Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 24

EXTRI240-EXTRI249

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI240 – FACSA, ULG, Liège, juillet 08

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}\left(1 + \cos x + \cos 2x\right)$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée par Frédéric Garcet

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}\left(1 + \cos x + \cos 2x\right)$$

$$\left(\underbrace{\sin x + \sin 3x}_{Simpson}\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\left(\underbrace{1 + \cos 2x}_{Carnot} + \cos x\right)$$

$$2\sin 2x.\cos\left(-x\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\left(2\cos^2 x + \cos x\right)$$

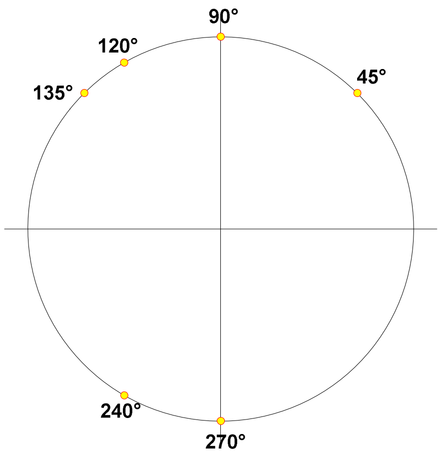
$$2\cos x \sin x\left(2\cos x + 1\right) - \sqrt{2}\cos x\left(2\cos x + 1\right) = 0$$

$$\cos x\left(2\cos x + 1\right)\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\underline{1)\ \cos x = 0} \quad \rightarrow \quad x = 90° + k180°$$

$$\underline{2)\ \cos x = -\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad x = \pm 120° + k360°$$

$$\underline{3)\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \rightarrow \begin{cases} x = 45° + k360° \\ x = 135° + k360° \end{cases}$$



Le 2 juillet 08.

EXTRI241 – FACSA, ULG, Liège, juillet 08

Dans un demi-cercle de rayon R, on trace trois cordes C_1, C_2 et C_3 parallèles à la base rectiligne du demi-cercle.

La distance h entre C_1 et C_2 est égale à la distance entre C_2 et C_3.

On mesure $C_1 = 8\ m, C_2 = 16\ m$ et $C_3 = 20\ m$.

Quel est le rayon R du demi-cercle?

Déterminer les angles α_1, α_2 et α_3 représentés sur la figure 1.

Donner vos réponses avec 4 chiffres après la virgule.

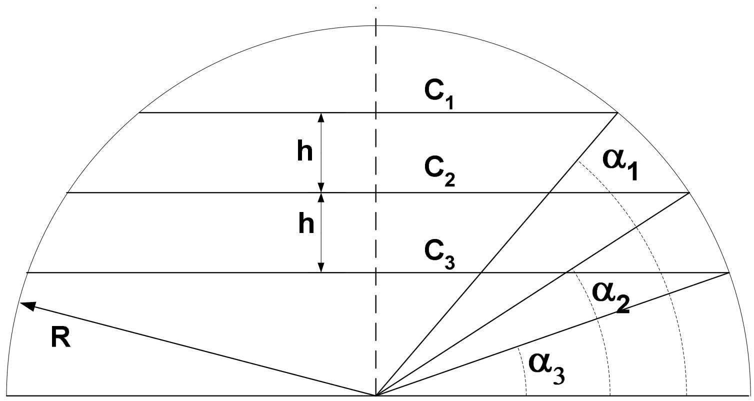
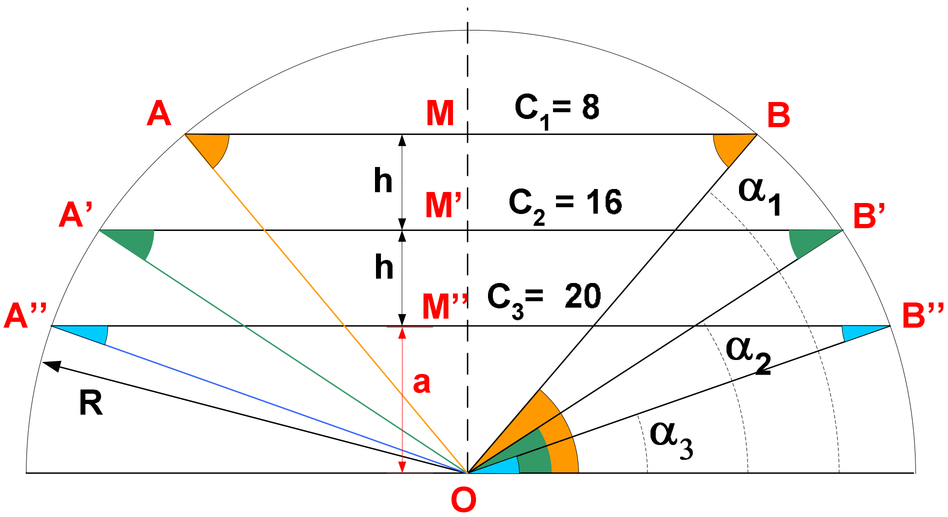


