Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 20

EXTRI200-EXTRI209

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI200 – Mons – juillet 2006

Démontrer que si A et B sont des angles aigus positif, alors la relation suivante est vérifiée

$$\cos(A+B)=\frac{1-\tan A\tan B}{\sqrt{(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)}}$$

Comme les angles sont aigus et positifs, il n'y a pas de CE.

On a :

$$\cos(A+B)=\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}.\frac{\sin B}{\cos B}}{\sqrt{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}.\frac{\cos^2 B+\sin^2 B}{\cos^2 B}}}=\frac{\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\cos A.\cos B}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}.\frac{1}{\cos^2 B}}}$$

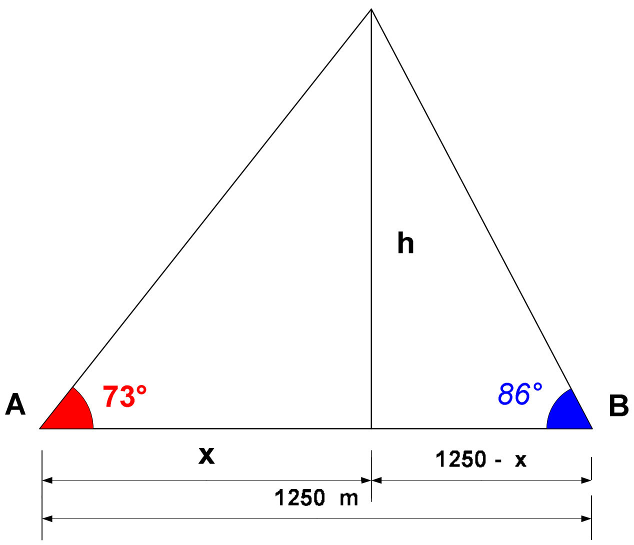
Les angles sont aigus et positifs, on ne retient que la racine positive

$$\to \cos(A+B)=\frac{\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\cos A.\cos B}}{\frac{1}{\cos A.\cos B}}=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI201 – Mons – juillet 2006

Deux observateurs distants de 1250 m sur une même horizontale visent, au même instant, un point du ciel. Ce point se situe dans le plan vertical de la base d'observation. Les angles d'élévation (angles d'observation par rapport à l'horizontale) sont respectivement de 73° et 86°. Quelle est la hauteur du point visé si celui-ci se situe entre les deux observateurs.



On a directement :

$$h = x\tan 73 = (1250 - x)\tan 86$$

$$\rightarrow x = 1250\frac{\tan 86}{\tan 73 + \tan 86} = 904.5\ m$$

Et donc

$$h = 904.5.\tan 73 = \boxed{831.5\ m}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI202 – Mons – juillet 2006

Vérifier l'identité suivante

$$16\sin^5\theta = 10\sin\theta - 5\sin 3\theta + \sin 5\theta$$

Calculons :

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + \left(1-2\sin^2\theta\right)\sin\theta$$
$$= \sin\theta\left(2-2\sin^2\theta+1-2\sin^2\theta\right) = \sin\theta\left(3-4\sin^2\theta\right)$$

Calculons aussi $\cos 3\theta$, car on en aura besoin plus tard :

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = \left(1-2\sin^2\theta\right)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta\left(1-4\sin^2\theta\right)$$

Et enfin calculons $\sin 5\theta$

$$\sin 5\theta = \sin(2\theta+3\theta) = \sin 2\theta\cos 3\theta + \cos 2\theta\sin 3\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos^2\theta\left(1-4\sin^2\theta\right) + \left(1-2\sin^2\theta\right)\sin\theta\left(3-4\sin^2\theta\right)$$
$$= \left(2\sin\theta - 8\sin^3\theta\right)\left(1-\sin^2\theta\right) + \left(\sin\theta - 2\sin^3\theta\right)\left(3-4\sin^2\theta\right)$$
$$= 2\sin\theta - 8\sin^3\theta - 2\sin^3\theta + 8\sin^5\theta + 3\sin\theta - 6\sin^3\theta - 4\sin^3\theta + 8\sin^5\theta$$
$$5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta$$

