Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 23

EXTRI230-EXTRI239

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI230 – ERM, juillet 2003

Si $\sin\alpha = \dfrac{4}{25}$ avec $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, calculer $\tan\alpha$ et $\cos 2\alpha$

Solution proposée par Benoit Baudelet

- Puisque $\sin\alpha = \dfrac{4}{25}$ avec $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, on a

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{-\sqrt{609}}{25}$$

- $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{4}{25}}{\dfrac{-\sqrt{609}}{25}} = \frac{-4}{\sqrt{609}} = \boxed{\frac{-4\sqrt{609}}{609}}.$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{-\sqrt{609}}{25}\right) - 1 = \boxed{\frac{593}{625}}.$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI231 – FSA, UCL, septembre 2007

Pour les affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses :

1) Un triangle ABC est aigu en A si $a^2 + b^2 < c^2$ (avec a le côté opposé à A)

2) Il y a plus d'une solution x pour l' inéquation : $\cos^2 x > 2(1+\sin x)^2$

3) L'équation suivante est une identité : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

4) Le triangle ABC est rectangle en B ou C si $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$

Solution proposée par Steve Tumson

1) VRAI . ABC est un triangle quelconque $\rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Si A est un angle aigu, alors $\cos A > 0 \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

Cette équation est compatible avec la relation donnée. En effet,

$$\begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 < c^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 < b^2 \\ b^2 < c^2 - a^2 \end{cases} \rightarrow a^2 - c^2 < c^2 - a^2 \rightarrow 2a^2 < 2c^2 \rightarrow a^2 < c^2$$

Or selon l'hypothèse de départ : $a^2 + b^2 < c^2 \rightarrow a^2 < c^2$

Conclusion : la proposition est vraie.

2) VRAI : le premier terme oscille entre 0 et 1 tandis que le second oscille entre 0 et 8 !

On a : $\cos^2 x > 2(1+\sin x)^2 \rightarrow 1 - \sin^2 x > 2 + 4\sin x + 2\sin^2 x \rightarrow 3\sin^2 x + 4\sin x + 1 < 0$

Cette équation du second degré admet deux racines : $\sin x = -1$ et $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

et elle sera négative entre ces racines.

Par conséquent, l'équation de départ admet une infinité de solutions dans $\left]-1,-\dfrac{1}{3}\right[$

3) VRAI : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \dfrac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a) = \dfrac{1}{2}(\cos^2 b - \sin^2 b - \cos^2 a + \sin^2 a)$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sin^2 b - \sin^2 b - 1 + \sin^2 a + \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

4) FAUX : si B est droit, alors on peut réécrire l'équation :

$$1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin^2 A \Leftrightarrow 1 + \cos^2 A = \sin^2 A \Leftrightarrow \cos 2A = -1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Or si B est droit, A ne peut pas l'être aussi.

Le 17 septembre 07.