Figure 1 : Demi-cercle de rayon R avec ces trois cordes C_1, C_2, C_3.

Solution proposée par Frédéric Garcet



$$\left.\begin{array}{l}\triangle \text{ rect } OAM: \quad \cos\alpha_1 = \dfrac{4}{R} \text{ et } R^2 = (2h+a)^2 + 4^2 \\ \triangle \text{ rect } OA'M': \cos\alpha_2 = \dfrac{8}{R} \text{ et } R^2 = (h+a)^2 + 8^2 \\ \triangle \text{ rect } OA''M'': \cos\alpha_3 = \dfrac{10}{R} \text{ et } R^2 = a^2 + 4^2\end{array}\right\} \text{Système de trois équations à trois inconnues}$$

$$\begin{cases} R^2 = 4h^2 + 4ha + a^2 + 16 & (1) \\ R^2 = h^2 + 2ah + a^2 + 64 & (2) \\ R^2 = a^2 + 100 & (3) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (1)-(2) \to 0 = 3h^2 + 2ah - 48 & (4) \\ (2)-(3) \to 0 = h^2 + 2ah - 36 & (5) \\ R^2 = a^2 + 100 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (4)-(5) \to 0 = 2h^2 - 12 \to h^2 = 6 \to h = \sqrt{6} \\ 0 = h^2 + 2ah - 36 \\ R^2 = a^2 + 100 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} h = \sqrt{6} \\ a = \dfrac{15}{2\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \\ R^2 = \dfrac{225}{6} + 100 = \dfrac{825}{6} = \dfrac{275}{6} \to \boxed{R = \sqrt{\dfrac{275}{2}} \simeq 11.7260} \end{cases}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{4}{R} = \frac{4}{11.726} \to \boxed{\alpha_1 = 70.0548°}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{8}{R} = \frac{8}{11.726} \to \boxed{\alpha_2 = 43.9809°}$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{10}{R} = \frac{10}{11.726} \to \boxed{\alpha_3 = 31.4822°}$$

Le 2 juillet 08.

EXTRI242 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08

Montrer qu'un triangle est équilatéral quand on a :

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \\ \sin B \sin C = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

A, B et C sont les angles ; a, b et c sont les côtés

Solution proposée par Steve Tumson

On peut réécrire la première relation : $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Leftrightarrow a^2b + a^2c = b^3 + c^3$

Règle du sinus : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Leftrightarrow a = \dfrac{b \sin A}{\sin B} = \dfrac{c \sin A}{\sin C}$

On peut donc réécrire le terme de gauche de l'équation :

$$a^2b + a^2c = b^3 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + c^3 \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$$

Par identification, il faut :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = 1 \\ \dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 C} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = C}$$

Or on sait que $\sin B \sin C = \dfrac{3}{4}$ et on en déduit :

$$\sin^2 B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{B = C = 60° \Rightarrow A = 60°}$$

Le triangle est donc bien équilatéral !

Le 23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXTRI243 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08

Résoudre l'équation : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

Solution proposée par Steve Tumson

Classique :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos x + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Le 23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXTRI244 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est vraie, ou faux si l'affirmation est fausse.