On met tout ensemble :

$$10\sin\theta - 5\sin 3\theta + \sin 5\theta = 10\sin\theta - 5\left(3\sin\theta - 4\sin^2\theta\right) + 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta$$
$$= 16\sin^5\theta$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI203 – Mons – septembre 2006

Résoudre l'équation trigonométrique suivante

$$(4\cos x\cos 2x-1)\sin x=\sin 7x$$

$(4\cos x\cos 2x-1)\sin x=\sin 7x\rightarrow 4\sin x\cos x\cos 2x=\sin 7x+\sin x$

$\rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x\cos 3x\rightarrow \sin 4x=2\sin 4x\cos 3x$

1) $\sin 4x=0$

$$\rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi & \rightarrow \boxed{x=\dfrac{k\pi}{2}}\\[2ex] 4x=\pi+2k\pi & \rightarrow \boxed{x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}}\end{cases}$$

2) $2\cos 3x=1$

$$\rightarrow \cos 3x=\frac{1}{2}\rightarrow 3x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\rightarrow \boxed{x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI204 – Mons – septembre 2006

Si A et B sont les angles non droits d'un triangle, démontrer que si la relation

$$(\tan A+\tan B)\cos A\cos B=1$$

est vérifiée, le triangle est rectangle.

Si A, B et C sont les angles du triangle : $A+B+C=\pi\rightarrow \sin(A+B)=\sin(\pi-1)$

La relation s'écrit :

$$(\tan A+\tan B)\cos A\cos B=1\rightarrow\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)\cos A\cos B=1$$

$$\rightarrow \sin A\cos B+\sin B\cos A=1\rightarrow \sin(A+B)=1\rightarrow \sin(\pi-C)=1$$

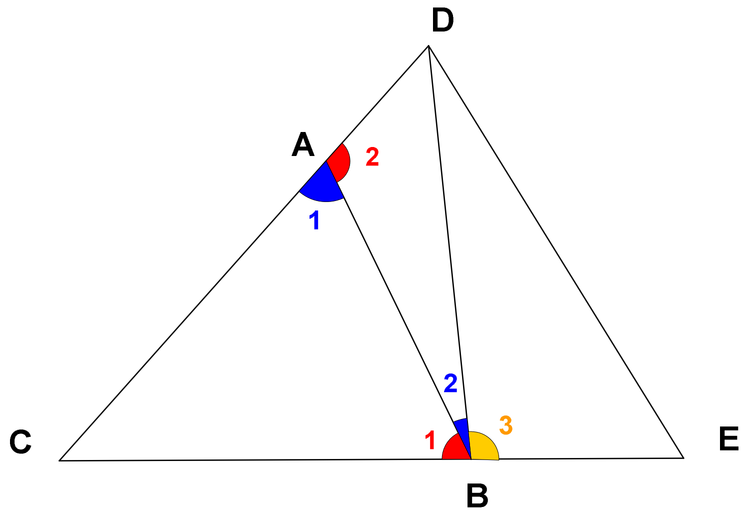
Et donc :

$$\pi-C=\frac{\pi}{2}\rightarrow \boxed{C=\frac{\pi}{2}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI205 – Mons – septembre 2006

On désire déterminer la distance d'un point *C* à deux points *A* et *B*. Pour ce faire, on prolonge le segment *CA* au-delà de *A*, d'une distance de 175 m. Soit *D*, le point ainsi défini. On prolonge également le segment *CB* au-delà de *B*, d'une distance de 225 m. Soit *E*, le point ainsi défini. On mesure alors les longueurs des segments *AB, DB* et *DE*, soient respectivement, 300 m, 326m et 488 m. Que valent les deux distances recherchées ?