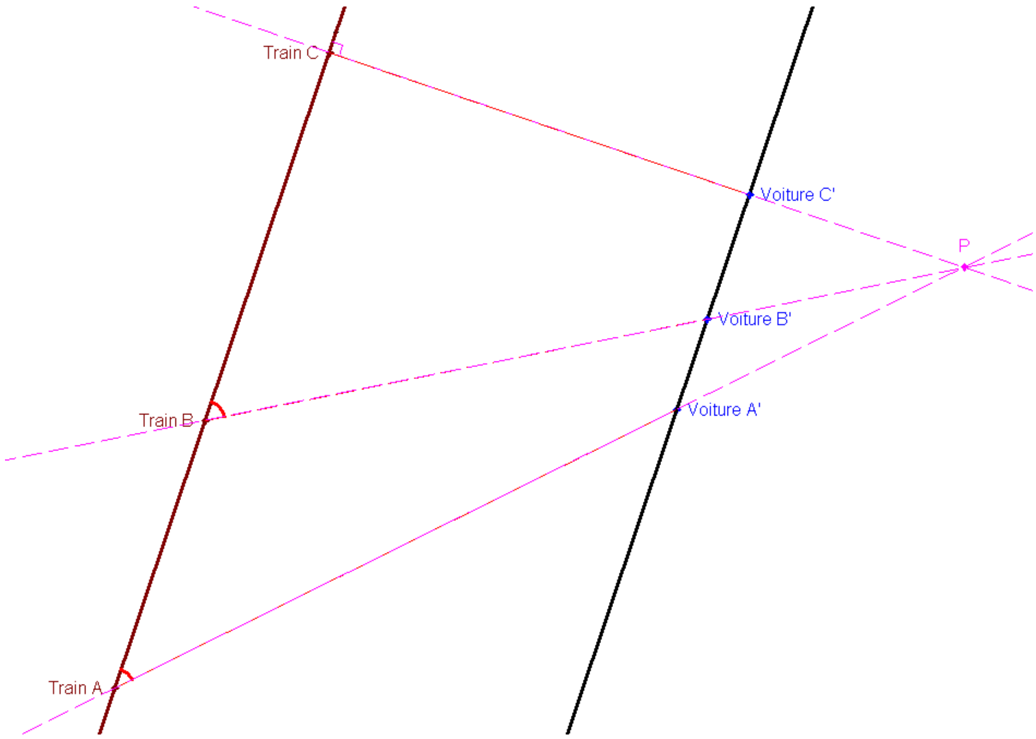
EXTRI232 – FSA, UCL, septembre 2007

Je suis dans un TGV qui roule à 240 km/h. A ma droite il y a une autoroute parallèle à la voie ferrée.
J'observe une voiture que le train rattrape et qui roule à une vitesse constante à 45° de ma trajectoire (observation *A*). Une minute plus tard, j'observe cette même voiture à 60° de ma trajectoire (observation *B*).
Quelques temps plus tard, le train sera à la même hauteur que la voiture. A ce moment là, j'observerai cette voiture à 90° (observation *C*).

Remarque : on admettra que les lignes reliant l'observateur et la voiture, passent par un même point pour les trois observations (cela découle de la vitesse constante du train et de la voiture).

1) Faites un croquis de la situation et indiquez tous les angles et les distances utiles dans vos calculs.
2) Quelle distance est parcourue par le train entre les observations *A* et *B* ?
3) Quelle distance est parcourue par le train entre les observation *B* et *C* ? Donner également les formules expliquant vos calculs
4) Si la voiture roule à 120 km/h, quelle est la distance entre la voie ferrée et l'autoroute ?

Solution proposée par Steve Tumson



2) $e = vt \Leftrightarrow |AB| = \dfrac{240000}{60} = 4000\ [m]$

3) La relation au sinus nous donne dans le triangle APB :

$$\frac{|BP|}{\sin PAB} = \frac{|AB|}{\sin BPA} \Leftrightarrow \frac{|BP|}{\sin 45°} = \frac{4000}{\sin 15°} \Leftrightarrow |BP| = 10928\ [m]$$

La relation au sinus nous donne dans le triangle BPC :

$$\frac{|CB|}{\sin 30°} = \frac{|PB|}{\sin 90°} \Leftrightarrow |CB| = |PB| \sin 30° = 5464\ [m]$$

La distance parcourue par le train est donc de 5464 mètres.

4) On déduit du point précédent que le temps entre l'observation B et C est d'approximativement 1 minute et 22 secondes.

Entre l'observation A et C il a donc 142 secondes, soit 4733 mètres parcourus par la voiture.

Dans le triangle rectangle $A'PC'$ on a donc :

$$|PC'| = |AC'| \tan \widehat{PA'C'} = 4733 \tan 45° = 4733\ [m]$$

La relation au sinus nous donne dans le triangle BPC :

$$\frac{|CP|}{\sin 60°} = \frac{|PB|}{\sin 90°} \Leftrightarrow |CP| = |PB| \sin 60° = 9464\ [m]$$

La distance entre la voie ferrée et l'autoroute est donc :

$$\boxed{|CC'| = |CP| - |PC'| = 4731\ [m]}$$

Le 17 septembre 07.

