Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 31

EXTRI310-EXTRI319

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans

Décembre 2010

EXTRI310 – Compléments.

Démontrer les identités suivantes :

a) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad \forall x \in [-1;0[\cup]0,1]$

d) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \forall x \in]-1,1[$

e) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ $\quad \forall x \in [-1,1]$

f) $\cos(2\arcsin x) = 1-2x^2$ $\quad \forall x \in [-1,1]$

g) $\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \dfrac{1}{2}(1-x)$ $\quad \forall x \in [-1,1]$

h) $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \dfrac{1}{2}(1+x)$ $\quad \forall x \in [-1,1]$

---

a) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme : $\arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos(\arctan x) \geq 0$

Donc : $\cos(\arctan x) = +\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x).\cos(\arctan x)$$

En vertu de a) : $\sin(\arctan x) = x.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

d) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

e) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x).\cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

f) $\cos(2\arcsin x) = 1-2x^2$

$$\cos(2\arcsin x) = 1-2\sin^2(\arcsin x) = 1-2x^2$$

g) $\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \dfrac{1}{2}(1-x)$

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \frac{1-\cos(\arccos x)}{2} = \frac{1}{2}(1-x)$$

h) $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) = \dfrac{1+\cos(\arccos x)}{2} = \dfrac{1}{2}(1+x)$

Le 30 décembre 2010.

EXTRI311 – Compléments.

Calculer

$$\text{a) } 2\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arctan\sqrt{3}\right)$$

$$\text{b) } \tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos\left(2\arctan 1\right)$$

$$\text{c) } \cos\left(\frac{2}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$ Moscou 1972

$$\text{d) } \sin^2\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$ Moscou 1972

Solution proposée par Laurent Martin

$$\text{a) } 2\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arctan\sqrt{3}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\pi=-2$$

$$\text{b) } \tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos\left(2\arctan 1\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=1$$

$$\text{c) } \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{cases}\arcsin\dfrac{4}{5}=2u & \Leftrightarrow \sin 2u=\dfrac{4}{5}\\[2ex] \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{v}{2} & \Leftrightarrow \tan\dfrac{v}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

On doit évaluer $\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v$

$$\text{Or }\begin{cases}\cos 2u=+\sqrt{1-\sin^2 2u}=\dfrac{3}{5}\\[2ex] 1+\cos 2u=2\cos^2 u\Leftrightarrow\begin{cases}\cos u=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\[2ex] \sin u=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\cos v=\dfrac{1-\tan^2\frac{v}{2}}{1+\tan^2\frac{v}{2}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{3}{5}\\[2ex] \sin v=\dfrac{2\tan\frac{v}{2}}{1+\tan^2\frac{v}{2}}=\dfrac{-1}{\frac{5}{4}}=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\cos(u-v)=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{6\sqrt{5}+\left(-4\sqrt{5}\right)}{25}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

e) $E=\sin^2\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$$\begin{cases} u=\arctan\frac{1}{2} & \Leftrightarrow \tan u=\frac{1}{2} \\ v=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) & \Leftrightarrow \tan v=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$E=\frac{2\sin^2(u-v)}{2}=\frac{1-\cos(2u-2v)}{2}$$

$$\text{Or}\begin{cases} \cos 2u=\frac{1-\tan^2 u}{1+\tan^2 u}=\frac{3/4}{4/5}=\frac{3}{5} \\ \cos 2v=\frac{8/9}{10/9}=\frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin 2u=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5} \\ \sin 2v=\frac{-2/3}{10/9}=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\cos(2u-2v)=\frac{3}{5}.\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)=0\Rightarrow E=\frac{1}{2}$$

Le 30 décembre 2010 .

EXTRI312 – EPL, UCL, Louvain.

