Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 30

EXTRI300-EXTRI309

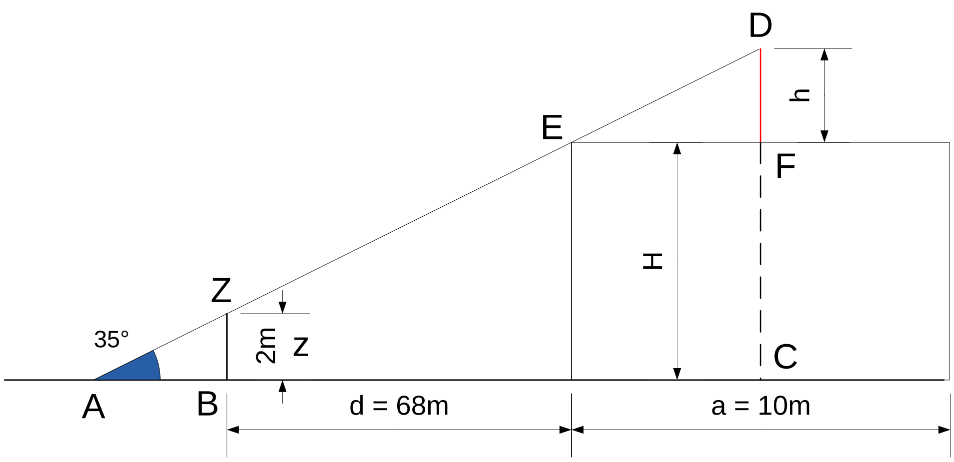
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Août 2010

EXTRI300 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 10.

Une antenne GSM de hauteur h a été installée au centre et à la verticale du toit supposé plat d'un bâtiment de hauteur H, et de base carrée de côté a.
Un promeneur s'éloigne de ce bâtiment selon une direction perpendiculaire à l'une des façades, dans le plan vertical médian à cette dernière.
Il se retourne régulièrement car il souhaite observer le sommet de l'antenne. Il s'arrête finalement en un point limite tel qu'il aperçoit émerger uniquement le sommet de l'antenne.
En ce point, situé à une distance d et surélevé verticalement de z par rapport au pied du building, il voit le sommet de l'antenne sous une angle α par rapport à l'horizontale.
Sachant que $a = 10$ m, $d = 68$ m, $z = 2$ m et $\alpha = 35°$, calculer la hauteur de l'antenne ainsi que celle du sommet de l'antenne par rapport au pied du bâtiment.



La figure représente la situation selon une coupe suivant le plan médian.

Triangle $ABZ \rightarrow 2 = |AB|.\tan 35°$

Triangle $ACD \rightarrow |DC| = .|AC|.\tan 35° = (|AB| + 68 + 5)\tan 35°$

$= |AB|.\tan 35° + 73\tan 35° = 2 + 51.11 = 53.11\,\text{m}.$

Le sommet de l'antenne est donc à 53.11 m

Triangle $EFD \rightarrow |DC| = |EF|.\tan 35° = 5.\tan 35° = 3.5\,\text{m}$

La hauteur de l'antenne est de 3.5 m.

Le 15 août 2010.

EXTRI301 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

Vérifier que

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan a.\tan 2a.\tan 3a$$

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan a \tan 2a \tan 3a$$

$$\tan 3a\left(1 - \tan a \tan 2a\right) = \tan 2a + \tan a$$

$$\frac{\tan 2a + \tan a}{\cancel{1 - \tan a \tan 2a}}\left(\cancel{1 - \tan a \tan 2a}\right) = \tan 2a + \tan a$$

$$\tan 2a + \tan a = \tan 2a + \tan a \qquad \text{CQFD}$$

Le 30 septembre 2010 .

