Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 2

EXTRI020 – EXTRI029

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI020 – Liège, septembre 2000.

Résoudre le système d'équation suivant :

$$\cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta$$

$$\begin{cases} \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta = \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \cos^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha \left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right) = 0$$

$$\left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\left(1 - \sin^2\alpha\right) = 0$$

1) $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = 0$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} \cos^2\beta + \sin^2\beta = 0 \\ \sin^2\beta + \cos^2\beta = 0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Il reste:

$$\cos^2\beta = \sin^2\beta \quad \rightarrow \quad \tan^2\beta = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\rightarrow \quad \cos^2\beta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} + \sin^2\alpha \,.\frac{1}{2} = \cos^2\alpha$$

$$1 + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha$$

$$3\sin^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.6155 + 2k\pi \\ \alpha = \pi - 0.6155 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = -0.6155 + 2k\pi \\ \alpha = \pi + 0.6155 + 2k\pi \end{cases}$$

EXTRI021 – Liège, juillet 1996.

Résoudre et représenter

$$\cos\ 2x=\sqrt{2}\left(\sin^3 x+\cos^3 x-\sin^2 x\ \cos\ x-\sin\ x\ \cos^2 x\right)$$

$$\cos\ 2x=\sqrt{2}\left(\sin^3 x+\cos^3 x-\sin^2 x\ \cos\ x-\sin\ x\ \cos^2 x\right)$$

$$\frac{\cos\ 2x}{\cos^3 x}=\sqrt{2}\left(\tan^3 x+1-\tan^2 x-\tan x\right)$$

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^3 x}=\sqrt{2}\left(\tan^2 x\left(\tan\ x-1\right)-\left(\tan\ x-1\right)\right)$$

$$\frac{1-\tan^2 x}{\cos\ x}=\sqrt{2}\left(\tan\ x-1\right)\left(\tan^2 x-1\right)$$

$$1)\ \ 1-\tan^2 x=0\ \rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Il reste :

$$-\frac{1}{\cos\ x}=\sqrt{2}\left(\tan\ x-1\right)=\sqrt{2}\ \frac{\sin\ x-\cos x}{\cos\ x}$$

$$\sqrt{2}\sin\ x-\sqrt{2}\ \cos\ x=-1\rightarrow\cos\ x-\sin\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\ \varphi=-1\rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\\ x=\dfrac{17\pi}{12}+2k\pi\end{cases}$$

EXTRI022 – Liège, septembre 2000.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan\left(x+a\right)+\tan\left(x-a\right)=\cot x$$

$\tan\left(x+a\right)+\tan\left(x-a\right)=\cot x$

$CE: \quad x+a\neq\pm\dfrac{\pi}{2} \quad x-a\neq\pm\dfrac{\pi}{2} \quad x\neq k\pi$

$$\frac{\sin\left(x+a+x-a\right)}{\cos\left(x+a\right)\cos\left(x-a\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$\sin x\sin 2x=\cos x\cos\left(x+a\right)\cos\left(x-a\right)$

$2\sin^2 x\cos x=\cos x\cos\left(x+a\right)\cos\left(x-a\right)$

1) $\cos x=0 \quad\rightarrow\quad x=k\pi$ A rejeter.

Il reste :

$$2\sin^2 x=\cos\left(x+a\right)\cos\left(x-a\right)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2a$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x+2\cos^2 a-1\right)=-\sin^2 x+\cos^2 a$$

$$3\sin^2 x=\cos^2 a \quad\rightarrow\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos a$$

Etudions les CE.

Si $x+a=\dfrac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad a=\dfrac{\pi}{2}-x$

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x$$

$$\rightarrow\quad \sin x=0 \quad\rightarrow\quad x=k\pi \quad\rightarrow\quad a=\frac{\pi}{2}-k\pi$$

Les autres CE donnent le même résultat.