Triangle BED : $\cos \widehat{B_3} = \dfrac{225^2 + 326^2 - 488^2}{2 \times 225 \times 326} = -0.554 \rightarrow \widehat{B_3} = 123.63°$

Triangle ABD : $\cos \widehat{B_2} = \dfrac{300^2 + 326^2 - 175^2}{2 \times 300 \times 326} = 0.847 \rightarrow \widehat{B_2} = 32.13°$

On en déduit $\widehat{B_1} = 180 - 123.63 - 32.13 = 24.24°$

Triangle ABD : $\cos \widehat{A_2} = \dfrac{175^2 + 300^2 - 326^2}{2 \times 175 \times 300} = 0.137 \rightarrow \widehat{A_2} = 82.15°$

On en déduit : $\widehat{A_1} = 180 - \widehat{A_2} = 180 - 82.15 = 97.85°$

Et également $\widehat{C} = 180 - \widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 180 - 97.85 - 24.24 = 57.91°$

Il reste à appliquer la formule des sinus au triangle *ABC*

$$x = 300 \times \frac{\sin 24.24}{\sin 57.91} = 145.38\ m$$

$$y = 300 \times \frac{\sin 97.85}{\sin 57..91} = 350.78\ m$$

Conclusion : $\boxed{x = 145.38\ m \quad ; \quad y = 350.78\ m}$

Le 19 septembre 2006

EXTRI206 – Mons – septembre 2006

Vérifier l'identité suivante

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$$
$$=4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=$$
$$\underbrace{2\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}_{A}\times\underbrace{2\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}_{B}$$

Utilisons les formules de Simpson inverses

$$A=2\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)=2\sin\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-\frac{a}{2}\right)$$
$$=-\left(\cos(b+c)-\cos a\right)=-\left(\cos b\cos c-\sin b\sin c-\cos a\right)$$
$$B=2\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=2\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{c-b}{2}\right)$$
$$=-\left(\cos a-\cos(c-b)\right)=-\left(\cos a-\cos b\cos c-\sin b\sin c\right)$$

Donc

$$A.B=\left(\cos b\cos c-\sin b\sin c-\cos a\right).\left(\cos a-\cos b\cos c-\sin b\sin c\right)$$
$$=\underline{\cos a\cos b\cos c}-\cancel{\cos a\sin b\sin c}-\cos^2 a$$
$$-\cos^2 b\cos^2 c+\cancel{\sin b\sin c\cos b\cos c}+\underline{\cos a\cos b\cos c}$$
$$-\cancel{\sin b\sin c\cos b\cos c}+\sin^2 b\sin^2 c+\cancel{\sin b\sin c\cos a}$$
$$=2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+\left(1-\cos^2 b\right)\left(1-\cos^2 c\right)$$
$$=2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cancel{\cos^2 b\cos^2 c}+1-\cos^2 b-\cos^2 c+\cancel{\cos^2 b\cos^2 c}$$
$$=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI207 – Liège, septembre 2006

Soit ABC un triangle quelconque non dégénéré. Montrer que

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Voir également EXTRI079

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{c}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Traitons le premier membre qui peut s'écrire :

$$\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Or $\quad \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}=\frac{A+B}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}=\frac{C}{2}$

$$\rightarrow\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\text{le deuxième membre}$$

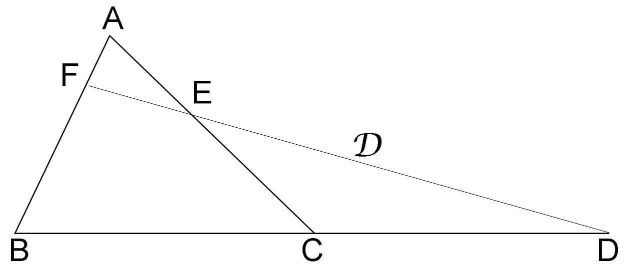
Le 24 décembre 2006

EXTRI208 – Liège, septembre 2006

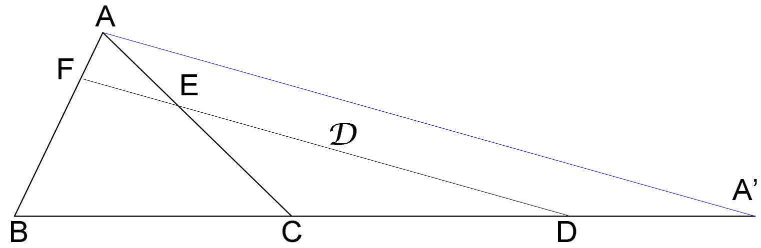
Soit ABC un triangle et soit $\mathcal{D}$ une droite qui coupe le côté AB en un point F, le côté AC en un point E et le prolongement du côté BC en un point D (voir figure). On donne les rapports :

$$\frac{FA}{FB}=\frac{1}{3} \qquad \frac{EA}{EC}=\frac{2}{3}$$

Que vaut le rapport $\dfrac{DC}{DB}$?