EXTRI302 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

Résoudre l'équation :

$$2\cos^3 x + 2\sin^2 x\cos x = 5\sin x\cos^2 x$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par David Hamoir

$$\begin{aligned}
&2\cos^3 x + 2\sin^2 x\cos x = 5\sin x\cos^2 x\\
&\Rightarrow 2\cos^3 x + 2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x = 5\sin x\cos^2 x\\
&\Rightarrow 2\cos^3 x + 2\cos x - 2\cos^3 x = 5\sin x\cos^2 x\\
&\Rightarrow 2\cos x = 5\sin x\cos^2 x\\
&\Rightarrow 2\cos x - 5\sin x\cos^2 x = 0\\
&\Rightarrow \cos x\left(2-5\sin x\cos x\right) = 0
\end{aligned}$$

1ère solution :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

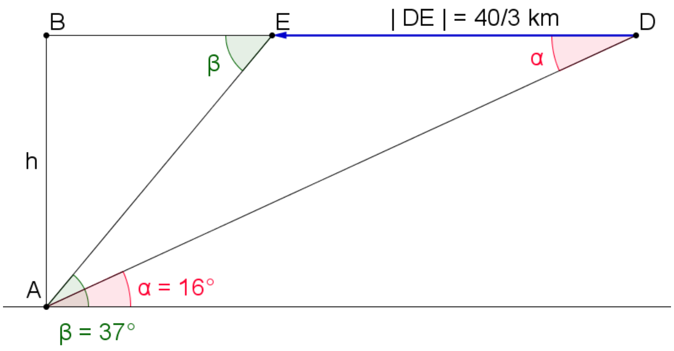
2ème solution :

$$\begin{aligned}
&2-5\sin x\cos x = 0\\
&\Rightarrow 2 = \frac{5}{2}\sin(2x)\\
&\Rightarrow \frac{4}{5} = \sin(2x)\\
&\Rightarrow \begin{cases} 2x = \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi & \Rightarrow x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} + k\pi \simeq 0.4637 + k\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi & \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} + k\pi \simeq 1.1072 + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Le 20 septembre 2010

EXTRI303 – – FACSA, ULG, Liège, Septembre 10.

Un avion s'approche de sa base. On suppose qu'il vole à une altitude constante et une vitesse constante par rapport au sol de 800 km/h. L'angle d'élévation par rapport à la base est de 16°. Un minute plus tard, il est perçu par la base à un angle de 37°.
Calculer l'altitude de vol de l'avion.



En une minute l'avion parcourt la longueur $|DE| = \dfrac{40}{3}$ km

Nous avons alors immédiatement :

$$h = \left(x + \frac{40}{3}\right)\tan 16 = x \tan 37$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{40}{3} \cdot \frac{\tan 16}{\tan 37 - \tan 16}$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{40}{3} \cdot \frac{\tan 16 . \tan 37}{\tan 37 - \tan 16} = 6.171 \text{ km}$$

Le 30 septembre 2010. Modifié le 1 mai 2011 (Michael Faufra)

EXTRI304 – FACS - ULB – Bruxelles – Juillet 10.

Quels sont les triples (x, y, z) de nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} x+y=2z \\ \sin x+\sin y=2\sin z \end{cases}$$

Solution proposée par Carine Demesmaeker

$$\begin{cases} x+y=2z \\ \sin x+\sin y=2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x+y}{2} & (1) \\ \sin x+\sin y=2\sin z & (2) \end{cases}$$

(2) $\quad : \sin x+\sin y=2\sin z$

$(1)\to(2)$ $\quad : \sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}=0 \qquad (\text{Simpson})$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-1\right)=0$$

<u>1er cas</u> $: \sin\dfrac{x+y}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2}=k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+y=2k\pi \quad (3)$$

$$\begin{cases}(1)\\(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ x+y=2k\pi \end{cases}$$

si : $z\neq 2k\pi$ système impossible

si : $z=2k\pi \Leftrightarrow y=2k\pi-x$

$$\Rightarrow \quad S_1=\{(x, 2k\pi-x, k\pi), k\in\mathbb{Z}\}$$

<u>2ème cas</u> $: \cos\dfrac{x-y}{2}=1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2}=2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-y=4k\pi \quad (4)$$

$$\begin{cases}(1)\\(4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z & (a) \\ x-y=4k\pi & (b) \end{cases}$$