1)"Dans un triangle il y a toujours deux angles dont la somme est supérieure ou égale à 120°"

2)"L'expression $\cos^4 a - \sin^4 a$ change exactement 4 fois de signe dans l'intervalle $-\pi < a < \pi$"

3)"L'équation suivante est une identité : $\cos(a-b)\cos(a+b) - \sin(a-b)\sin(a+b) = \sin(2a)$"

4)"Si le triangle ABC est rectangle en A, on a $(\sin B + \cos C)/(\cos B + \sin C) = tgB$"

Solution proposée par Steve Tumson

1) VRAI

En effet, on peut aussi écrire : "Dans un triangle il y a toujours un angle dont la valeur est inférieure ou égale à 60° ".
Or, dans le cas du triangle équilatéral, tous les angles valent 60°et si on augmente un angle, il y en aura d'office un des deux autres qui sera plus petit que 60° !

2) VRAI

$$\begin{aligned}\cos^4 a - \sin^4 a &= \left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right)\\ &= \left(\cos a - \sin a\right)\left(\cos a + \sin a\right)\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) = 0\\ &\Rightarrow \begin{cases}\cos a = \sin a & \to 2 \text{ solutions } \in [-\pi,\pi]\\ \cos a = -\sin a & \to 2 \text{ solutions } \in [-\pi,\pi]\end{cases}\\ &\Rightarrow \boxed{4 \text{ solutions } \in [-\pi,\pi]}\end{aligned}$$

3) FAUX

$$\begin{aligned}\cos(a-b)\cos(a+b) - \sin(a-b)\sin(a+b) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ &= \cos(\alpha+\beta) = \cos(2a)\end{aligned}$$

4) VRAI

$$A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} - B$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\sin B + \cos C)/(\cos B + \sin C) &= \frac{\left(\sin B + \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right)}{\left(\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right)}\\ &= \frac{\sin B + \sin B}{\cos B + \cos B} = \frac{2\sin B}{2\cos B}\\ &= \tan(B)\end{aligned}$$

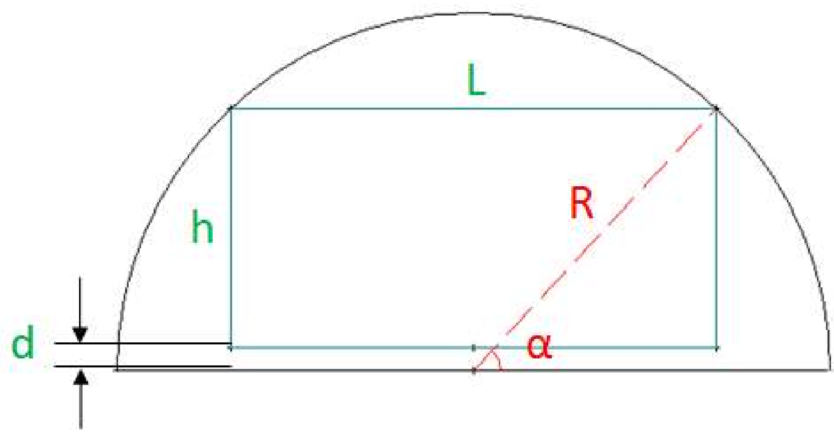
Le 23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXTRI245 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08

Un train de transport doit passer à travers un tunnel dont la section est un demi cercle de rayon r (=5 mètres).
Le wagon du train a une longueur de 50 mètres, une hauteur de h mètres et une largeur de l mètres.
Le train roule au milieu du tunnel et la hauteur du rail et des roues est de d (=0,5 mètres).
On vous demande de trouver h et l tel que le volume du wagon qui passe encore de justesse dans le tunnel, est maximal.

1/ Faites un croquis de la section du tunnel et du train.
2/ Donnez les formules pour h et l et le volume V en fonction d'un paramètre α que l'on optimisera.
3/ Dérivez $V(\alpha)$ par rapport à α pour trouver l'extremum
4/ Calculez le volume optimal à 0,1 m^3 près.