Triangle *ABC* coupé par une droite $\mathcal{D}$



On trace par A, la parallèle à $\mathcal{D}$ qui coupe BC en A'.
On a immédiatement par application de Thalès :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{FA}{FB}=\dfrac{DA'}{DB}=\dfrac{1}{3} \qquad \rightarrow DA'=\dfrac{DB}{3} \\ \dfrac{EA}{EC}=\dfrac{DA'}{DC}=\dfrac{2}{3} \qquad \rightarrow DA'=\dfrac{2DC}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{DB}{3}=\frac{2DC}{3} \rightarrow \boxed{\frac{DC}{DB}=\frac{1}{2}}$$

On pouvait aussi appliquer le théorème de Ménélaus (EXGSP026)

$$\frac{FA}{FB}.\frac{EC}{EA}.\frac{DB}{DC}=1 \rightarrow \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\frac{DB}{DC}=1 \rightarrow \boxed{\frac{DC}{DB}=\frac{1}{2}}$$

Le 24 décembre 2006

EXTRI209 – Liège, septembre 2006

Résoudre l'équation suivante :

$$2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2$$

Méthode 1

$$2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2$$
$$2\sin^2 3x+4\sin^2 3x\cos^2 3x=2$$
$$\sin^2 3x+2\sin^2 3x\cos^2 =\cos^2 3x+\sin^2 3x$$
$$\cos^2 3x\left(1-2\sin^2 3x\right)=0$$

1) $\cos^2 3x=0\rightarrow 3x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow \boxed{x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}}$

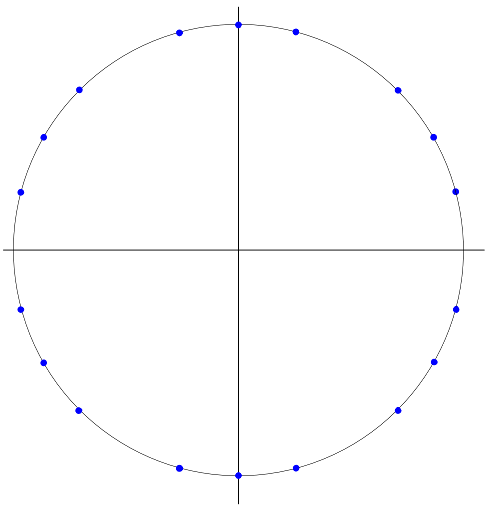
2) $1-2\sin^2 3x=0\rightarrow\left(1-\sqrt{2}\sin 3x\right)\left(1+\sqrt{2}\sin 3x\right)=0$

2.1) $\underline{1-\sqrt{2}\sin 3x=0}$

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\begin{cases}3x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}}\\ 3x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}}\end{cases}$$

2.2) $\underline{1+\sqrt{2}\sin 3x=0}$

$$\sin 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\begin{cases}3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\rightarrow\boxed{x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}}\\ 3x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\rightarrow\boxed{x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}}\end{cases}$$



Méthode 2 proposée par Olivier Crahay

On a : $\begin{cases} 2\ \sin^2 3x = 1 - \cos\ 6x \text{ (Carnot)} \\ \sin^2\ 6x = 1 - \cos^2\ 6x \text{ (Formule fondamentale)} \end{cases}$

donc l'équation devient

$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2 \rightarrow 1 - \cos\ 6x + 1 - \cos^2\ 6x = 2$

$\rightarrow\ -\cos\ 6x\ (\cos\ 6x + 1) = 0$

Reste à résoudre $\cos\ 6x = 0$ et $\cos\ 6x = -1$

1) $\cos 6x = 0 \rightarrow 6x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}}$

2) $\cos 6x = -1 \rightarrow 6x = \pm\pi + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}}$

Le 24 décembre 2006