En faisant $(a)+(b)$, on obtient : $2x+2z+4k\pi \Leftrightarrow x=z+2k\pi$

En faisant $(a)-(b)$, on obtient : $2y=2z-4k\pi \Leftrightarrow y=z-2k\pi$

$$\Rightarrow \quad S_2=\{(z+2k\pi, z-2k\pi, z), k\in\mathbb{Z}\}$$

L'ensemble des triples de nombres réels vérifiant le système $=\boxed{S_1\cup S_2}$

Le 15 novembre 2010

EXTRI305 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Pour les affirmations suivantes, cochez quelle affirmation est vraie.

- Dans un triangle qui n'est pas isocèle, laquelle des mesures suivantes est la plus petite : la hauteur h, la médiane m ou la bissectrice d'un même sommet?

m □ b □ h □

- Dans l'intervalle $-\pi/2 < x < \pi/2$, l'équation $1-\cos 2x = 3\tan x$ possède exactement

1 solution □ 2 solutions □ 3 solutions □

- L'expression $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$ est identiquement égale à

$\tan a - \tan b$ □ $\tan a + \tan b$ □ $\tan b - \tan a$ □

- Si dans un triangle ABC on a que $\sin A = 2\sin B\cos C$, alors

$B < C$ □ $B = C$ □ $B > C$ □

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) La hauteur qui défnit la distance du sommet au côté opposé.

2) $1-\cos 2x = 3\tan x \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 3\tan x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \to x = 0 \text{ dans } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right] \\ 2\sin x\cos x = 3 \to \sin 2x = 3 > 1 \text{ donc pas de solution} \end{cases}$

3) $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} = \dfrac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\frac{1}{2}.2\cos a.\cos b} = \tan a + \tan b$

4) $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$

On a alors : $\sin B\cos C + \cos B\sin C = 2\sin B\sin C \to \cos B\sin C = \sin B\cos C$