1) La relation suivante s'exprime rationnellement en fonction de x. Quelle est cette expression?

$$E = \sin\left(2\operatorname{arccot} x\right) \qquad (1980)$$

2) Calculer

$$\sin\left(2\operatorname{arccot} 3\right) \qquad (1977)$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}+\arcsin\frac{1}{3}\right) \qquad (1981)$$

---

1) $E = \sin\left(2\operatorname{arccot}\ x\right) = 2\sin\operatorname{arccot} x.\cos\operatorname{arccot} x$

$$\begin{cases} \sin^2\operatorname{arccot} x = \dfrac{1}{1+\cot^2\operatorname{arccot} x} = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \sin\operatorname{arccot} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos\operatorname{arccot} x = \cot\operatorname{arccot} x.\sin\operatorname{arccot} x = x.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2x}{1+x^2}$$

2) a) Il suffit d'appliquer la relation ci-dessus :

$$\sin\left(2\operatorname{arccot} 3\right) = \frac{2\times 3}{1+3^2} = \frac{3}{5}$$

b) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}+\arcsin\frac{1}{3}\right) = \underbrace{\sin\arcsin\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{4}}\cos\arcsin\frac{1}{3}+\cos\arcsin\frac{1}{4}\underbrace{\sin\arcsin\frac{1}{3}}_{=\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{4}.\sqrt{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{12}\sqrt{8}+\frac{1}{12}\sqrt{15}$$

$$= \frac{1}{12}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{15}\right)$$

Le 20 septembre 2010

EXTRI313 – Complément.

Résoudre

$$\arccos(x-1)+\arcsin 0.6=\arctan 2$$

CE : $-1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2$

$\arccos(x-1)+\arcsin 0.6=\arctan 2$

$$\Rightarrow \cos(\arccos(x-1)+\arcsin 0.6)=\cos(\arctan 2)$$

$$\Rightarrow \cos(\arccos(x-1))\cos(\arcsin 0.6)-\sin(\arccos(x-1))\sin(\arcsin 0.6)=\cos(\arctan 2)$$

$$\Rightarrow (x-1)\sqrt{1-0.36}-\sqrt{1-(x-1)^2}.\frac{6}{10}=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}$$

car $\cos(\arcsin y)=\operatorname{sign}(y)\sqrt{1-y^2}$ $\left(\operatorname{sign}(y)=\text{signe de } y\right)$

et $\cos(\arctan y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

$$\Rightarrow \frac{8}{10}(x-1)-\frac{6}{10}\sqrt{2x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 4(x-1)-\sqrt{5}=3\sqrt{2x-x^2}$$

Cette relation entraîne une nouvelle condition :

$$4(x-1)-\sqrt{5}\ge 0\Rightarrow x\ge 1+\frac{\sqrt{5}}{4} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \left(4x-\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2=6\left(2x-x^2\right)$$

$$\Rightarrow 25x^2-\left(50+8\sqrt{5}\right)x+21+8\sqrt{5}=0$$

$$\Delta=\left(50+8\sqrt{5}\right)^2-100\left(21+8\sqrt{5}\right)=720=2^4 3^2 5$$

$$x=\frac{50+8\sqrt{5}\pm 12\sqrt{5}}{50}=\begin{cases} x=1-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}<1 \text{ A rejeter à cause de } (1)\\ x=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

---

28 septembre 2010

EXTRI314 – FPMS, UMONS, Mons, Juillet 2011.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 4\cos\frac{x}{2}.\cos x.\cos\frac{3x}{2}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x + 2\sin x\cos x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}$$

$$1)\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Il reste : } \sin 2x + \sin x = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$2)\ \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

$$\text{Il reste : } \sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2} \Rightarrow \sin\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3x}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \dfrac{3x}{2} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3x}{2}\right) + 2k\pi \Rightarrow \text{Impossible} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{S : \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Le 15 novembre 2010

EXTRI315 – FPMS, UMONS, Mons, Juillet 2011.