EXTRI233 – FACSA, ULG, septembre 2007

Montrer que dans tout triangle non dégénéré d'angles *A*, *B* et *C*, on a

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{4\sin B\sin C}$$

Solution proposée par l'Université

Solution

En faisant appel à la relation des sinus : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

on peut écrire

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

Le second membre vaut encore

$$\frac{(\sin B+\sin C)^2-2\sin B\sin C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}-1$$

si bien que

$$\frac{(\sin B+\sin C)^2-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=1+\cos A=2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

Le 27 novembre 07.

EXTRI233 – FACSA, ULG, septembre 2007

Résoudre l'équation

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par l'Université

Solution

On remarque que

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x \ = 1$$

En soustrayant l'équation de cette identité, on obtient

$$3\sin^A x\cos^2 + 3\sin^2 x\cos^4 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

Soit

$$3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3\sin^2\cos^2 x = \frac{9}{16}$$

ou encore

$$\frac{3}{16} = \sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

On se ramene donc a

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}, \qquad \sin^2 x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions sont

$$\begin{cases} 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & \rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi & \rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Le dessin des solutions sur le cercle trigonométrique est laissé au lecteur.

Le 27 novembre 07.

EXTRI235 – FACSA, ULG, septembre 2007

Les côtés d'un triangle ont pour longueurs respectives (en mètres)

$a = 2\ m,\qquad b = 3\ m,\qquad c = 4m$

Que valent ses angles ?

Solution proposée par l'Université

Solution

De la relation : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

on déduit

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{2\times3\times4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \text{ soit } A = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) = 0.505\ rad = 28.96°$$

De la même façon,

$$\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ac} = \frac{4+16-9}{2\times2\times4} = \frac{11}{16} \text{ ce qui donne } B = 0.8128\ rad = 46.57°$$

Enfin,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4+9-16}{2\times2\times3} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \text{ ce qui correspond à } C = 1.823\ rad = 104.48°$$

A titre de preuve, on vérifie que

$A + B + C = 28,96 + 46,57 + 104,48 = 180,01° = 180°$ aux erreurs d'arrondi près.

Le 27 novembre 07.

EXTRI236 – FACS, ULB, juillet 2007

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$8x^4-8x^2+1=0$$

b) Résoudre l'équation $\cos 4z=0$

c) Déduire de *a*) et *b*) la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$

$$a)\ 8x^4-8x^2+1=0\rightarrow x^2=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{8}=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\[2mm]\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{cases}$$

b) Utilisons la formule de Moivre :

$$\cos 4z+i\sin 4z=\left(\cos z+i\sin z\right)^4=\cos^4 z+4i\cos^3 z\sin z-6\cos^2 z\sin^2 z-4i\cos z\sin^3 z+\sin^4 z$$

Les parties réelles étant égales, on obtient :

$$\cos 4z=\cos^4 z-6\cos^2 z\sin^2 z+\sin^4 z=\cos^4 z-6\cos^2 z\left(1-\cos^2 z\right)+\left(1-\cos^2 z\right)^2$$

$$=\cos^4 z-6\cos^2 z+6\cos^4 z+1-2\cos^2 z+\cos^4 z$$

$$\rightarrow \boxed{\cos 4z=8\cos^4 z-8\cos^2 z+1}$$

c) Notons que $\cos 4\times\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\cos 4\times\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$

Il suffit donc d'appliquer les résultats précédents :

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\qquad\left(\frac{\pi}{8}\text{ est dans le premier quadrant donc }\cos\frac{\pi}{8}>0\right)$$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\qquad\left(\cos\frac{3\pi}{8}>0\right)$$

Le 27 novembre 07.