Solution proposée par Steve Tumson



2) Si nous prenons le paramètre alpha comme l'angle polaire désignant la position de l'abscisse curviligne du coin du wagon touchant de justesse le tunnel, on écrit :

$$\cos\alpha = \frac{L/2}{R} \Leftrightarrow L = 2R\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{h+d}{R} \Leftrightarrow h = R\sin(\alpha) - d$$

$$\Rightarrow V = 50hL = 100R\cos\alpha\left(R\sin\alpha - d\right) \Leftrightarrow \boxed{V = 50R^2\sin(2\alpha) - 100Rd\cos(\alpha)}$$

3) On trouve un second degré en sinus alpha :

$$\frac{dV}{d\alpha} = 100Rd\sin(\alpha) + 100R^2\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{R}\sin\alpha + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{R}\sin\alpha + 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2(\alpha) + \frac{d}{R}\sin\alpha + 1 = 0$$

$$\rho = \left(\frac{d}{R}\right)^2 + 8 \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2\end{cases} = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 + 8}\right) \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha_1 \simeq 0,73 & \rightarrow \boxed{\alpha = 46,886°} \\ \sin\alpha_2 \simeq -0,68 & \rightarrow \text{Rejeté car } 0 \leq \alpha \leq 90°\end{cases}$$

N.B : Comme on le sait tous, le plus grand rectangle (point de vue surface) inscriptible dans un cercle est en fait un carré (donc en coordonnée polaire, notre alpha = 45°). La seule différence réside ici dans le fait qu'il faut tenir compte des rails et des roues, la longueur d ! Celle-ci étant petite, il est naturel de retrouver un résultat proche de 45° !

4) Il suffit de remplacer les valeurs :

$$V_{\max}(\alpha) = V(\alpha = 46,886°) \simeq 50 \times 5^2 \times \sin(93,772°) - 100 \times 5 \times 0,5 \times \cos(46,886°)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\max} \simeq 1076,4m^3}$$

Le 23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXTRI246 – FMS, Mons, juillet 08

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$2\sin(x)-3\cos(x)=3$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

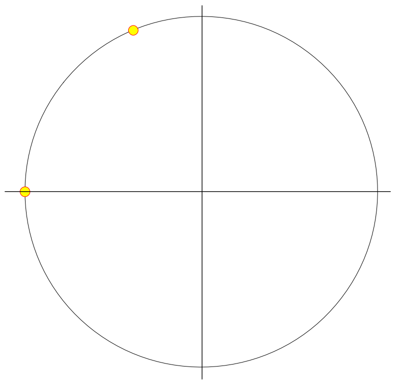
Solution proposée par Fabienne ZOETARD

$$2\sin x-\cos x=3 \rightarrow \frac{2}{3}\sin x-\cos x=1$$

$$\text{Soit } \tan\varphi=\frac{2}{3} \text{ où } \varphi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \varphi=0.5880$$

$$\rightarrow \sin\varphi\sin x-\cos\varphi\cos x=\cos\varphi \rightarrow -\cos(x+\varphi)=\cos\varphi \rightarrow \cos(x+\varphi)=\cos(\pi-\varphi)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+\varphi=\pi-\varphi+2k\pi \\ x+\varphi=-\pi+\varphi+2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pi-2\varphi+2k\pi \\ x=-\pi+2k\pi \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1.9655+2k\pi \\ x=-\pi+2k\pi \end{cases}}$$



Le 25 juillet 08.

EXTRI247 – FMS, Mons, juillet 08

Démontrer l'identité suivante :

$$\tan(2a)+\frac{1}{\cos(2a)}=\frac{\cos(a)+\sin(a)}{\cos(a)-\sin(a)}$$

Solution proposée par Fabienne ZOETARD

CE: $\sin a \neq \cos a$ et $\cos 2a \neq 0$

$$\tan 2a+\frac{1}{\cos 2a}\overset{?}{=}\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}\rightarrow\frac{\sin 2a+1}{\cos 2a}\overset{?}{=}\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$$

$$\rightarrow\frac{2\sin a\cos a+1}{\cos^2 a-\sin^2 a}\overset{?}{=}\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$$