Vérifier l'identité

$$\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a.\cos 3a$$

$$\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cos 3a$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 a - 1\right)^2 - 1 + \cos^2 a = \cos a\left(4\cos^3 a - 3\cos a\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 a - 3\cos^2 a = 4\cos^4 a - 3\cos^2 a$$

Rappel :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

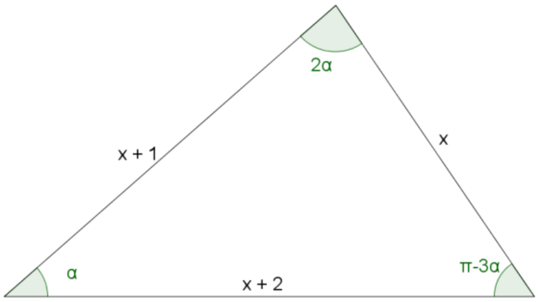
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Le 7 septembre 2011

EXTRI316 – FPMS, UMONS, Mons, Juillet 2011.

Calculer les longueurs des côtés d'un triangle quelconque sachant que celles-ci s'expriment par trois nombres entiers consécutifs et que, par ailleurs, le plus grand angle vaut le double du plus petit.



Les trois angles du triangle sont tels que : $\alpha < \pi - 3a < 2\alpha$. Ce qui permet de dire que $36° < \alpha < 45°$.

La formule des sinus donne : $\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{x+2}{\sin 2\alpha} \Rightarrow x = \dfrac{x+2}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x+2}{2x}$

La formule des cosinus donne : $x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)\cos\alpha$

Donc : $x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)\dfrac{x+2}{2x}$

Qui donne : $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \text{ A rejeter.} \end{cases}$

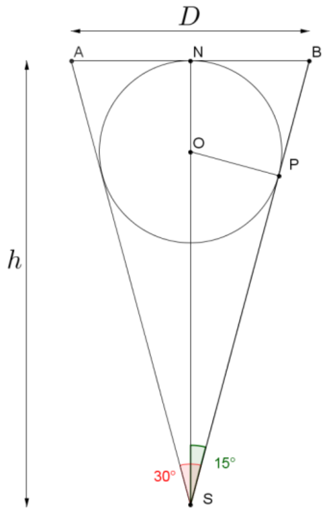
Ce qui donne aussi : $\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 41.41°$

Les trois côtés sont donc : 4, 5 et 6.

Le 7 septembre 2010

EXTRI317 – FPMS, UMONS, Mons, Juillet 2011.

Un outil (de type plantoir) conique, avec un angle d'ouverture de 30°, permet de creuser des trous de golf sur un green horizontal et parfaitement plan.
Le travail de l'outil étant supposé perpendiculaire au sol, quels doivent être le diamètre du trou (au niveau du sol) et la pénétration de l'outil, si l'on désire que la balle de golf (supposée sphérique et de 2 cm de rayon) qui s'y loge, affleure exactement à la surface du green.



$$\overline{SO} = \frac{2}{\sin 15°};\ \overline{ON} = 2 \Rightarrow h = \overline{SO} + \overline{ON} = 2\left(1 + \frac{1}{\sin 15°}\right) = 9.73\,\text{cm}.$$

$$D = 2\overline{NB} = 2h\tan 15° = 2 \times 9.73 \times \tan 15° = 5.21\ \text{cm}$$

Le 28 aout 2012

EXTRI318 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011.

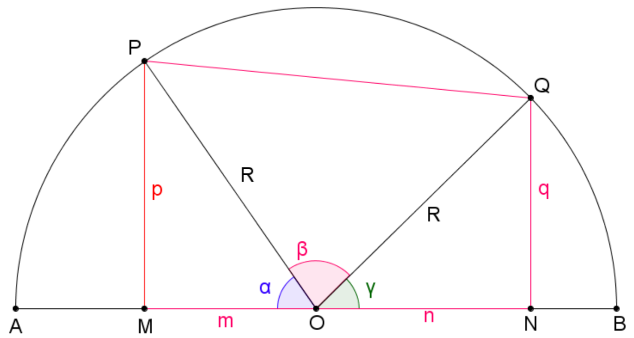
Dans un demi-cercle de diamètre AB (dont la longueur est $2R$ et le milieu est O), on inscrit un trapèze $MPQN$ (dont M et N sont des points de AB et les perpendiculaires à AB en M et N coupent le demi-cercle en P et Q respectivement).