EXTRI237 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2007

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$ on a

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Résoudre $\mathbb{R}^+$

$$\arctan x + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2}$$

---

a) On sait que $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

Pour démontrer la relation, il suffit donc de montrer que : $\operatorname{arccot} x = \arctan \dfrac{1}{x}$

En effet, soit $\cot \dfrac{1}{y} = x \Rightarrow \tan \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \arctan \dfrac{1}{x} \Rightarrow \cot \dfrac{1}{y} = \cot \arctan \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow x = \cot \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot}\left(\cot \arctan \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$$

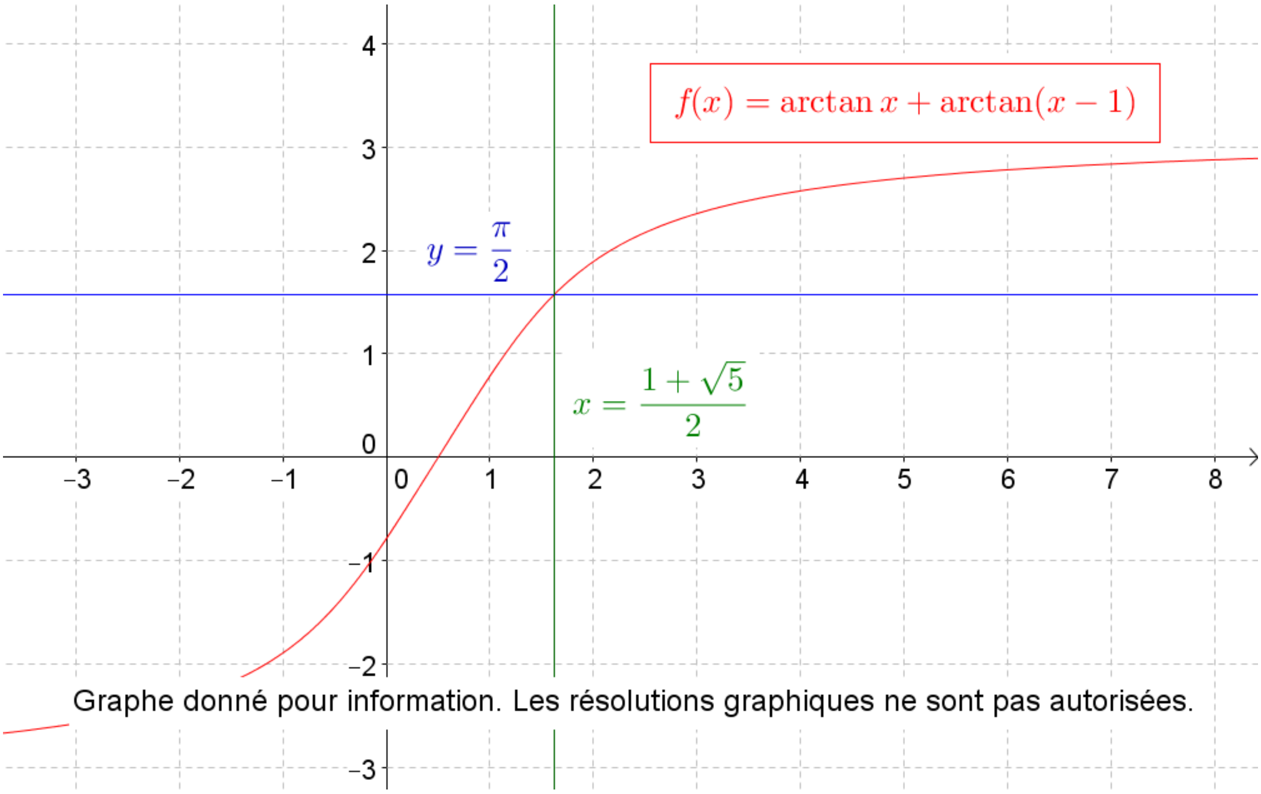
Finalement $\boxed{\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}}$ (1)

b) Soit $\arctan x + \arctan(x-1) = \dfrac{\pi}{2}$, en comparant avec (1), on déduit

