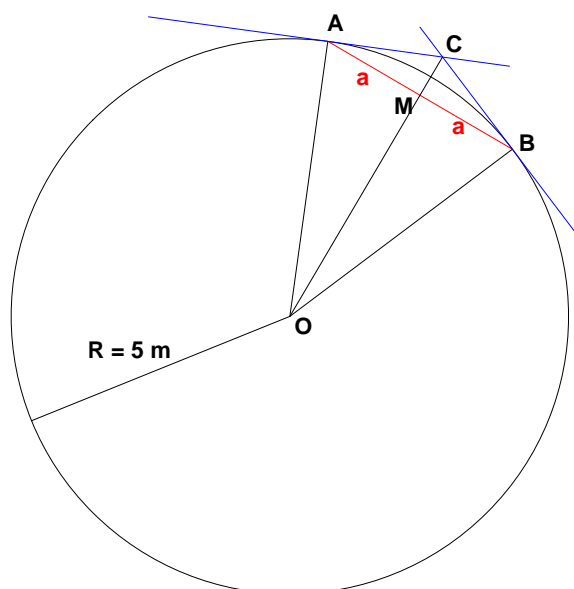
$$16\cos^3 x \sin^2 x = 2\cos x - \cos 3x - \cos 5x$$

$$\begin{aligned}2\cos x - \cos 3x - \cos 5x &= \cos x - \cos 3x + \cos x - \cos 5x \\ &= -2\sin 2x \sin(-x) - 2\sin 3x \sin(-2x) \\ &= 2\sin 2x \sin x + 2\sin 3x \sin 2x \\ &= 2\sin 2x(\sin x + \sin 3x) \\ &= 2\sin 2x \cdot 2\sin 2x \cos(-x) \\ &= 4\sin^2 2x \cos x \\ &= 4 \times 4\sin^2 x \cos^2 x \cos x \\ &= 16\sin^2 x \cos^3 x\end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI198 – Mons – septembre 2004

Dans un cercle de rayon $R = 5$ cm, on mène une corde $AB = 2a = 4$ m et les tangentes (au cercle) aux points A et B qui se coupent C . Calculer les angles et l'aire du triangle ABC



Les triangles AOM et BOM sont rectangles

$$\rightarrow \sin AOM = \sin BOM = \frac{a}{R} = \frac{2}{5} = 0.4 \rightarrow O = 23.58^\circ$$

$$\text{Donc : } \boxed{BAC = ABC = 23.58^\circ} \rightarrow ACB = 180 - (BAC + ABC) = \boxed{132.34^\circ}$$

$$\text{Aire du triangle } ABC : S = \frac{AB \cdot CM}{2} = \frac{AB \cdot a \cdot \tan BC}{2} = \frac{4 \times 2 \times \tan 23.58}{2} = \boxed{1.746 \text{ cm}^2}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI199 – Mons – juillet 2006

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4\sin^2 2x = 1 + 4\sin^2 x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

L'équation peut s'écrire :

$$4\sin^2 2x = 1 + 4\sin^2 x \rightarrow 16\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 + 4\sin^2 x \rightarrow 16\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1 + 4\sin^2 x$$

$$16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$$1) \sin^2 x = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} \approx 0.0955$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin x = 0.309 &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \\ \bullet \sin x = -0.309 &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \frac{19\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$2) \sin^2 x = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \approx 0.655$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin x = 0.809 &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \\ \bullet \sin x = -0.809 &\rightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \frac{17\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006