Conclusion :

Si $a=\dfrac{\pi}{2}-k\pi$ Equation impossible

Dans les autres cas : $\begin{cases} x=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos a\right) \\ x=\pi-\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos a\right) \end{cases}$

Solution proposée par Anthony Bertagno

$\tan(x+a)+\tan(x-a)=\cot x$

$CE: \quad x+a \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad x-a \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad x \neq k\pi$

L'équation devient

$$\frac{\tan x+\tan a}{1-\tan x\tan a}+\frac{\tan x-\tan a}{1+\tan x\tan a}=\frac{1}{\tan x}$$

$$\frac{(\tan x+\tan a)(1+\tan x\tan a)+(\tan x-\tan a)(1-\tan x\tan a)}{(1-\tan x\tan a)(1+\tan x\tan a)}=\frac{1}{\tan x}$$

$$\frac{\tan x+\cancel{\tan^2 x\tan a}+\cancel{\tan a}+\tan x\tan^2 a+\tan x-\cancel{\tan^2 x\tan a}-\cancel{\tan a}+\tan x\tan^2 a}{1-\tan^2 x\tan^2 a}=\frac{1}{\tan a}$$

$$\frac{2\tan x+2\tan x\tan^2 a}{1-\tan^2 x\tan^2 a}-\frac{1}{\tan x}=0$$

$$\frac{\left(2\tan x+2\tan x\tan^2 a\right)\tan x-\left(1-\tan^2 x\tan^2 a\right)}{\left(1-\tan^2 x\tan^2 a\right)\tan x}=0$$

$$2\tan^2 x+2\tan^2 x\tan^2 a-1+\tan^2 x\tan^2 a=0$$

$$\left(3\tan^2 a+2\right)\tan^2 x-1=0$$

$$\rightarrow \boxed{\tan x=\pm\sqrt{\frac{1}{3\tan^2 a+2}}}$$

En prenant quelques valeurs pour a, on peut vérifier facilement que cette solution est équivalente à la précédente.

EXTRI023 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) = 0$$

sachant que sin a n'est pas nul.
Représenter sur le cercle trigonométrique dans le cas où a vaut 60°

$$\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) = 0$$

$$2\sin\frac{a+a+3x}{2}\cos\frac{a-a-3x}{2} + 2\sin\frac{a+x+a+2x}{2}\cos\frac{a+x-a-2x}{2} = 0$$

$$\sin\frac{2a+3x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{2a+3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\sin\frac{2a+3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

1) $\sin\frac{2a+3x}{2} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{2a+3x}{2} = k180 \quad\rightarrow\quad x = -\frac{2a}{3} + k120$

Il reste :

$$\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \quad\rightarrow\quad \cos\frac{3x}{2} = -\cos\frac{x}{2} = \cos\left(180 - \frac{x}{2}\right)$$

2) $a)$ $\frac{3}{2}x = 180 - \frac{x}{2} + 2k180 \quad\rightarrow\quad x = 90 + k180$

$b)$ $\frac{3}{2}x = -180 + \frac{x}{2} + 2k180 \quad\rightarrow\quad x = (-)180 + \mathrm{k}360$

Si $a = 60°$,

$$x = -40 + k120 \quad \text{ou} \quad x = 90 + k180 \quad \text{ou} \quad x = 180 + k360$$

Le lecteur représentera facilement les solutions sur le cercle.

EXTRI024 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan x\,(1+\cos 2a)=\cos 2a\,\tan 2x$$

où a désigne un angle connu..
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique si a = 60°

$$\tan x\,(1+\cos 2a)=\cos 2a\,\tan 2x$$

$$CE:\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\qquad x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\tan x\,(1+\cos 2a)=\cos 2a\,\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

1) $\tan x=0\quad\rightarrow\quad x=k\pi$

Il reste :

$$1+\cos 2a=\frac{2\cos 2a}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan^2 x=1-\frac{2\cos 2a}{1+\cos 2a}=\frac{1+\cos 2a-2\cos 2a}{1+\cos 2a}=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}=\tan^2 a$$

2) $\tan x=\pm\tan a$

$x=\pm a+k\pi$

$$si\ a=60°=\frac{\pi}{3}\quad\rightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

EXTRI025 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 2x = m \sin^3 x$$

où m désigne un paramètre réel.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique si où m = 4/3.

$$\sin 2x = m \sin^3 x$$

$$2 \sin x \cos x = m \sin^3 x$$

$$1)\quad \sin x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi$$

Il reste :

$$2\cos x = m \sin^2 x = m\left(1-\cos^2 x\right) \rightarrow m\cos^2 x + 2\cos x - m = 0$$

$$A)\ \ si\ m = 0 \quad \rightarrow \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2}$$

$$B)\ \ si\ m \neq 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m} \qquad \text{Il faut vérifier : } -1 \leq \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

$$B\,1)\quad m > 0$$

$$B\,1\,1)\quad -1 \leq \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$-\left(m+1\right) \leq \sqrt{1+m^2} \quad \text{Toujours vérifié.}$$