– Représentez la figure géométrique

– Trouvez l'angle MOP (noté α) en fonction de R, l'aire du trapèze (S) et l'angle QOP (noté β). (Simplifiez la relation au maximum).

– Calculez l'angle α pour $R = 1$ dm, $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ dm^2 et $\beta = 60°$.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$S = \frac{p+q}{2}(m+n)$$

$$\sin\alpha = \frac{p}{R}; \qquad \cos\alpha = \frac{m}{R}; \qquad \sin\gamma = \frac{q}{R}; \qquad \cos\gamma = \frac{n}{R}$$

$$S = \frac{1}{2}R^2(\sin\alpha + \sin\gamma)(\cos\alpha + \cos\gamma) \qquad \text{où } \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{2}R^2 2\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}.2\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}$$

$$= R^2\sin^2\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\beta \qquad \text{or } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{R^2\sin\beta}{2}\left[1 - \cos(2\alpha + \beta)\right]$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha+\beta) = -\frac{2S}{R^2\sin\beta} + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}\left(-\beta + \arccos\left(1 - \frac{2S}{R^2\sin\beta}\right)\right)}$$

Si $R = 1$ et $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ et $\beta = 60°$

alors $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(-60° + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}(-60° + 120°) = 30°$

---

27 septembre 2011

EXTRI319 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011.

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $f(x)$ suivante est-elle strictement positive?

$$f(x) = 2\sin^2 3x + \sin^2 6x - 2$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1ère méthode

Posons $3x = \alpha$ et utilisons la formule $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

qui permet de diminuer le degré de $\sin^2\alpha$

L'équation devient :

$$f(x) = \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 2\alpha; \quad \text{or } \sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha = \cos\alpha(-1 - \cos 2\alpha)$$

On demande $f(\alpha) > 0$; or $-1 - \cos 2\alpha \leq 0$

Donc on doit avoir : $\begin{cases} \cos 2\alpha < 0 & (1) \\ -1 - \cos 2\alpha \neq 0 & (2) \end{cases}$

$$(1) \cos 2\alpha < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{or } 2\alpha = 6x$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

$$1°)\ k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$2°) k = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{12} < x \leq \frac{\pi}{12} < \frac{7\pi}{12}$$

$$(2) -1 - \cos 2\alpha \neq 0 \Rightarrow 2\alpha \neq \pi + 2k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$1°)\ k = 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6}$$

$$2°) k = 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : $\boxed{x \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\} \cup \left]\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right[}$

2ème méthode

$$2\sin^2 3x+4\sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)-2>0$$

Posons : $y=\sin^2 3x \Rightarrow -2y^2+3y-1>0$

$-2y^2+3y-2=0$ pour $y=1$ et $y=\dfrac{1}{2}$

Si $y=1$ alors $\sin 3x=\pm 1$ et $3x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

c'est-à-dire $x_1=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x_2=\dfrac{\pi}{2}$

Si $y=\dfrac{1}{2}$ alors $\sin 3x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $3x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$

c'est-à-dire $x\in\left\{\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12}\right\}$

Tableau de signe de $-2\sin^4 3x+3\sin^2 3x-1=f(x)$

x	0		$\frac{\pi}{12}=15°$	$20°$	$\frac{\pi}{6}=30°$	$40°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$50°$	$5\frac{\pi}{12}=75°$	$80°$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	-1	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Conclusion : $x\in\left]\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right[$

15 septembre 2011. Modifié le 18 juin 2012