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan(x-1) \Rightarrow \frac{1}{x} = x-1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La racine négative $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$ doit être rejetée car si $\alpha < 0 \Rightarrow \arctan \alpha < 0$, or $\dfrac{\pi}{2} > 0$

Conclusion : $\boxed{x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$



Le 2 janvier 08. Modifié le 12 novembre 2014 (Natacha Joukoff)

EXTRI238 – FACS, ULB, septembre 2007

Soit un triangle d'angles A, B et C et dont les côtés sont de longueurs a, b et c
Démontrer que

$$(a+b)\tan\frac{A-B}{2}+(b+c)\tan\frac{B-C}{2}+(c+a)\tan\frac{C-A}{2}=0$$

Soit $E=(a+b)\tan\frac{A-B}{2}+(b+c)\tan\frac{B-C}{2}+(c+a)\tan\frac{C-A}{2}$

On réarrange : $E=a\left(\tan\frac{A-B}{2}+\tan\frac{C-A}{2}\right)+b\left(\tan\frac{A-B}{2}+\tan\frac{B-C}{2}\right)+c\left(\tan\frac{B-C}{2}+\tan\frac{C-A}{2}\right)$

Utilisons la relation $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$\to E=a\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}+b\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}}+c\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

La formule des sinus dans le triangle quelconque dit que $\begin{cases} b=a\dfrac{\sin B}{\sin A} \\ c=a\dfrac{\sin C}{\sin A}\end{cases}$

$$\to\frac{E}{a}=\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}+\frac{\sin B}{\sin A}\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin A}\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

Désignons par D le dénominateur commun : $D=\sin A\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$

$$\to\frac{E.D}{a}=\sin A\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C-B}{2}+\sin B\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}+\sin C\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B-A}{2}$$

$$\to\frac{2E.D}{a}=\sin A\sin(C-B)+\sin B\sin(A-C)+\sin C\sin(B-A)$$

Or $A+B+C=\pi\to\begin{cases} C=\pi-(A+B)\to\sin C=\sin(A+B) \\ C-B=\pi-(A+2B)\to\sin(C-B)=\sin(A+2B) \\ A-C=2A+B-\pi\to\sin(A-C)=-\sin(2A+B)\end{cases}$

Donc $\dfrac{2E.D}{a}=\sin A\sin(A+2B)-\sin B\sin(2A+B)+\sin(A+B)\sin(B-A)$

Développons :

$$\frac{2E.D}{a}=\sin A(\sin A\cos 2B+\cos A\sin 2B)-\sin B(\sin 2A\cos B+\cos 2A\sin B)$$
$$+(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin B\cos A-\cos B\sin A)$$
$$=\sin^2 A(\cos^2 B-\sin^2 B)+\cancel{2\sin A\cos A\sin B\cos B}$$
$$\cancel{-2\sin A\cos A\sin B\cos B}-\sin^2 B(\cos^2 A-\sin^2 A)+\sin^2 B\cos^2 A-\cos^2 B\sin^2 A$$
$$=\cancel{\sin^2 A\cos^2 B}-\cancel{\sin^2 A\sin^2 B}-\cancel{\sin^2 B\cos^2 A}+\cancel{\sin^2 B\sin^2 A}+\cancel{\sin^2 B\cos^2 A}-\cancel{\cos^2 B\sin^2 A}$$
$$=0\to\boxed{E=0}$$

Le 2 janvier 08.

EXTRI239 – FACS, ULB, septembre 2007

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$$

$2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$

Divisons par $\cos^2 x \rightarrow 2\tan^2 + 4\tan x - 4 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Or $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\rightarrow 2\tan^2 + 4\tan x - 4 = 1 + \tan^2 x \rightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$

$\rightarrow (\tan x - 1)(\tan x + 5) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 & \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \\ \tan x = -5 & \rightarrow \boxed{x = -1.373 + k\pi} \end{cases}$$

Le 2 janvier 08.