$$B\,1\,2)\quad \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

$$\sqrt{1+m^2} \leq \left(m+1\right) \qquad \text{Toujours vérifié}$$

$$B\,1\,3)\quad -1 \leq \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$m-1 \geq \sqrt{1+m^2} \quad \rightarrow \quad m^2 - 2m + 1 \geq 1 + m^2$$

$$-2m \geq 0 \qquad \text{Impossible}$$

$$B\,1\,4)\quad \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

$$-\sqrt{1+m^2} \leq m+1 \qquad \text{Toujours vérifié.}$$

$$\Rightarrow \ \text{conclusion : } \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$B\ 2)\quad m<0$

$B\ 2\ 1)\quad -1 \leq \dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$

$1-m \geq \sqrt{1+m^2}$ Toujours vérifié.

$B\ 2\ 2)\quad \dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$

$\sqrt{1+m^2} \geq (m+1)$ Toujours vérifié

$B\ 2\ 3)\quad -1 \leq \dfrac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}$

$m-1 \geq \sqrt{1+m^2}$ Impossible

$B\ 2\ 4)\quad \dfrac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$

$\sqrt{1+m^2} \leq -m-1$

$1+m^2 \leq m^2+2m+1$

$0 \leq m$ Impossible

$$\Rightarrow \text{conclusion} : \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$Si\ m=\frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{16}{9}}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

EXTRI026 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$$2\cos\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2} = 2\cos\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6\mathrm{x}-2\mathrm{x}}{2}$$

$$\cos 4x \sin x = \cos 4x \cos 2x$$

$$1)\ \cos 4x = 0 \quad \to \quad x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Il reste :

$$\sin x = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$2)\ \sin x = -1 \quad \to \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$3)\ \sin x = \frac{1}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

EXTRI027 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x + \cos \frac{2x}{3} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6}\right)$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x + \cos \frac{2x}{3} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6}\right)$$

$$\textit{Soit } \frac{x}{6} = y \quad \rightarrow \quad \sin 6y + \cos 4y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)$$

$$\sin 6y + 1 - 2\sin^2 2y = 1 + \sin 2y$$

$$\sin 6y - \sin 2y = 2\sin^2 2y$$

$$2\cos 4y \sin 2y = 2\sin^2 2y$$

$$1) \quad \sin 2y = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \pi + 2k\pi \\ \dfrac{x}{3} = 2k\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = 3k\pi$$

Il reste :

$$\cos 4y = \sin 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$$

$$2) \quad \begin{cases} 4y = \dfrac{\pi}{2} - 2y + 2k\pi & \rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 4y = -\dfrac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi & \rightarrow \quad x = -\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

EXTRI028 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4\sin x \sin 3x - 2\cos 2x + 1 = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$4\sin x \sin 3x - 2\cos 2x + 1 = 0$$

$$\text{Rappel : } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \text{ donc}$$

$$4\sin x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) - 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 1 = 0$$

$$16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{16} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin^2 x = 0.9330 \\ \sin^2 x = 0.0670 \end{cases}$$

$$1)\ \sin^2 x = 0.9330 \quad \rightarrow \quad \sin x = \pm 0.9659$$

$$\begin{cases} x = -75 + 2k180 \\ x = 255 + 2k180 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 75 + 2k180 \\ x = 105 + 2k180 \end{cases}$$

$$2)\ \sin^2 x = 0.0670 \quad \rightarrow \quad \sin x = \pm 0.2588$$

$$\begin{cases} x = -15 + 2k180 \\ x = 195 + 2k180 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 15 + 2k180 \\ x = 165 + 2k180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm 15 + k90$$

EXTRI029 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

$$CE:\ x \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad x \neq \pm\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sin(x+3x)}{\cos x \cos 3x} = -\sin 2x \quad \rightarrow \quad \sin 4x = -\sin 2x \cos x \cos 3x$$

$$2\sin 2x \cos 2x = -\sin 2x \cos x \cos 3x$$

$$\rightarrow \quad \sin 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \textit{A rejeter car CE}$$

Il reste :

$$2\cos 2x = -\cos x \cos 3x = -\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$5\cos 2x = -\cos x = -2\cos^2 2x + 1$$

$$2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{-5 \pm 5.7446}{4}$$

$$\rightarrow \quad 2x = \pm 1{,}3835 + +2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \pm 0{,}69185 + k\pi$$