$$\rightarrow(\cos a-\sin a)(2\sin a\cos a+1)\overset{?}{=}(\cos a+\sin a)^2(\cos a-\sin a)$$

$$\rightarrow 2\sin a\cos a+1\overset{?}{=}(\cos a+\sin a)^2\rightarrow 2\sin a\cos a+1\overset{?}{=}\underbrace{\cos^2 a+\sin^2 a}_{=1}+2\sin a\cos a$$

$$\rightarrow 2\sin a\cos a+1=1+2\sin a\cos a \qquad \text{OK}$$

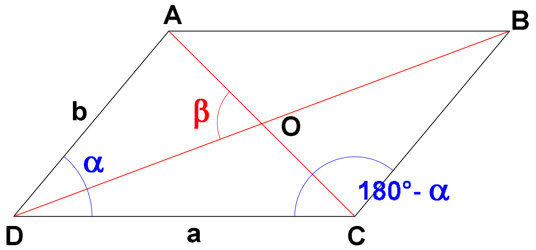
Le 25 juillet 08.

EXTRI248 – FMS, Mons, juillet 08

Dans un parallèlogramme, connaissant les mesures de deux côtés (a et b) et de l'angle qu'ils forment entre eux (α), trouverles expressions des longueurs des diagonales et des angles formés par celles-ci, en fonction de a, b et α.

Calculer ces valeurs pour un losange dont la mesure d'un côté vaut 8 m et celle d'un angle, 30°

Solution proposée par Fabienne ZOETARD



$| AC |^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ Dans le triangle ACD

$| DB |^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180-\alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ Dans le triangle BDC

Et dans le triangle AOD :

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}| AC |\right)^2 + \left(\frac{1}{2}| BD |\right)^2 - 2.\frac{1}{2}| AC |.\frac{1}{2}| BD |\cos\beta$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\right) + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.\cos\beta$$

$$\to \cancel{\frac{1}{2}}b^2 = \cancel{\frac{1}{2}}a^2 - \cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.\cos\beta$$

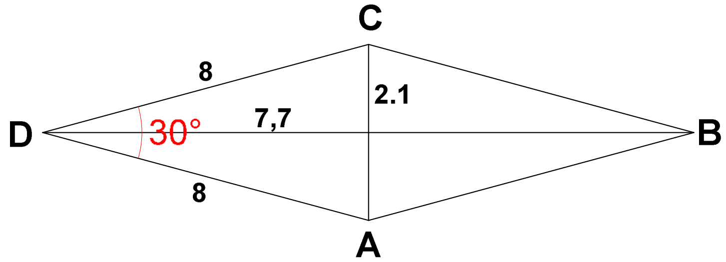
$$\to \cos\beta = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$$

Appliquons les formules trouvées

$| AC |^2 = 64 + 64 - 2\times 8\times\cos 30 = 128 - 64\sqrt{3} \simeq 17.1488 \to \boxed{| AC | = 4.1411}$

$| BD |^2 = 64 + 64 + 2\times 8\times\cos 30 = 128 + 64\sqrt{3} \simeq 238.85 \quad \to \boxed{| BD | = 15.455}$

$\cos\beta = 0$ (car $a = b$) $\to \beta = 90°$. Ce que nous savions.