Et donc $B = C$

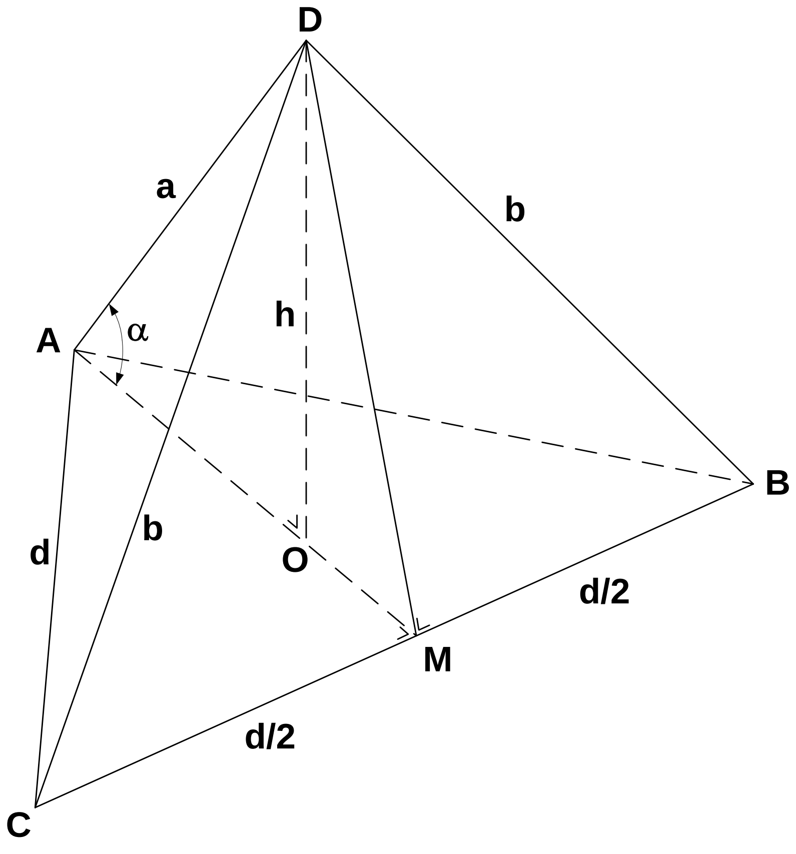
Le 7 septembre 2010

EXTRI306 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

On vole dans un ballon D à une hauteur h au-dessus du sol, que l'on veut déterminer.
Au sol, trois balises A, B et C, forment un triangle équilatéral ABC de côté d.
Depuis le ballon D, on peut mesurer les distances $a = DA, b = DB, c = DC$ et on remarque que deux d'entre elles sont égales $(b = c)$.

1) Faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités a, b, c, d et h, ainsi que les variables intermédiaires que vous utiliserez dans vos calculs.
2) Donnez des formules qui permettent de déduire la hauteur h en fonction de ces variables.
3) Calculez la hauteur h à un mètre près pour les ensembles de données suivantes : pour $d = 300$ m, $a = b = c = 200$ m et pour $d = 300$ m, $a = 450$ m, $b = c = 300$ m.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS



Triangle BDC : $DM^2 = b^2 - \frac{d^2}{4}$

Triangle AMC : $AM^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{3d^2}{4}$

Triangle ADM : $DM^2 = a^2 + AM^2 - 2a.AM.\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + AM^2 - DM^2}{2a.AM}$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + \frac{3d^2}{4} - b^2 + \frac{d^2}{4}}{2a.\frac{\sqrt{3}d}{2}} = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{a\sqrt{3}.d}$$

Triangle ADO : $\sin\alpha = \frac{h}{a}$, $h = a.\sin\alpha$

<u>1er cas</u> :

$$\left.\begin{array}{l} a = b = c = 2 \text{ hm} \\ d = 3 \text{ hm} \end{array}\right\} \text{ ce qui donne } \qquad \cos\alpha = \frac{9}{2\sqrt{3}.3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$h = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 \text{ hm} = 100 \text{ m}$$

<u>2ème cas</u> :

$$\left.\begin{array}{l} a = 4.5 \text{ hm} \\ b = c = 3 \text{ hm} \\ d = 3 \text{ hm} \end{array}\right\} \text{ce qui donne } \qquad \cos\alpha = \frac{(9/2)^2}{(9/2).\sqrt{3}.3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$h = \frac{9}{2}\sin\frac{\pi}{6} = 2.25 \text{ hm} = 225 \text{ m.}$$

Le 7 septembre 2010

EXTRI307 – FACS - ULB – Bruxelles – Juillet 10.

a) Exprimer $\sin^3 x$ en fonction de $\sin 3x$ et $\sin x$

b) Démontrer que

$$27\sin^3 9° + 9\sin^3 27° + 3\sin^3 81° + \sin^3 243° = 20\sin 9°$$

Solution proposée par Carine Demesmaeker

On considère comme connue la formule : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ sinon voir ci-dessous.

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Leftrightarrow 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x \Leftrightarrow \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \quad (1)$$

On applique (1) à chaque terme du 1er membre de l'identité :

$$\begin{aligned}
&27\sin^3 9° + 9\sin^3 27° + 3\sin^3 81° + \sin^3 243° \\
&= \frac{27}{4}(3\sin 9° - \sin 27°) + \frac{9}{4}(3\sin 27° - \sin 81°) + \frac{3}{4}(3\sin 81° - \sin 243°) + \frac{1}{4}(3\sin 243° - \sin 729°) \\
&= \frac{81}{4}\sin 9° - \cancel{\frac{27}{4}\sin 27°} + \cancel{\frac{27}{4}\sin 27°} - \cancel{\frac{9}{4}\sin 81°} + \cancel{\frac{9}{4}\sin 81°} - \cancel{\frac{3}{4}\sin 243°} + \cancel{\frac{3}{4}\sin 243°} - \frac{1}{4}\sin 729° \\
&= \frac{81}{4}\sin 9° - \frac{1}{4}\sin 729° \qquad \text{or} \qquad \sin 729° = \sin 9° \\
&= \frac{80}{4}\sin 9° = 20\sin 9°
\end{aligned}$$