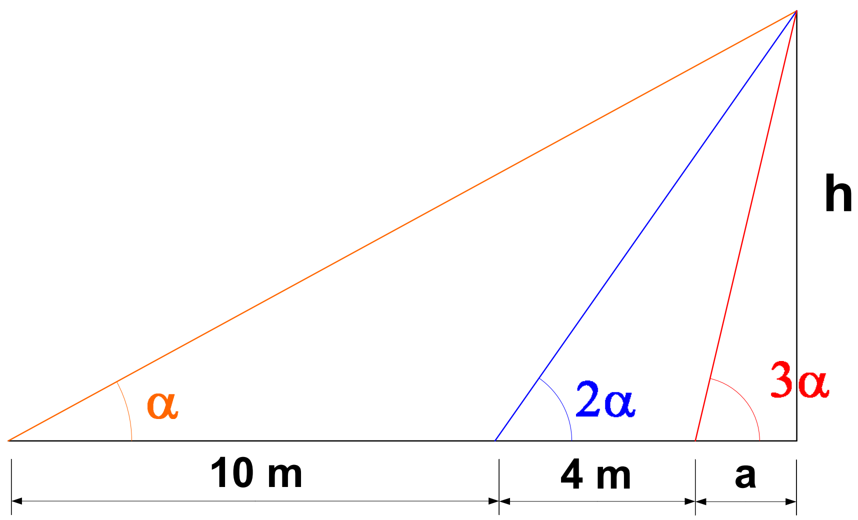


Le 25 juillet 08.

EXTRI249 – FMS, Mons, juillet 08

Un système motorisé se déplace, au ras du sol, en direction d'une tour de hauteur inconnue.
A une certaine distance de la tour, il voit le sommet de celle-ci sous un angle α par rapport à l'horizontale.
Après avoir parcouru 10 m, il voit le sommet de la tour sous un angle double du premier.
Après avoir roulé 4 m de plus, il le voit sous un angle 3α.
Déterminé la hauteur de la tour.

Solution proposée par Fabienne ZOETARD



$0 < \alpha < 90° \quad \rightarrow \quad \tan\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} h = (10+4+a)\tan\alpha \\ h = (4+a)\tan 2\alpha \\ h = a\tan 3a \end{cases}$$

Posons $t = \tan\alpha$.

On a : $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2}+t}{1-t.\dfrac{2t}{1-t^2}} = \frac{2t+t(1-t^2)}{1-t^2-2t^2} = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} h = (14+a)t \\ h = (4+a)\dfrac{2t}{1-t^2} \\ h = a.\dfrac{3t-t^3}{1-3t^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = (14+a)t & (1) \\ (14+a)\cancel{t}(1-t^2) = (4+a)2\cancel{t} & (2) \\ (14+a)\cancel{t}(1-3t^2) = a\cancel{t}(3-t^2) & (3) \end{cases}$$

On combine les deux dernières équations pour obtenir le système

$(2)-(3) \rightarrow (14+a)(1-t^2-1+3t^2) = 8+2a-3a+at^2$

$\rightarrow (14+a)2t^2 = 8-a+at^2 \rightarrow (28+a)t^2 = 8-a \rightarrow t^2 = \dfrac{8-a}{28+a}$

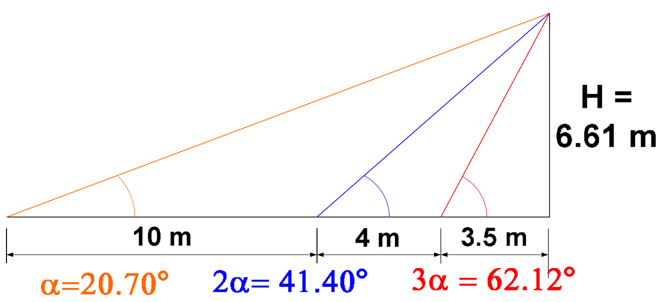
Avec $a > 0$ et $28+a$, on a donc : $t = \sqrt{\dfrac{8-a}{28+a}}$

On remplace dans (2) : $(14+a)\left(1-\dfrac{8-a}{28+a}\right) = 2(4+a) \rightarrow (14+a)\dfrac{28+a-8+a}{28+a} = 2(4+a)$

$\rightarrow (14+a)(10+a) = (4+a)(28+a) \rightarrow 140+10a+14a+\cancel{a^2} = 112+28a+4a+\cancel{a^2}$

$\rightarrow (32-24)a = 28 \rightarrow \boxed{a = \dfrac{7}{2}} \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{8-\frac{7}{2}}{28+\frac{7}{2}}} = \sqrt{\dfrac{16-7}{56+7}} = \sqrt{\dfrac{9}{63}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7} \rightarrow \boxed{\alpha = 20.7048°}$

$\rightarrow h = \dfrac{7}{2}\tan 20.7048 \rightarrow \boxed{h = 6.6144\ m}$



Le 25 juillet 08.