Démonstration de $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\begin{aligned}
\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x \\
&= 2\sin x\cos^2 x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) \\
&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

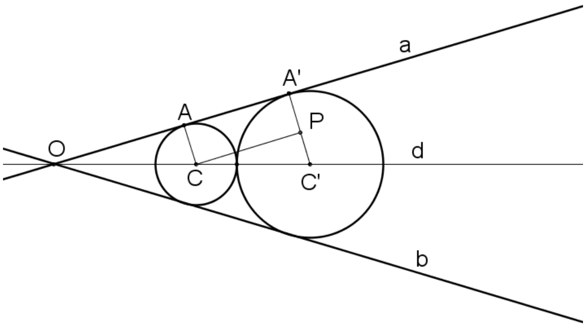
Le 15 novembre 2010

EXTRI308 – FACS - ULB – Bruxelles – Septembre 10.

Les tangentes extérieures à deux cercles tangents extérieurement font un angle $\alpha\left(0<\alpha<\pi\right)$.

Que vaut le rapport $\frac{R}{r}$ des rayons de ces deux cercles? $\left(\text{on suppose } r<R\right)$

Solution proposée par Carine Demesmaeker



<u>On a</u> $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et de rayon r

$\mathcal{C}''$ le cercle de centre C' et de rayon R

Les tangentes communes a et b qui sont sécantes en O $\left(a \not\parallel b \text{ car } r < R\right)$

Les points de contact a avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont respectivement notés A et A'

<u>On construit</u>

d la droite passant par O, C et C'. Elle coupe l'angle α en deux angles $\frac{\alpha}{2}$ (par symétrie)

e une droite passant par C // a qui coupe $[A'C']$ en P.

<u>On considère le triangle $CC'P$</u>

L'angle $\widehat{CPC'} = 90°$ car $\begin{cases} CP // a \text{ par construction;} \\ C'P = C'A' \perp \text{ car dans un cercle toute tangente est} \\ \text{perpendiculaire au rayon en son point de tangence.} \end{cases}$

L'angle $\widehat{PCC'} = \frac{\alpha}{2}$ car les angles correspondants définis par deux parallèles et un sécante ont même amplitude : $\widehat{PCC'} = \widehat{AOC}$

$|CC'| = r + R$

$|PC'| = |A'C'| - |A'P|$ car les points sont alignés.

$= R - r$ car par construction, $|A'P'| = |CA| = r$

<u>Dans le triangle rectangle $CC'P$</u>, on a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|PC'|}{|CC'|} = \frac{R-r}{R+r} \Leftrightarrow (R+r)\sin\frac{\alpha}{2} = R - r \Leftrightarrow R\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) = r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{R}{r} = \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

EXTRI309 – FACS - ULB – Bruxelles – Septembre 10.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin 8x - \sin 6x - \cos 8x \sin 2x = 0$$

Solution proposée par Carine Demesmaeker

$$\sin 8x - \sin 6x - \cos 8x \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x \cos 7x - \cos 8x . 2\sin x \cos = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x \left(\cos 7x - \cos 8x \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x \left(\cos 7x - \frac{\cos 9x + \cos 7x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 9x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \left(\cos 7x - \cos 9x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \left(-2\sin 8x \sin(-x)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x \sin 8x = 0$$

<u>1er cas</u> : $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>2éme cas</u> : $\sin 8x = 0 \Leftrightarrow 8x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}$

Finalement : $\boxed{S = \left\{\dfrac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

15 novembre 2010